KAPITEL 13

Umkehrabbildung und inverse Matrix

Lernziele 13.1 Inverse Matrix

- Die Studierenden können die inverse Matrix bestimmen mit dem Gauss-Jordan-Verfahren
- Sie können mit der inversen Matrix ein reguläres LGS lösen.
- Sie kennen Kriterien für die Existenz der inverse Matrix.
- Sie bestimmen ob ein injektiv, surjektiv oder bijektiv ist und wissen, dass bijektive Abbildungen invertiert weden können.
- Sie können lineare Netzwerke mit Matrizen beschreiben und darin Ströme und Spannungen berechnen.

13.1 Definitionen

Definition 13.1 Matrix-Inverse

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix. Existiert eine Matrix $\mathbf{B}$ so, dass gilt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbb{1}$$

so nennt man $\mathbf{A}$ invertierbar und die Matrix $\mathbf{B}$ die Matrix-Inverse von $\mathbf{A}$.

Im Weiteren schreiben wir $\mathbf{A}^{-1}$ für die Matrix-Inverse von $\mathbf{A}$ und nicht wie oben $\mathbf{B}$, d.h. wir schreiben

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nennt man auch die inverse Matrix von $\mathbf{A}$.

Definition 13.2 Reguläre Matrizen und LGS

Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst **regulär**, falls $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.
Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst **singulär**, falls die Inverse nicht existiert.
Eine LGS $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ heisst **regulär**, falls $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

13.2 Die inverse Matrix bestimmen

Beispiel 13.1 LGS lösen mit Gauss-Jordan **443930**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}$$

Schreibe das Gleichungssystem zuerst als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Wende dann das Gauss-Jordan Verfahren an.

Lösung:

Zuerst das Gauss Verfahren:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & -10 & 41 & 103 \end{array}\right] \to \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Mit der Zeilen-Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 + 10\mathbf{A}_2)$$

Dann zusätzliche Schritte für Gauss-Jordan:

$$\mathbf{A}'' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{A}''' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

mit den Zeilen-Umformungen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2; \mathbf{A}'_2; \mathbf{A}'_3) \\
\mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 + 3\mathbf{A}''_3; \mathbf{A}''_2 + 4\mathbf{A}''_3; \mathbf{A}''_3)
\end{aligned}
$$

Die Lösung kann jetzt direkt abgelesen werden:

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Das Gauss-Jordan Verfahren wird in Matlab mit `rref` aufgerufen. Wird es benutzt um LGSs in erweiterter Koeffizienten-Form zu lösen — wie hier in diesem Beispiel — ist es das flexibelste Instrument um LGSs zu lösen. Also: Immer `rref` verwenden, wenn ein LGS mit Matlab gelöst werden soll.

Beispiel 13.2 Die Inverse bestimmen. **332829**

Bestimme die Matrix-Inverse von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix}$ mit dem Gauss-Jordan Verfahren. Überprüfe das Resultat.

Lösung:

$$
\begin{array}{rc|cl}
\mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = \mathbb{1} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 30 & 6 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \\
\mathbb{1} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & = \mathbf{A}^{-1}
\end{array}
$$

Die Zeilen-Umformungen sind:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2) \\
\mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1 + 6\mathbf{A}'_3; \mathbf{A}'_2 - 2\mathbf{A}'_3; \mathbf{A}'_3) \\
\mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 + 2\mathbf{A}''_2; \mathbf{A}''_2; \mathbf{A}''_3)
\end{aligned}
$$

Kontrolle: Die Matrix-Inverse wurde richtig berechnet, denn es gilt

$$
\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1} \,.
$$

Beispiel 13.3 LGS lösen mit Gauss-Jordan **VTDGZN**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}$$

a) Wende das Gauss-Jordan-Verfahren an um die Inverse $\mathbf{B}^{-1}$ zu berechnen. Kontrolle:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 31 & 3 \\ 0 & 41 & 4 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Überprüfe, ob $\mathbf{B}^{-1}$ die Inverse von $\mathbf{B}$ ist, indem du $\mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{B}$ berechnest.

c) Berechne $\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b}$. Was stellst du fest, wenn du mit der Lösung von Beispiel 13.1 vergleichst?

