KAPITEL 4

Trigonometrie

Lernziele 4.1 Trigonometrie, Periodische Schwingungen

- Die Studierenden können Winkel zwischen Bogenmass und Winkelgrad umrechnen.
- Sie kennen die Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis die Eigenschaften, die sich daraus ergeben (Symmetrie und Periodizität).
- Sie kennen die Graphen der trigonometrischen Funktionen $\cos(t)$ und $\sin(t)$.
- Sie können Funktionen transformieren, d.h. verschieben und strecken entlang der x- und $y-$Achse. Sie können Funktionen an den Koordinatenachsen spiegeln.
- Sie kennen die allgemeine Sinusfunktion und deren charakteristische Grössen, Null, Periode und Amplitude.
- Sie kennen die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen.
- Sie können mit den Arkus-Funktionen aus gegebenen den Komponenten von Vektoren und Dreiecken Winkel berechnen.

- Sie können gleichfrequente Schwingungen zu *einer* Sinusschwingung addieren.
- Sie können eine Sinusschwingung mit Phasenwinkel zerlegen in reine sin- und cos-Schwingungen ohne Nullphasenwinkel

4.1 Das Bogenmass

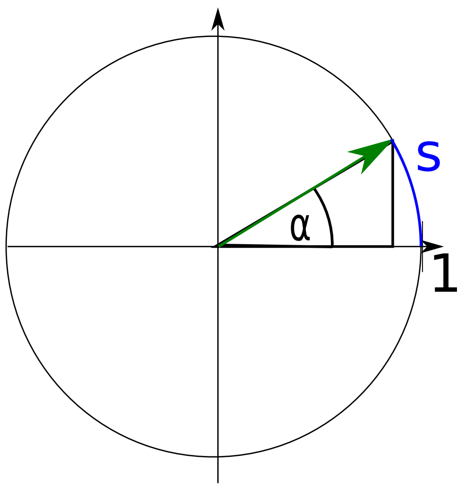
Beispiel 4.1 Kreisbogen **EMSJBG**

Wir messen auf einem Kreisbogen (Radius 1) einen Kreisbogen vom 0.174533. Wie gross ist der darunterliegende Winkel.

Definition 4.1 Bogenmass

Unter dem Bogenmass s eines Winkels α (in Grad) verstehen wir die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$



Beispiel 4.2 Rechne die Masseinheit um **245307**

Berechne die Winkel $s = \frac{\pi}{7}$ und $\varphi = 12°$ in beiden Masseinheiten.
Lösung:

Wir beginnen mit der Feststellung, dass ein voller Kreis in den beiden Masseinheiten 2π oder 360° entspricht:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
$\frac{\pi}{7}$	

Danach berechnen wir den Quotienten der dritten und zweiten Zeile ist in allen Winkel-Einheiten gleich, also

$$f = \frac{\frac{\pi}{7}}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} \ .$$

Also

$$\alpha = \frac{360^\circ}{14} = 25.71^\circ \ .$$

Gleich verfahren wir bei der Umrechnung von Winkelgrad ins Bogenmass:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
	12°

Der Quotient der dritten und zweiten Zeile ist

$$f = \frac{12^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \ .$$

Also

$$x = \frac{2\pi}{30} = 0.209 \ .$$

Beispiel 4.3 Bogenmass **TC2EE3**

Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass x oder im Winkelmass α.

α	111°		120°		-15°
x		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

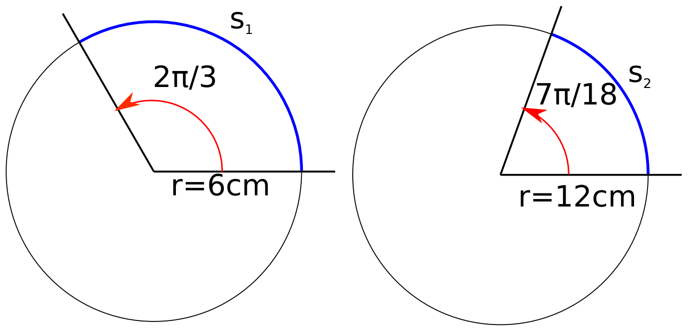
Beispiel 4.4 Bogenmass 978833

Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass x oder im Winkelmass α.

α	$18°$				$50°$
x		$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	

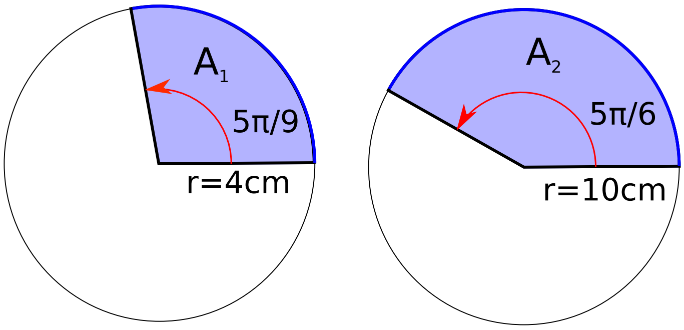
Beispiel 4.5 Bogenmass 335331

Berechne die Bogenlänge s.



