Serie 6, Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb Datum: 18. Dezember 2017

1. Lösung eines LGS 851082

Welcher der Vektoren erfüllt das lineare Gleichungssystem?

(a) Setzen Sie dafür in das LGS ein.

(b) Überprüfen Sie ihr Resultat mit Matlab indem Sie die Lösung mit der Koeffizienten-Matrix multiplizieren.

(a)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & & -2y & & = & 2 \\ E_2: & 4x & -4y & +12z & = & 20 \\ E_3: & 2x & & +6z & = & 8 \end{array}\right| \text{ und } \vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & & -2y & & = & 0 \\ E_2: & 8x & +4y & +12z & = & 16 \\ E_3: & 4x & +4y & +6z & = & 8 \end{array}\right| \text{ und } \vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 12 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in LGS ergeben sich:

$$\mathbf{M} \odot \vec{u} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} \odot \vec{v} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} \odot \vec{w} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Also sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Lösungen und $\vec{w}$ ist keine Lösung.

(b) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & 12 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in LGS ergeben sich:

$$\mathbf{M} \odot \vec{u} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{M} \odot \vec{v} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} \odot \vec{w} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Lösungen und $\vec{u}$ ist keine Lösung.

2. Struktur der Lösung eines LGS **181322**

Gegeben sind verschiedene Lösungen der linearen Gleichungssysteme. Bestimmen Sie die Richtungsvektoren der homogenen Lösung.
Übrigens, der Vektorraum, der durch diese Vektoren aufgespannt wird, heisst **Nullraum** der Koeffizenten-Matrix **A**. Überprüfen Sie ihr Resultat in Matlab mit dem Befehl `null()`.

(a)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & -x & +2y & -3z & = & 0 \\ E_2: & -2x & +5y & -6z & = & 0 \\ E_3: & x & +3y & +3z & = & 0 \end{array}\right| \text{ und } \vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 9x & -6y & -5z & = & -16 \\ E_2: & 6x & -4y & 8z & = & 12 \\ E_3: & -12x & +8y & +4z & = & 16 \end{array}\right| \text{ und } \vec{u} = \begin{pmatrix} -14/3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 28/3 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Der Richtungsvektor der Lösung ist

$$\vec{a} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in das LGS ergibt sich

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & -21 & +0 & +21 & = & 0 \\ E_2: & -42 & +0 & +42 & = & 0 \\ E_3: & 21 & +0 & -21 & = & 0 \end{array}\right|$$

D.h. $\vec{a}$ ist eine homogene Lösung des LGS.
Übrigens, das Gleichungssystem in Zeilenstufenform lautet

$$\left|\begin{array}{cccr} x & & +3z & = 0 \\ & y & & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right|$$

(b) Der Richtungsvektor der Lösung ist

$$\vec{a} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -14 \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in das LGS ergibt sich

$$\left|\begin{array}{lrrrcrcrcl} E_1: & 9\cdot(-14) & -6\cdot(-21) & +0 & = & -3\cdot 3\cdot 2\cdot 7 & + & 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7 & = & 0 \\ E_2: & 6\cdot(-14) & -4\cdot(-21) & +0 & = & -2\cdot 3\cdot 2\cdot 7 & + & 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 & = & 0 \\ E_3: & -12\cdot(-14) & +8\cdot(-21) & +0 & = & -3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7 & + & 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 & = & 0 \end{array}\right|$$

Übrigens, das Gleichungssystem in Zeilenstufenform lautet

$$\left|\begin{array}{rrrcr} 3x & -2y & & = & -2 \\ & & z & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right|$$

3. Freie Variablen und Pivot-Variablen **863440**

Bestimmen Sie frei Variablen und Pivot-Variablen und die Lösung des LGS. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Matlab und den Befehlen `null` und `rref`.

(a)

$$\left|\begin{array}{lrrrrrcr} E_1: & & & 2z & & & = & 4 \\ E_2: & x & +y & -4z & +u & & = & 2 \\ E_3: & 3x & +3y & -12z & +3u & +v & = & 7 \end{array}\right|$$

(b)

$$\left|\begin{array}{lrrrrrcr} E_1: & 3x & +3y & -8z & +6u & & = & 14 \\ E_2: & x & +y & -4z & +2u & +v & = & 3 \\ E_3: & 5x & +5y & -20z & +10u & +3v & = & 13 \end{array}\right|$$

Lösung:

(a) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{lrrrrr|r} E_1' = E_2: & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ E_2' = E_3: & 3 & 3 & -12 & 3 & 1 & 7 \\ E_3' = E_1: & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lrrrrr|r} E_1'' = E_1': & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ E_2'' = E_2' - 3E_1': & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ E_3'' = E_3': & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lrrrrr|r} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1''' = E_1'': & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ E_2''' = E_3'': & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ E_3''' = E_2'': & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

x, z und v sind Pivot-Variablen und y und u sind freie Variablen. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($y = u = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{lrrrrr|r} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1''': & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 \\ E_2''': & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ E_3''': & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\; v = 1 \;\Rightarrow\; z = 2 \;\Rightarrow\; x = 2 + 4 \cdot 2 = 10$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein. Für $y = 1$ und $u = 0$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{rccccc|c} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1''' : & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ E_2''' : & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ E_3''' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\; v = 0 \;\Rightarrow\; z = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{h},1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für $y = 0$ und $u = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{rccccc|c} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1''' = E_1'' : & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ E_2''' = E_3'' : & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ E_3''' = E_2'' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\; v = 0 \;\Rightarrow\; z = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$$