Beispiel 13.4 LGS lösen mit Gauss-Jordan **WSCFYM**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}$$

a) Schreibe das LGS als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Löse das LGS mit dem *Gauss-Verfahren*.

b) Wende dann das Gauss-Jordan-Verfahren an um die Inverse $\mathbf{B}^{-1}$ zu berechnen. Kontrolle:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -13 & -15 \\ -3 & -8 & -9 \\ -3 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

c) Überprüfe, ob $\mathbf{B}^{-1}$ die Inverse von $\mathbf{B}$ ist, indem du $\mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{B}$ berechnest.

d) Berechne $\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b}$. Was stellst du fest?

Beim Invertieren einer Matrix mit dem Gauss-Jordan Verfahren, werden die Umformungen auf die Einheitsmatrix angewendet. So werden die Zeilenumformungen auf der rechten Seite in der Einheitsmatrix "zwischengespeichert".
Betrachten wir dazu eine Umformungen aus den vorherigen Beispiels: Beim ersten Schritt

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2)$$

Entsteht auf der rechten Seite die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie speichert die Umformung "3. Zeile plus 5 mal die 2. Zeile".

Beispiel 13.5 Berechne das Produkt $\mathrm{P} \odot \mathrm{M}$**.** **657484**

$$\mathbf{P} \odot \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 1 & 2 & 3 \\ 100 & 200 & 300 \end{pmatrix}$$

Beschreibe den Effekt von **P** auf **M** in Worten.

Diese Überlegungen können wir für alle Äquivalenzumformungen machen: Welche Umformungen angewendet wurden auf der linken Seite, das wird auf der rechten Seite gespeichert. Deshalb “enthält” am Schluss die Matrix auf der rechten Seite ($\mathbf{A}^{-1}$) alle Umformungen um die ursprüngliche Matrix in die Einheitsmatrix umzuformen, deshalb gilt dann

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Infobox 13.1 Zulässige Umformungen Gauss-Jordan-Verfahren

- das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren
- eine Zeile mit einer Zahl multiplizieren
- Zeilen vertauschen

Es sind die selben Umformungen wie beim Gauss-Verfahren (Definition 8.3 und Infobox 8.2), nur werden diese Schritte noch weiter ausgeführt, bis die Eins-Matrix $\mathbb{1}$ erzeugt wird.

Beispiel 13.6 Elementare Zeilenumformungen **CEPCBK**

Forme das System $[\mathbf{A}|\mathbb{1}]$ mit elementaren Zeilenumformungen in das System $[\mathbb{1}|\mathbf{B}]$ um. Wie verhalten sich $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zueinander?

a) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

13.3 Ein reguläres LGS lösen mit $\mathbf{A}^{-1}$

Inverse Matrizen erlaubt ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

wie folgt zu lösen. Wir multiplizieren von beiden Seiten $\mathbf{A}^{-1}$ von links, dann ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Gemäss Definition ist das Matrixprodukt auf der linken Seite gleich der Einheitsmatrix,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Da diese Matrix den Vektor $\vec{x}$ nicht verändert ($\mathbb{1} \odot \vec{x} = \vec{x}$), können wir sie weglassen und erhalten die Lösung

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}\,.$$

Beispiel 13.7 Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Inversen 786014

Berechne die Lösung $\vec{x}$ des LGS mit Hilfe der Inversen

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 33 & -10 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -1 & 11 \\ 61 & -3 & 32 \\ 83 & -4 & 43 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt:

$$\mathbf{A} \odot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b}$$

Also

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Erklärungen zu diesem Thema sind auch in [Papula, 2009, Bd. 2 I 5.5, p. 93] zu finden.