Beispiel 4.6 Bogenmass 845541

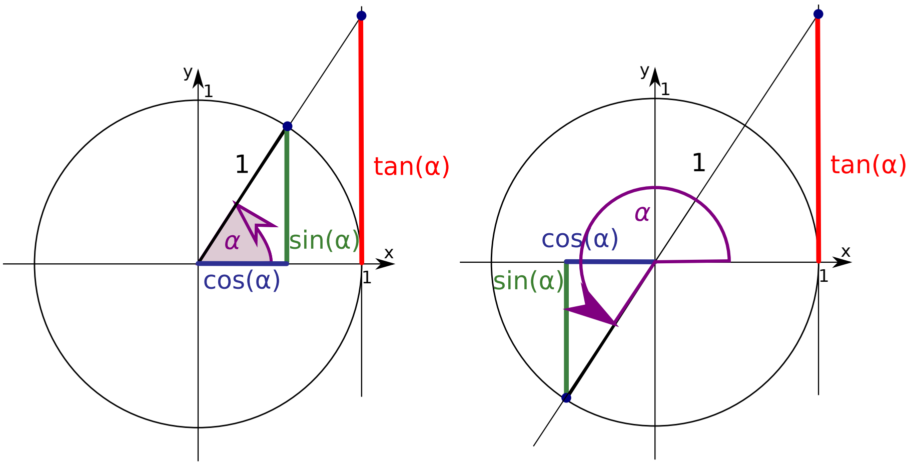
Berechne die Fläche des Kreissektors A.



4.2 Der Einheitskreis

Wir definieren die trigonometrischen Funktionen als Stücke am Einheitkreis.

Definition 4.2 Winkelfunktionen



Beachten Sie, dass die trigonometrischen Funktionen auch die Richtungen der Pfeile angeben und durch ihr Vorzeichen. Es gilt

- Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $\sin(\alpha) > 0$ und $\cos(\alpha) > 0$
- Für $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$: $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) < 0$

Infobox 4.1 Winkel haben eine Richtung

In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeigersinn gemessen, d.h. $10°$ ist im Gegenuhrzeigersinn und $-10°$ ist im Uhrzeigersinn.

Für rechtwinklige Dreiecke gelten auch folgende Relationen. Wir werden die Relationen selten gebrauchen, weil wir uns mehr für die Beschreibung von periodischen Schwingungen interessieren.

Infobox 4.2 Relationen am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H};\ \cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$

Mit den Abkürzungen A für Ankathete, G für Gegenkathete und H für Hypotenuse.

[Papula, 2009, Bd. 1 III 9.1]

Beispiel 4.7 Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen **K4PJLD**

Welche Vorzeichen haben $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für die folgenden Winkel? Geben Sie den Quadranten an.

a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Wir strecken den Einheitskreis um den Faktor r. Dadurch erhalten wir einen Kreis mit Radius r.

Satz 4.1 Polarkoordinaten

Wir betrachten $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 360°$. Der Vektor

$$\vec{w} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat die Länge r und schliesst mit der x-Achse den Winkel φ ein.
Wir nennen (r, φ) die Polarkoordinaten von $\vec{w}$.

Beispiel 4.8 Polarkoodinaten **7SXS1J**

Addiere die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Ihre Polar-Koordinaten sind $(r = 6.5, \varphi = 30°)$ und $(r = 10, \varphi = 50°)$.
Lösung:
Wir berechnen zuerst die Karthesischen Koordinaten

$$\vec{a} = 6.5 \cdot \begin{pmatrix} \cos(30°) \\ \sin(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.62917 \\ 3.25 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = 10 \cdot \begin{pmatrix} \cos(50°) \\ \sin(50°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.42788 \\ 7.66044 \end{pmatrix}$$

Die Summe ist also

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 12.057 \\ 10.91 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.9 Polarkoodinaten **UCWJYR**

Geben Sie die Vektoren in Karthesischen Koordinaten an.

a) $\vec{a}$: $\|a\| = 1$, $\varphi = 45°$

b) $\vec{b}$: $\|b\| = 2$, $\varphi = -225°$

c) $\vec{c}$: $\|c\| = 5$, $\varphi = \frac{5\pi}{36}$

d) $\vec{d}$: $\|d\| = 2$, $\varphi = 60°$

e) $\vec{e}$: $\|e\| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

f) $\vec{f}$: $\|f\| = 7$, $\varphi = 35°$

g) $\vec{g} = \vec{a} + \vec{b}$

Beispiel 4.10 Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten **NNHCXF**

Geben Sie die kartesischen Koordinaten der Vektoren an. Verwenden Sie auf dem Taschenrechner den Grad modus (`deg`), falls Winkel in Grad angegeben sind und den Radian-Modus (`rad`), falls die Winkel im Bogenmass angegeben sind.

a) $r = 5$, $\varphi = 216.9°$

b) $r = 13$, $\varphi = -0.4$

c) $r = 37$, $\varphi = 1.24$

d) $r = 85$, $\varphi = 25°$

e) $r = 145$, $\varphi = 4.55$

f) $r = 197$, $\varphi = 98.2°$

Beispiel 4.11 Kompass und Winkel **IJ5I6F**

a) Nicolas läuft 3 m von Punkt O weg. Dabei schliesst er mit der positiven x-Achse einen Winkel von 30° ein. Beschreibe seinen Weg mit einem Pfeil in der Zeichnung und danach mit Zahlen.