Die zweite homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{h},2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} E_1' = E_2: & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ E_2' = E_1: & 3 & 3 & -8 & 6 & 0 & 14 \\ E_3' = E_3: & 5 & 5 & -20 & 10 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lrrrrr|r} E_1'' = E_1': & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ E_2'' = E_2' - 3E_1': & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 5 \\ E_3'' = E_1' - 5E_1': & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

x, z und v sind Pivot-Variablen und y und u sind freie Variablen. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($y = u = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1'': & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ E_2'': & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 5 \\ E_3'': & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ v = 1\ \Rightarrow\ z = 5 + 3 \cdot 14 = 2\ \Rightarrow\ x = 3 + 4 \cdot 2 - 1 = 10$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein. Für $y = 1$ und $u = 0$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1'': & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ E_2'': & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ E_3'': & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ v = 0\ \Rightarrow\ z = 0\ \Rightarrow\ x = -1$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{h},1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $y = 0$ und $u = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1'': & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ E_2'': & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ E_3'': & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ v = 0\ \Rightarrow\ z = 0\ \Rightarrow\ x = -2$$

Die zweite homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{h},2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Homogene lineare Gleichungssyteme 801980

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der homogenen linearen Gleichungssysteme. Überprüfen Sie ihr Resultat mit Matlab und dem Befehl `null`.

(a)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & 3x & +3y & -12z & = & 0 \\ E_2: & x & & -4z & = & 0 \\ E_3: & 5x & +2y & -20z & = & 0 \end{array} \right|$$

(b)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & 3x & +3y & -5z & = & 0 \\ E_2: & & y & -3z & = & 0 \\ E_3: & & 2y & -5z & = & 0 \end{array} \right|$$

(c)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & x & +3y & +z & = & 0 \\ E_2: & & y & +z & = & 0 \\ E_3: & & 2y & +2z & = & 0 \end{array} \right|$$

Lösung:

(a) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{lrrr} E_1' = E_2: & 1 & 0 & -4 \\ E_2' = E_3: & 5 & 2 & -20 \\ E_3' = E_1: & 3 & 3 & -12 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{lrrr} E_1'' = E_1': & 1 & 0 & -4 \\ E_2'' = E_2' - 5E_1': & 0 & 2 & 0 \\ E_3'' = E_3' - 3E_1': & 0 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{lrrr} E_1''' = E_1'': & 1 & 0 & -4 \\ E_2''' = E_2'': & 0 & 2 & 0 \\ E_3''' = E_3'' - 3/2E_2'': & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Wir stellen fest, dass z eine freie Variable ist. Die partikuläre Lösung ist (wie immer für homogene Probleme) $\vec{l}_p = \vec{0}$.
Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.
Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{r|rrr} & x & y & z \\ \hline E_1''': & 1 & 0 & -4 \\ E_2''': & 0 & 2 & 0 \\ E_3''': & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ y = 0\ \Rightarrow\ x = 4$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{h},1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{lrrr} E_1' = E_1: & 1 & 3 & -5 \\ E_2' = E_2: & 0 & 1 & -3 \\ E_3' = E_3 - 2E_2: & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ausser der trivialen Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt es keine weiteren Lösungen.

(c) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{lrrr} E_1' = E_1: & 1 & 3 & 1 \\ E_2' = E_2: & 0 & 1 & 1 \\ E_3' = E_3 - 2E_2: & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir stellen fest, dass z eine freie Variable ist. Die partikuläre Lösung ist (wie immer für homogene Probleme) $\vec{l}_p = \vec{0}$.
Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.
Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{r|rrr} & x & y & z \\ \hline E_1''': & 1 & 3 & 1 \\ E_2''': & 0 & 1 & 1 \\ E_3''': & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ y = -1\ \Rightarrow\ x = 2$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{h},1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. Schnittgerade von Ebenen **042736**

Die Ebenen E_1 und E_2 (und E_3) schneiden sich in einer Geraden g. Bestimme eine Parameterdarstellung von g:

(a) $E_1: \; x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0$
$E_2: \; 6x_1 + x_2 - x_3 = 5$

(b)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & 4x & +4y & -16z & = & 4 \\ E_2: & x & & -4z & = & 2 \\ E_3: & 5x & +2y & -20z & = & 8 \end{array} \right|$$

(c) $E_1: \; 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$
$E_2: \; -x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0$

Benutze das Gauss-Verfahren zum Lösen des Systems von linearen Gleichungen und überprüfe das Resultat mit Matlab und den Befehlen `null` und `rref`.