Beispiel 13.8 Gleichungssysteme lösen mit der Inversen **PDCPA1**

Bei allen Aufgaben ist die Inverse der Koeffizientenmatrix gegeben. Lösen Sie die LGSs. Betrachten Sie am Schluss die Aufgaben b) und e) noch einmal. Was stellen Sie fest?

a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left| \begin{array}{cccc} -2x & -2y & = & 0 \\ -3x & -y & = & 0 \end{array} \right| \text{ und } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-3 & -14 & 6\\ 1 & -19 & 5\\ 6 & 1 & -4\end{pmatrix}}_{=:\mathbf{C}} \odot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-66\\ -78\\ 18\end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix}71 & -50 & 44\\ 34 & -24 & 21\\ 115 & -81 & 71\end{pmatrix}$$

d)

$$\left|\begin{array}{cccc}-1 & 5 & 1 & = & 55\\ 0 & 149 & 5 & = & 1267\\ 5 & 154 & 1 & = & 1247\end{array}\right| \text{ und } \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix}-621 & 149 & -124\\ 25 & -6 & 5\\ -745 & 179 & -149\end{pmatrix}$$

e)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 6 & 8\\ 3 & 5 & 7\\ -1 & 11 & 9\end{pmatrix}}_{=:\mathbf{E}} \odot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix}-8. & 8.5 & 0.5\\ -8.5 & 8.75 & 0.75\\ 9.5 & -9.75 & -0.75\end{pmatrix}$$

f)

$$\left|\begin{array}{ccccc}8 & 0 & -1 & = & 5\\ -3 & 6 & -2.5 & = & 43.5\\ 4 & -1 & 0 & = & -5\end{array}\right| \text{ und } \mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix}-2.5 & 1 & 6\\ -10 & 4 & 23\\ -21 & 8 & 48\end{pmatrix}$$

Beispiel 13.9 Bestimme die Inverse von A und löse das folgende LGS 183360

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} \odot \vec{x} = \begin{pmatrix}12\\ 8\\ -6\end{pmatrix}$$

Beispiel 13.10 Matrix-Inverse **536550**

Lösen Sie das folgende *inhomogenen* linearen Gleichungssysteme durch Invertierung der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ mit dem Gauss-Jordan-Verfahren. Geben Sie $\mathbf{A}^{-1}$ an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.11 Eindeutigkeit der Lösung **820317**

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS) $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{c}$ genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.12 Eindeutigkeit der Lösung, **254537**

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.13 Inverse bestimmen **SSWSXV**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -4 & -6 \\ -8 & 5 & 7 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & b & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie a und b so, dass $\mathbf{B}$ die Inverse von $\mathbf{A}$ ist.

b) Lösen Sie mit den Resultaten von oben das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{cccc} x & +2y & -2z & = & 5 \\ 3x & +by & +z & = & 0 \\ -x & +y & -3z & = & a-1 \end{array} \right|$$

13.4 Kriterien für die Existenz der Inversen

Satz 13.1 Invertierbare lineare Abbildung

Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$. Dann ist sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbf{A}$ ist invertierbar
2. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
3. Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist n.
4. Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig, d.h. $\dim S(\mathbf{A}) = n$.
5. Die Zeilen von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig, d.h. $\dim Z(\mathbf{A}) = n$.
6. Die lineare Abbildung L ist bijektiv.
7. Für jedes $\vec{b}$ hat die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.
8. Die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
9. Der Kern von L besteht nur aus dem Nullvektor, d.h. $\dim \operatorname{Kern}(L) = 0$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Trifft eine der Aussagen aus dem vorhergehenden Satz zu, so existiert auch die inverse Abbildung $L^{-1}(\vec{x})$ und es gilt

$$L^{-1}(\vec{x}) = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{x}$$

.

Satz 13.2 Matrix einer injektiven Abbildung

Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$. Dann ist L injektiv genau dann, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Beispiel 13.14 Projektion Y9HXCF

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{T} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Bilder der Punkte unter der Abbildung L mit der Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 16x + 12y \\ 12x + 9y \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Inverse von $\mathbf{A}$.

c) Falls die Inverse nicht existiert, erklären Sie weshalb.