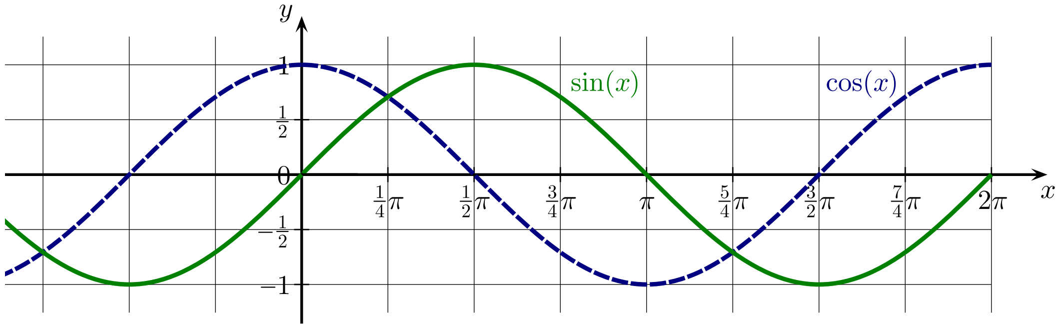
b) Wo landet er, wenn er 7 m läuft und mit der positiven x-Achse einen Winkel von 55° einschliesst?

c) Wo landet er, wenn er beide Wege nacheinander läuft?

4.2.1 Graphen der trigonometrischen Funktionen

Infobox 4.3

- Die Zuordnung $x \mapsto y = f(x)$ heisst $f(x)$ Funktion. Dabei ist x die freie Variable (Input) und y die abhängige Variable (Output).
- Wir nennen x das **Argument** von f und y den **Funktionswert**.



Definition 4.3 Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f(t)$ heisst

- periodisch mit **Periode** T, falls $f(t+T) = f(t)$
- **symmetrisch**, falls $f(-t) = f(t)$
- **antisymmetrisch**, falls $f(-t) = -f(t)$

Beispiel 4.12 Symmetrie von Monomen **NUDTZW**

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

Lösung:

a) $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$. Also

$$f(-x) = f(x)$$

Die Funktion ist also symmetrisch.

b) $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3$. Also

$$f(-x) = -f(x)$$

Die Funktion ist also antisymmetrisch.

Beispiel 4.13 Symmetrie von Monomen **MVESAV**

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x) = 1 + x^2$

b) $f(x) = x - x^3$

c) $f(x) = x + x^2$

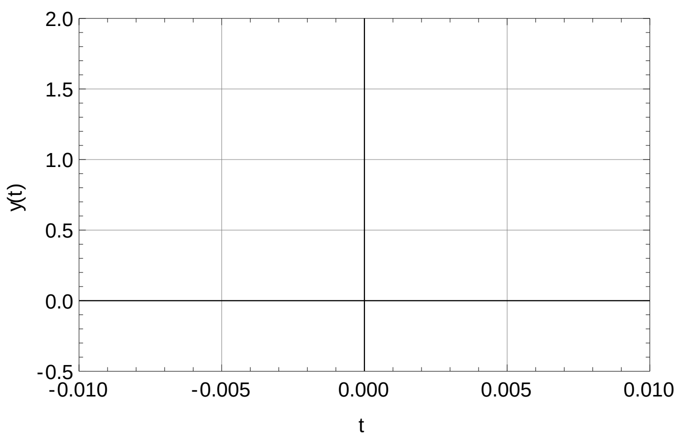
d) $f(x) = x^3 + x^4$

Beispiel 4.14 Symmetrie der trigonometrischen Funktionen **U4P0S2**

Benutze den Einheitskreis:

a) Sind die trigonometrischen Funktionen periodisch. Warum? Was ist ihre Periode?

b) Haben die trigonometrischen Funktionen Symmetrien. Welche? Warum? Betrachten (zeichen) Sie dafür $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ in der Umgebung von $\alpha = 0$.



Beispiel 4.15 Symmetrien MZ2D7Y

Bestimme die Symmetrien der folgenden Funktionen

a) $f(x) = \sin(-x)$

b) $f(x) = \cos(-x)$

c) $f(x) = \sin(x^2)$

d) $f(x) = \big(\sin(x)\big)^2$

e) $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big)$

f) $f(x) = \cos(x - 6\pi)$

4.3 Transformationen von Funktionen

Satz 4.2 Transformationen

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kann wie folgt transformiert werden:

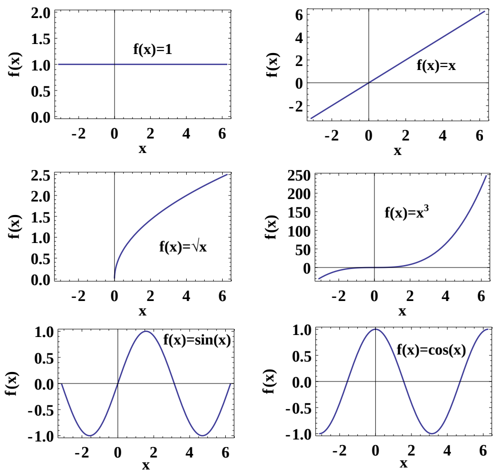
- $-f(x)$ Spiegelung an der x-Achse
- $f(-x)$ Spiegelung an der y-Achse
- $f(x) + c$ Verschiebung in Richtung der y-Achse ($c > 0$)
- $f(x - c)$ Verschiebung in Richtung der **positiven** x-Achse ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Stauchung in Richtung der x-Achse ($a > 1$).
- $a \cdot f(x)$ Streckung in Richtung der y-Achse ($a > 1$).