Lösung:

(a) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{lrrr|r} E_1' = E_1: & 1 & -1 & 2 & 1 \\ E_2' = E_2 - 6E_1: & 0 & 7 & -13 & -1 \end{array} \right]$$

x und y sind Pivot-Variablen und z ist eine freie Variable. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($z = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{lrrr|r} & x & y & z & \\ \hline E_1': & 1 & -1 & 0 & 1 \\ E_2': & 0 & 7 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \; y = -1/7 \; \Rightarrow \; x = 1 - 1/7 = 6/7$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein. Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} & x & y & z & \\ \hline E_1' : & 1 & -1 & 2 & 0 \\ E_2' : & 0 & 7 & -13 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{13}{7}\ \Rightarrow\ x = \frac{13}{7} - 2 = -\frac{1}{7}$$

Eine homogene Lösung ist also (skalieren):

$$\vec{l}_{\mathrm{h},1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung (Gleichung der Schnittgeraden) lautet also

$$\vec{u} = \frac{1}{7}\left(6// - 1//0\right) + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(b) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{lrrr|r} E_1' = E_2 : & 1 & 0 & -4 & 2 \\ E_2' = E_3 : & 5 & 2 & -20 & 8 \\ E_3' = E_1 : & 4 & 4 & -16 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lrrr|r} E_1'' = E_1' : & 1 & 0 & -4 & 2 \\ E_2'' = E_2' - 5E_1' : & 0 & 2 & 0 & -2 \\ E_3'' = E_3' - 4E_1' : & 0 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lrrr|r} & x & y & z & \\ \hline E_1''' = E_1'' : & 1 & 0 & -4 & 2 \\ E_2''' = E_2''/2 : & 0 & 1 & 0 & -1 \\ E_3''' = E_3'' - 2E_2'' : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x und y sind Pivot-Variablen und z ist eine freie Variable. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($z = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{lrrr|r} & x & y & z & \\ \hline E_1''' : & 1 & 0 & 0 & 2 \\ E_2''' : & 0 & 1 & 0 & -1 \\ E_3''' : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ y = -1\ \Rightarrow\ x = 2$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein. Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & x & y & z & \\ \hline E_1''' : & 1 & 0 & -4 & 0 \\ E_2''' : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E_3''' : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ y = 0\ \Rightarrow\ x = 4$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{h},1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung (Gleichung der Schnittgeraden) lautet also

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{lccc|c} E_1' = -E_2 : & 1 & -5 & 6 & 0 \\ E_2' = E_1 + 3E_2 : & 0 & 20 & -19 & 7 \end{array}\right]$$

x und y sind Pivot-Variablen und z ist eine freie Variable. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($z = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & x & y & z & \\ \hline E_1' : & 1 & -5 & 0 & 0 \\ E_2' : & 0 & 20 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{7}{20} = \frac{7}{20}\ \Rightarrow\ x = 5 \cdot \frac{7}{20} = \frac{35}{20}$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 35 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein. Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & x & y & z & \\ \hline E_1' : & 1 & -5 & 6 & 0 \\ E_2' : & 0 & 20 & -19 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{19}{20}\ \Rightarrow\ x = 5 \cdot \frac{19}{20} - 6 = -\frac{25}{20}$$

Eine homogene Lösung ist also (skalieren):

$$\vec{l}_{\mathrm{h},1} = \begin{pmatrix} -25 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung (Gleichung der Schnittgeraden) lautet also

$$\vec{u} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 35 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -25 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

6. Inhomogene LGS **970730**

Bestimmen Sie die Lösungsmengen. Überprüfen Sie das Resultat mit Matlab und den Befehlen `rref` und `null`.

(a)

$$\left|\begin{array}{lccccc} E_1: & 5x & 2y & -20z & = & 8 \\ E_2: & x & & -4z & = & 2 \\ E_3: & 5x & 2y & -20z & = & 9 \end{array}\right|$$

(b)

$$\left|\begin{array}{lccccc} E_1: & 2x & +6y & -12z & = & 12 \\ E_2: & & 2y & -4z & = & 2 \\ E_3: & 2x & +6y & -12z & = & 12 \end{array}\right|$$

(c)

$$\left|\begin{array}{lccccc} E_1: & 2x & +3y & & = & 15 \\ E_2: & & & z & = & -4 \\ E_3: & x & +3y & & = & 12 \end{array}\right|$$

Lösung:

(a) Es fällt auf, erste und die dritte Zeile einen Widerspruch ergeben:

$$\left|\begin{array}{lccccc} E_1 - E_3: & 0 & +0 & +0 & = & -1 \end{array}\right|$$

Also hat das Gleichungssystem keine Lösung.

(b) Das Gleichungssystem lautet in Zeilenstufenform

$$\left|\begin{array}{ccccc} x & & & = & 3 \\ & y & -2z & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right|$$

Es gibt einen freien Paramter $z = \lambda$ und die Lösungen sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Das Gleichungssystem lautet in Zeilenstufenform

$$\left|\begin{array}{ccccc} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 3 \\ & & z & = & -4 \end{array}\right|$$

Dies ist der Schnittpunkt der drei Ebenen