Lösung:

a) Die Bilder lauten

$$\vec{P}' = \vec{Q}' = \vec{R}' = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}, \vec{S}' = \vec{T}' = \vec{U}' = \begin{pmatrix} -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass verschiedene Bildpunkte gleich ausfallen.

b) Inversion von $\mathbf{A}$

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 16 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1/4 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{array}\right)$$

Hier kann die Elimination nicht weitergeführt werden, denn mit der zweiten Zeile $(0, 0)$ kann die 3 in der ersten Zeile nicht eliminiert werden. Die Inverse existiert nicht.

c) Wir haben oben gesehen, dass $\mathbf{A}$ die Wirkung hat

$$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \vec{P}'$$

und

$$\vec{S}, \vec{T}, \vec{U} \xrightarrow{\mathbf{A}} \vec{S}'$$

Die Umkehrfunktion müsst also zum Beispiel folgendes bewerkstelligen können

$$\vec{S}' = \begin{pmatrix} -100 \\ -75 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}^{-1}} \vec{S}, \vec{T}, \vec{U}$$

und das ist nicht möglich, denn das Matrix-Produkt $\mathbf{A}^{-1} \odot \vec{S}'$ erzeugt einen einzigen Punkt und nicht drei verschiedene.

Beispiel 13.15 Projektion auf eine Gerade **I8MWWY**

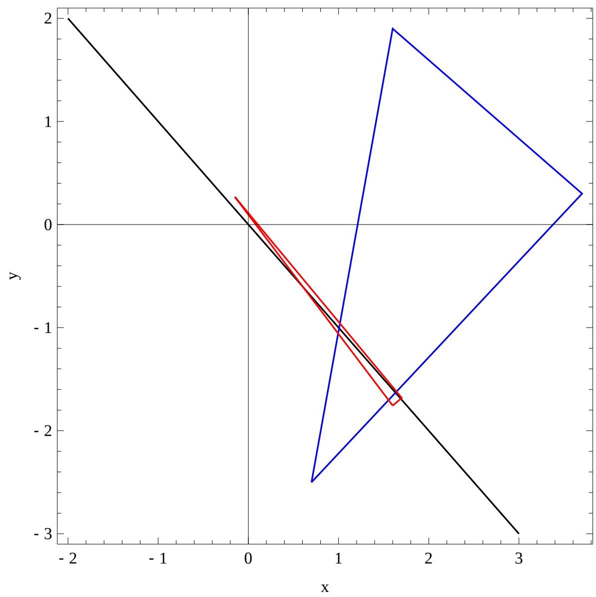
$$g: \ y = -x$$

a) Projezieren Sie den Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal auf g.

b) Wie lautet die Abbildung allgemein.

c) Bestimme die Projektions-Matrix

d) Bestimme die Inverse von $\mathbf{P}$.



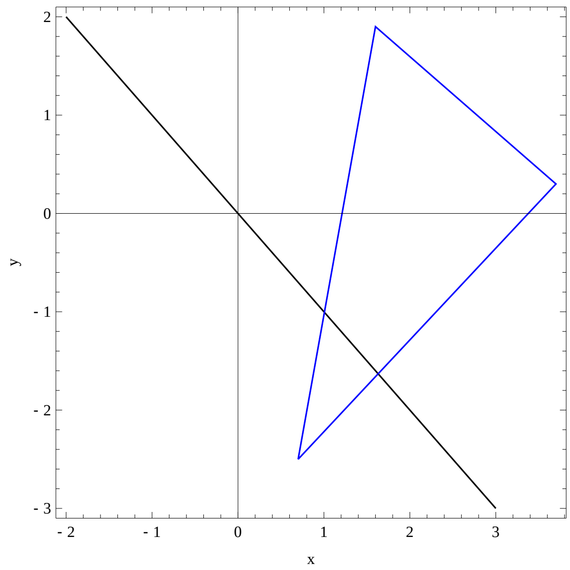
Beispiel 13.16 Fast eine Projektion **58II14**

a) Berechne die Bilder der Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -1.6 \\ 1.9 \end{pmatrix}$ unter der Abbildung

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Zeichne die Bildpunkte. Beschreibe das Bild des Dreiecks in Worten.

c) Invertiere $\mathbf{Q}$!