Die Transformationen entlang der y-Achse sinid intuitiv, die entlang der x-Achse gehen oft gegen unsere Intuition.

Infobox 4.4 Folgerungen Transformationen

- $f(x) - c$ Verschiebung der y-Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(x + c)$ Verschiebung der x-Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Streckung in Richtung der x-Achse ($0 < a < 1$).
- $a \cdot f(x)$ Stauchung in Richtung der y-Achse ($0 < a < 1$).

Beispiel 4.16 Vertikale Verschiebung **AEU6T**



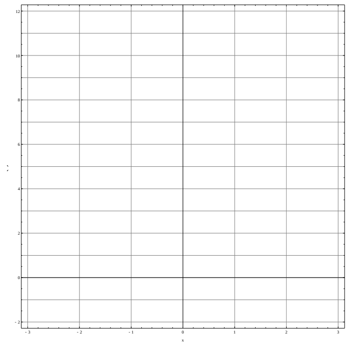
Die zehn Graphen oben zeigen die häufigsten Funktionen in der Algebra. Sie sollten schon mit den Charakteristiken dieser Graphen vertraut sein. Das wird Ihnen helfen, die Graphen der etwas komplizierteren Funktionen, die aus den einfachen Funktionen durch Transformation hervorgehen, besser zu verstehen.

a) Skizzieren Sie unten die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 3$ und $h(x) = x^2 + 2$. Berechnen Sie dazu 4-5 Werte exakt im Kopf und verbinden Sie die Punkte anschliessend.

b) Was ändert sich zwischen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$? Die Form? Die Position? Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

c) Was ist der vertikale Abstand der Graphen?

d) Wie verschiebt sich also der Graph der Funktion $f(x)$, wenn wir die Transformation $y = f(x) + k$ oder $y = f(x) - k$ mit $k > 0$ anwenden?



Beispiel 4.17 Horizontale Verschiebung: Parabel **2RSKP9**

Wir betrachten die Parabel $f(x) = x^2$. Sie hat bei $(x, y) = (0, 0)$ einen Scheitelpunkt.

a) Wo befindet sich der Scheitelpunkt bei der Funktion $g(x) = f(x+3) = (x+3)^2$.

b) Wo befindet sich der Scheitelpunkt bei der Funktion $h(x) = f(x-2) = (x-2)^2$.

c) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = (x-c)^2$ ihren Scheitelpunkt? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Verschiebung in x-Richtung' oder 'Verschiebung in y-Richtung' .

Beispiel 4.18 Translationen **DG6A5Y**

Wir betrachten die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$. Sie ist definiert, falls der Ausdruck unter der Wurzel im Intervall $[0; \infty[$ liegt.

a) In der Funktion $r(x) = f(x-3) = \sqrt{x-3}$ können wir $x = 3$ einsetzen und erhalten
$$r(3) = f(3-3) = \sqrt{3-3} = \sqrt{0} = 0$$
Also ist $x = 3$ die Stelle, die den Definitionsbereich nach unten begrenzt. Geben Sie die untere Grenze des Definitionsbereichs der folgenden Funktionen an:
$$g(x) = f(x-5) = \sqrt{x-5},\ h(x) = f(x+14) = \sqrt{x+14}$$
$$k(x) = f(x-10)+2 = \sqrt{x-10}+2,\ p(x) = f(x+\frac{1}{4})-3 = \sqrt{x+\frac{1}{4}}-3$$

b) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- “Wenn ich bei $g(x) = f(x-5)$ für x den Wert 5 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert ... einsetze.”
- “Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x-5)$ jetzt bei 5 so, wie ursprüngliche Funktion bei ... war.”

Schreiben Sie die obigen Sätze auch allgemein für die Funktion $f(x-c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ auf.

c) Zeichnen Sie die Graphen von $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $p(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie ebenfalls den Vektor ein um den die Funktion $f(x)$ jeweils verschoben wurde, um $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ oder $p(x)$ zu erhalten.

d) Ergänzen Sie nun folgenden Satz: “Die Transformation $f(x-c)+d$ verschiebt die Funktion $f(x)$ ...”