13.5 Injektiv, surjektiv und bijektiv Abbildungen

Definition 13.3 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

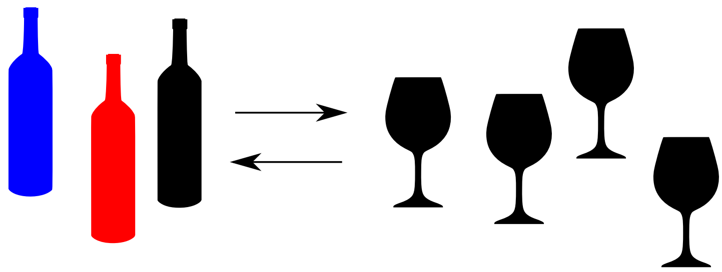
Sei L eine Abbildung[a] von D nach Z oder in Symbolen

$$L: \ D \mapsto Z \ .$$

- L heisst **injektiv**, falls für je zwei Elemente $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $L(x_1) \neq L(x_2)$.
- L heisst **surjektiv**, falls zu jedem $y \in Z$ mindestens ein $x \in D$ existiert mit $L(x) = y$.
- L heisst **bijektiv**, falls L injektiv und surjektiv ist.

[a] Das Wort Abbildung bedeutet bereits, dass jedem $x \in D$ ein $y \in Z$ zugeordnet wird.

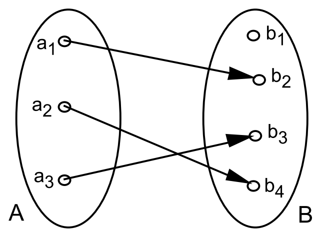
[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]



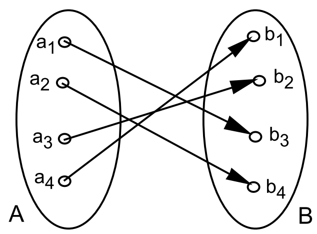
Wir können die Begriffe injektiv und surjektiv in einem Bild veranschaulichen. Wir betrachten die Flaschen $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ als Definitionismenge D und die gefüllten Gläser $L(x_1)$, $L(x_2)$, $L(x_3)$, $L(x_4)$ ... als Zielmenge. Injektiv bedeutet dann, dass verschiedene Flaschen nur in verschiedene Gläser geschüttet wurden (keine zwei Flaschen, wurden in das selbe Glas geschüttet). Und surjektiv bedeutet, dass es keine leeren Gläser gibt, nachdem eingeschenkt wurde.

Beispiel 13.17 Injektiv, surjektiv, bijektiv; **089077**

Beurteilen Sie welche Eigenschaften die aufgeführten Funktionen besitzen:



a)



b)

a) $f : x \in \mathbb{R}^- \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

b) $f : x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

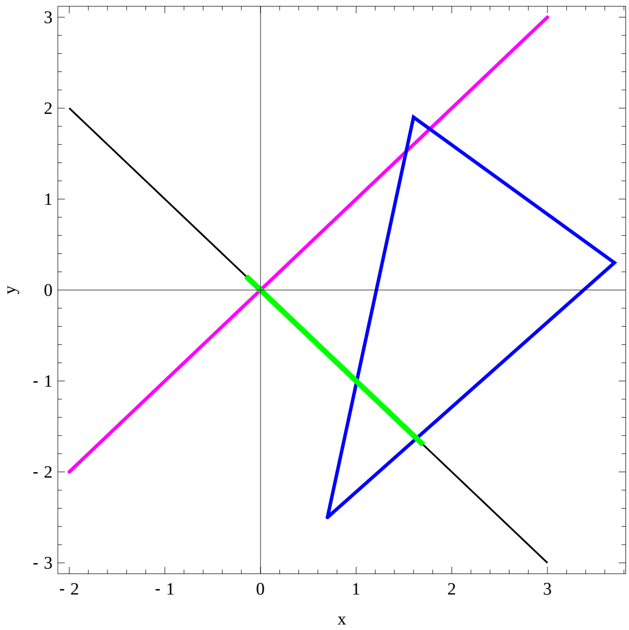


Abbildung 13.1: Bei der Projektion **P** wird die ganze violette Gerade auf den Ursprung abgebildet. Die Abbildung ist nicht injektiv. Deshalb gibt es keine Inverse.