Beispiel 4.19 Spiegelung **82Q57Q**

Wir betrachten die Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$.

a) Geben Sie für alle Funktionen die Stelle an, wo der Ausdruck unter der Wurzel 0 ist. In welche Richtung auf der x-Achse dürfen Sie sich von dieser Stelle aus bewegen, damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv wird?

b) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen an.

c) Erstellen Sie eine Tabelle und schreiben Sie die folgenden Zeilen

- 1. Zeile $x = -18, -11, -6, -3, -2, 2, 3, 6, 11, 18$
- 2. Zeile $x - 2$
- 3. Zeile $g(x) = \sqrt{x-2}$
- 4. Zeile $-x - 2$
- 5. Zeile $h(x) = \sqrt{-x-2}$

d) Beschreiben Sie die Zeilen 3 und 5 in Worten: Was sind ihre Ähnlichkeiten? Worin unterscheiden Sie sich?

e) Erklären Sie nun die Ähnlichkeiten und Unterschiede (Zeilen 3 und 5) aufgrund der Werte in den Zeilen 2 und 4.

f) Plotten Sie nun die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$ mit Matlab oder GeoGebra.

g) Wie verändern sich die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$, falls Sie anstatt $f(x)$ die Funktion $-f(x)$ etc. plotten?

h) Vervollständigen Sie nun folgende Sätze: “Der Graph der Funktion $y = f(-x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$. ”
“Der Graph der Funktion $y = -f(x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$. ”

Beispiel 4.20 Spiegelung **879G1J**

Wir betrachten die Funktion $g(x) = 1 - 2x + x^2 + x^3$. Bestimmen Sie

a) die Funktion $h(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der x-Achse ist.

b) die Funktion $p(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der y-Achse ist.

c) Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie alle drei Funktionen in Matlab oder GeoGebra im Bereich $x \in [-2.2; 2.2]$ plotten.

Beispiel 4.21 Streckung und Stauchung **ZC38E4**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$. Sie hat bei $x = \pi \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) Nullstellen, bei $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ Tiefpunkte und bei $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ Hochpunkte.

a) Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ hat eine erste Nullstelle bei $x = \pi$. Welches Kriterium muss der Ausdruck im Argument der Sinusfunktion von $g(x) = \sin(2x)$ erfüllen, damit $g(x) = 0$?

b) Bestimmen Sie die die erste Nullstelle $x > 0$ der Funktionen $g(x) = \sin(2x)$, $h(x) = \sin(\frac{1}{4} \cdot x)$ und $p(x) = \sin(\frac{2\pi}{5} \cdot x)$. Vergleichen Sie die gefundenen Nullstellen mit der der ursprünglichen Funktion $f(x) = \sin(x)$.

c) Wurden die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ entlang der x-Achse zusammengestaucht oder gestreckt? Argumentieren Sie mit Hilfe der oben bestimmen ersten Nullstelle.

d) Plotten Sie nun die Graphen der Funktion $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ mit Matlab oder GeoGebra.

e) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = \sin(x\omega)$ ihre erste Nullstelle $x > 0$? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Streckung des Graphen … in x-Richtung' und 'Stauchung des Graphen … in x-Richtung' .

4.4 Die allgemeine Sinusfunktion; Phase und Amplitude

Infobox 4.5 Eigenschaften der allgemeinen Sinusfunktion

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin\big(\omega \cdot (t + c)\big)$$

hat

- A die Amplitude,
- die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- die charakteristische Nullstelle bei $-c$

Der Nullphasenwinkel ist $\varphi = c \cdot \omega$.
Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin\big(\omega \cdot t + \varphi\big)$$

hat

- die Amplitude A ,
- die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- und den Nullphasenwinkel φ

Die charakteristische Nullstelle liegt bei $-\frac{\varphi}{\omega}$.

Beispiel 4.22 Charakteristische Grössen einer harmonischen Schwingung IMSGR1

$$f(t) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - \frac{1}{2})\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi t}{5}t - \frac{\pi}{5})\right)$$

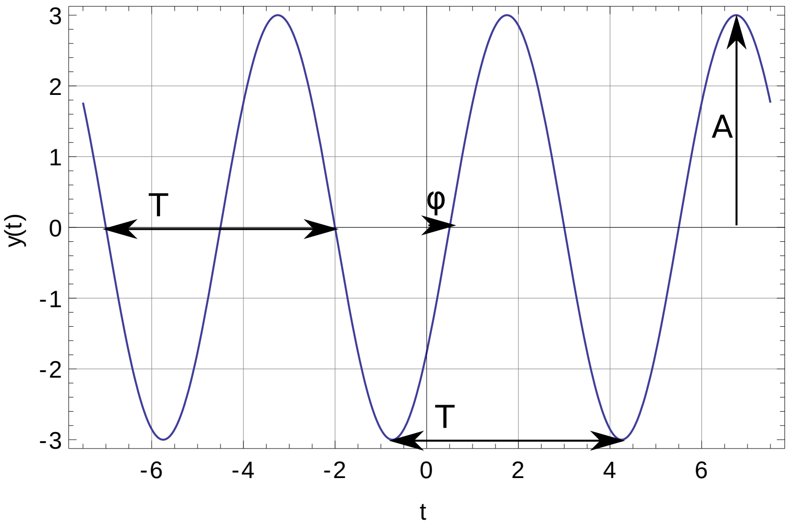
a) Geben Sie für $f(t)$ den Nullphasenwinkel φ, die Amplitude A und die Periode T an.

b) Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der Funktionen.

c) Wo erscheinen die Charakteristischen Grössen im Graphen?

Lösung:

- die Amplitude $A = 3$,
- $\omega = \frac{2\pi}{5}$ und die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 5$,
- die charakteristische Nullstelle bei $\frac{1}{2}$,
- und den Nullphasenwinkel $-\frac{\pi}{5}$).



Beispiel 4.23 Charakteristische Grössen einer harmonischen Schwingung IMSGR1

$$f(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{3} - \frac{4\pi}{15}\right)$$

a) Geben Sie für $f(t)$ den Nullphasenwinkel φ, die Amplitude A und die Periode T an.

b) Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der Funktionen.

c) Wo erscheinen die Charakteristischen Grössen im Graphen?

Beispiel 4.24 Trigonometrische Funktionen zeichnen 4HG9L9

Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der folgenden Funktionen. Zeichnen Sie für jeden Graph den Nullphasenwinkel φ, Amplitude A und Periode T ein.

a) $f(x) = 2\sin(x)$

b) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $f(x) = \cos(-x) - 2$

f) $f(x) = \sin(x - \pi/2)$

g) $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$

h) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{4}\right)$

i) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$

j) $f(x) = 5\cos\left(\frac{\pi x}{2} - 2\right)$

k) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{5} + 3\right) - 2$

l) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{3} - 1\right)$

Beispiel 4.25 Additonstheoreme Vorbereitung **ECQ2MU**

a) Wie hängen $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ und $\sin(\alpha)$ zusammen?

b) Wie hängen $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ und $\cos(\alpha)$ zusammen?

4.5 Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

Satz 4.3 Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

Es ist eine Kurzschreibweise, wenn wir $\pm$ verwenden. Gemeint ist, dass $\pm$ entweder alle oberen Zeichen ausgelsen werden, oder nur die unteren.

Beispiel 4.26 Additonstheoreme Vorbereitung **EBP1NU**

Argumentieren Sie anhand eines Zeigers am Einheitskreis

a) Berechnen Sie für $\alpha = \frac{\pi}{18}$ die Werte

$$\sin(\alpha),\ \cos(\alpha),\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}),\ \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}),\ \sin(-\alpha),\ \cos(-\alpha)$$

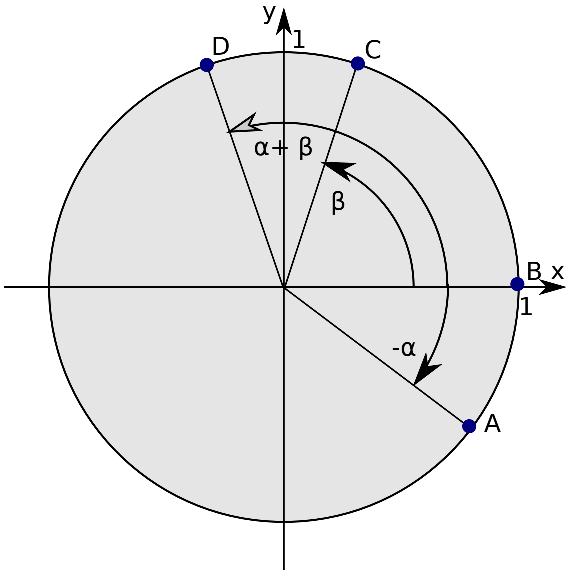
Welche Zusammenhänge erkennen Sie?

b) Wie lässt sich aus $\sin(-\alpha)$ das Vorzeichen aus dem trigonometrischen Ausdruck beseitigen?

c) Wie lässt sich aus $\cos(-\alpha)$ das Vorzeichen aus dem trigonometrischen Ausdruck beseitigen?

d) Vereinfachen Sie $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$

Beispiel 4.27 Herleitung Additionstheorem **IJ65F9**



a) Geben Sie die karthesischen Koordinaten der Punkte $\vec{A}, \ldots, \vec{D}$ an.

b) Verbinden Sie die Punkte in Gedanken miteinander. Zwei der Verbindungen haben die selbe Länge. Welche?

c) Wir benennen die Verbindungen, die die selbe Länge mit $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Berechnen Sie kartesischen Koordinaten dieser Vektoren.

d) Benutzen Sie die Symmetrie der Trigonometrischen Funktionen um negative Winkel in trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

e) Geben Sie nun den folgenden Ausdruck an

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2$$

f) Wir notieren $\big(\sin(x)\big)^2 = \sin^2(x)$. Multiplizieren Sie den Term oben aus.

g) Benutzen Sie $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (3 mal anwenden) um den Ausdruck weiter zu vereinfachen.

h) Lösen Sie nach $\cos(\alpha + \beta)$ auf.

Beispiel 4.28 Ausdruck für $\cos(\alpha - \beta)$ **KNUQTG**

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha)$$

a) Setzen Sie in den Ausdruck den Winkel $\gamma = -\beta$ ein.

b) Benutzen Sie die Symmetrien-Eigenschaften um die negativen Winkel in den einfachen trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

Beispiel 4.29 Additionstheorem $\sin(\alpha + \gamma)$ **8FY7QU**

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha)$$

a) Setzen Sie in den Ausdruck den Winkel $\gamma = \beta + \frac{\pi}{2}$ ein.

b) Benutzen Sie $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ und $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ um die Summen von Winkeln in den einfachen trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

c) Beseitigen Sie Summen von Winkeln in den einfachen trigonometrischen Funktionen.

d) Ersetzen Sie im letzten Ausdruck $\alpha+\beta$ durch $\alpha-\beta$ und beseitigen sie negative Winkel in den einfachen trigonometrischen Ausdrücken.

Beispiel 4.30 Darstellung $\cos^2(\alpha)$ **AT9S8M**

Zeigen Sie, dass gilt

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha) + 1\right]$$

Werten Sie dazu

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

für $\beta = \alpha$ aus.

4.6 Arkus-Funktionen

Definition 4.4 Arkustangens-Funktion

Die Arkustangens-Funktion ordnet den Komponenten x und y den Winkel φ zu.

$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \begin{cases} 0 & Q_1 + Q_4 \\ 180° & Q_2 + Q_3 \end{cases}$$

Dabei sind x, $y \in \mathbb{R}$

Definition 4.5 Arkussinus-Funktion

Die Arkussinus-Funktion ordnet der Komponente y und dem Radius r den Winkel φ zu.

$$\varphi = \begin{cases} \arcsin(\frac{y}{r}) & Q_1 + Q_4 \\ 180° - \arcsin(\frac{y}{r}) & Q_2 + Q_3 \end{cases}$$

Dabei sind r, $y \in \mathbb{R}$

Definition 4.6 Arkuscosinus-Funktion

Die Arkuscosinus-Funktion ordnet der Komponente y und dem Radius r den Winkel φ zu.

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & Q_1 + Q_2 \\ 360° - \arccos(\frac{x}{r}) & Q_3 + Q_4 \end{cases}$$

Dabei sind r, $x \in \mathbb{R}$

Wir nennen die Komponenten $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ auch **Kartesische Koordinaten**. Für jeden Vektor können wir daraus Betrag und φ (den Winkel, den $\vec{v}$ mit der x-Achse einschliesst) berechnen. Das Paar v und φ bestimmt einen Vektor eindeutig. Wir nennen dieses Zahlenpaar die **Polar-Koordinaten** des Vektors $\vec{v}$. Es gilt (im 1. und 4. Quadrant):

$$\varphi = \arctan(\frac{v_y}{v_x})$$

Liegt $\vec{v}$ im 2. oder 3. Quadranten (d.h. $v_x < 0$), dann gilt

$$\varphi = \arctan(\frac{v_y}{v_x}) + 180°$$

Beispiel 4.31 Kartesische Koordinaten/Polarkoordinaten **R3601V**

Notieren Sie in welchem Quadranten die Vektoren liegen und berechnen Sie Winkel und Länge:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7.96956 \\ -0.697246 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Infobox 4.6 Inverse trigonometrische Funktionen

- Der Zwischenwinkel zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ wird berechnet über

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \odot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$

  Dabei erhalten wir korrekterweise einen Winkel $0 \leq \varphi < 180°$ zwischen den Vektoren, und es wird korrekterweise kein Drehsinn berücksichtigt.

- Die Definition ($\arccos$) wird verwendet um den Winkel zwischen einer Koordinaten-Achse $\vec{e}_i$ und einem Vektor $\vec{v}$ zu berechnen. In diesem Fall muss der Drehsinn berücksichtigt werden. Dafür wird im Voraus entschieden, ob $0 \leq \varphi < 180°$ ($Q_1 + Q_2$) oder $180° \leq \varphi < 360°$ ($Q_3 + Q_4$) und so wird die entsprechende Zeile ausgewählt.

Beispiel 4.32 Neigungswinkel **084725**

Berechne den Neigungswinkel für ein Gelände mit 5%, 50%, 100% und 200% Neigung.

4.7 Zerlegung und Überlagerungen von Schwingungen

Kosinus

Satz 4.4 Zerlegung der Kosinus-Schwingungen

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

kann geschrieben werden als

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

mit

- $a = A \cdot \cos(\varphi)$
- $b = -A \cdot \sin(\varphi)$.

Beispiel 4.33 Zerlegung der Cosinus-Schwingungen **NFCHGJ**

Gegeben $f(t) = \sqrt{41} \cdot \cos(1 \cdot t - 0.674741)$ Zerlegen Sie das Signal in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

Beispiel 4.34 Zerlegung der Sinus-Schwingungen **DR61E5**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

a) $f(t)=\sqrt{5}\cdot\cos(4t+1.10715)$

b) $f(t)=5\cdot\cos(5t+\frac{\pi}{2})$

c) $f(t)=\sqrt{74}\cdot\cos(2t+0.950547)$

Satz 4.5 Überlagerung gleichfrequenter $\cos$ / $\sin$ **Schwingungen zu** $\cos$

Für die Überlagerung

$$f(t)=a\cdot\cos(\omega\cdot t)+b\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

gilt

$$f(t)=A\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)$$

mit

- Frequenz $\nu=\frac{\omega}{2\pi}$ oder gleichbedeutend, Periodendauer $T=\frac{2\pi}{\omega}$.
- Amplitude $A=\sqrt{a^2+b^2}$
- Nullphasenwinkel $\varphi=-\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\begin{cases}\pi & (a<0)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

Beispiel 4.35 Überlagerung gleichfrequenter $\cos$ / $\sin$ **Schwingungen**

Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude der Superposition.

$$f(t)=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(t)+\frac{5}{2}\cdot\sin(t)$$

Lösung:

Wir lesen aus $\omega=1$ ($f=\frac{1}{2\pi}$) und erhalten $A=\sqrt{\frac{75+25}{4}}=5$ und $\varphi=-\arctan(\frac{5}{5\cdot\sqrt{3}})=-\frac{\pi}{6}$. Also

$$f(t)=\underbrace{5}_{=A}\cdot\cos(\underbrace{1}_{\omega}\cdot t-\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{=\varphi})$$

Beispiel 4.36 Überlagerung gleichfrequenter $\cos$ / $\sin$ Schwingungen AU8VZS

Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude der Superposition.

a) $f(t) = 1.76336 \cdot \cos(18t) + 2.42705 \sin(18t)$

b) $f(t) = \cos(10t) + \sqrt{3} \cdot \sin(10t)$

c) $f(t) = 3.36588 \cdot \cos(7t) + 2.16121 \cdot \sin(7t)$

Sinus

Satz 4.6 Zerlegung der Sinus-Schwingungen

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

kann geschrieben werden als

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

mit

- $a = A \cdot \sin(\varphi)$
- $b = A \cdot \cos(\varphi)$.

Beispiel 4.37 Zerlegung der Sinus-Schwingungen

Gegeben $f(t) = \sqrt{41} \cdot \sin(1 \cdot t - 0.674741)$ Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos$ / $\sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

Beispiel 4.38 Zerlegung der Sinus-Schwingungen **Z4DX95**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)\ .$$

a) $f(t) = \sqrt{5} \cdot \sin(4t + 1.10715)$

b) $f(t) = 5 \cdot \sin(5t + \frac{\pi}{2})$

c) $f(t) = \sqrt{74} \cdot \sin(2t + 0.950547)$

Satz 4.7 Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ Schwingungen

Für die Überlagerung

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

gilt

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit

- Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder gleichbedeutend, Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Nullphasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \begin{cases} \pi & (b < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel 4.39 Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ Schwingungen

Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude der Superposition.

$$f(t)=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(t)+\frac{5}{2}\cdot\sin(t)$$

Lösung:

Wir lesen aus $\omega=1$ ($f=\frac{1}{2\pi}$) und erhalten $A=\sqrt{\frac{75+25}{4}}=5$ und $\varphi=\arctan(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{5})=\frac{\pi}{3}$. Also

$$f(t)=\underbrace{5}_{A}\cdot\sin(\underbrace{1}_{\omega}\cdot t+\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\varphi})$$

Beispiel 4.40 Überlagerung gleichfrequenter $\cos/\sin$ **Schwingungen** **SX-WHB9**

Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude der Superposition.

a) $f(t)=1.76336\cdot\cos(18t)+2.42705\sin(18t)$

b) $f(t)=\cos(10t)+\sqrt{3}\cdot\sin(10t)$

c) $f(t)=3.36588\cdot\cos(7t)+2.16121\cdot\sin(7t)$

4.8 Übungen

Beispiel 4.41 Phasenwinkel beim Sinus **QSB28F**

Allgemein gilt

$$A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)=a\cdot\cos(\omega\cdot t)+b\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

a) Für $A=10$ und $\varphi=2$ berechne a und b

b) Berechne nun allgemein für A und φ die entsprechenden Amplituden a und b.

Beispiel 4.42 Phasenwinkel beim Cosinus und beim Sinus **R2KFYJ**

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $A\cos(\omega t)$

a) $1.36079\cos(t\omega) - 2.67362\sin(t\omega)$

b) $-1.13601\cos(t\omega) - 4.86924\sin(t\omega)$

c) $-9.36457\cos(t\omega) + 3.50783\sin(t\omega)$

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $A\sin(\omega t)$

d) $0.850987\sin(t\omega) - 2.87677\cos(t\omega)$

e) $-8.49737\sin(t\omega) - 9.83843\cos(t\omega)$

f) $30.0068\cos(t\omega) - 13.7328\sin(t\omega)$

Beispiel 4.43 Phasenwinkel beim Cosinus und beim Sinus **TEA3WI**

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $a\cos(t\omega) + b\sin(t\omega)$

a) $8.544\cos(\omega t - 1.21203)$

b) $5.83095\cos(\omega t + 5.25281)$

c) $2.82843\cos(\omega t + 5.49779)$

d) $12.0416\cos(\omega t - 0.844154)$

e) $10.6301\sin(\omega t + 5.56436)$

f) $2.82843\sin(\omega t - 0.785398)$

g) $9.21954\sin(\omega t - 0.86217)$

h) $9.43398\sin(\omega t + 5.27099)$