Satz 13.3 Existenz der Umkehrabbildung

Ist $L : D \mapsto Z$ bijektiv, so existiert eine eindeutige Abbildung $L^{-1} : Z \mapsto D$, die jedem $y \in Z$ ein $x \in D$ zuordnet mit $L(x) = y$. Diese Abbildung heisst Umkehr-Abbildung von L und wird als L^{-1} geschrieben.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]

In Abb. 13.1 wird gezeigt, dass die Abbildung **Q** die Abstände zur Geraden $g : y = -1x$ nur kleiner macht. Die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird zwar geschrumpft wird, aber es wird nicht projiziert. Dann fallen durch die Abbildung **Q** keine weiteren Punkte auf die Gerade g ausser die, die schon darauf sind. Deshalb ist **Q** injektiv[1] und hat auch eine Inverse.

Infobox 13.2 Eigenschaften der Projektion

- Informationen über eine oder mehr Dimension(en) gehen verloren.
- Es gibt noch mehr Vektoren als $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abgebildet werden.
- Die Matrix, die eine Projektion enthält, erkennt man daran, dass die Spalten-Vektoren linear abhängig sind.

[1] surjektiv ist die Abbildung sowieso

Beispiel 13.18 Umkehrfunktion **081061**

Betrachten Sie die Funktion $f(x) : x \in \mathbb{R} \mapsto y \in \mathbb{R}$ mit $y = m \cdot x + q$ ($m, q \in \mathbb{R}$).

a) Bestimmen Sie für den Fall, dass f bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1}.

b) Bestimmen Sie, für welche Werte von m und q die Funktion f bijektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass die in b) bestimmte Funktion f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion von f ist, indem Sie nachprüfen, dass $f^{-1} \circ f = 1$ gilt.

Beispiel 13.19 Invertierbarkeit **980407**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der Determinante.

a) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -10 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ -7 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Beispiel 13.20 Invertierbarkeit **312846**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der linearen Abhängigkeit der Zeilen.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Definition 13.4 Kern einer Abbildung L, Nullraum einer Matrix $\mathbf{A}$

Wir betrachten alle $\vec{x}$, die über $L(\vec{x})$ auf $\vec{0}$ abgebildet werden:

$$L(\vec{x}) = \vec{0}\,.$$

Diese Vektoren heissen **Kern** von L.
Die Matrix $\mathbf{A}$ hat einen **Nullraum**. Es sind die Vektoren $\vec{x}$ für die gilt

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}\,.$$

Wir werden nicht unterscheiden zwischen einer linearen Abbildung L und der entsprechenden Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$. Deshalb werden wir auch vom *Kern einer Matrix* sprechen.

Matrizen mit $\text{Kern}(\mathbf{A}) \neq \vec{0}$ lassen sich nicht invertieren. Um dies zu verstehen, halten Sie sich vor Augen, dass eine Abbildung einem Element der Bildmenge nur *ein* Element der Definitionsmenge zuordnen darf, damit sie invertierbar bleibt.
Betrachten wir kurz den Fall, wo eine Abbildung zwei Elementen g_1 und g_2 das selbe Element h in der Bildmenge zuordnet. Bei der Umkehrabbildung ist nicht klar, ob h auf g_1 oder g_2 abgebildet werden soll. Deshalb existiert keine Umkehrabbildung. Siehe auch Beispiel 13.14.

Gibt es ausser $\vec{0}$ noch andere Vektoren, die auf $\vec{0}$ abgebildet werden, ist die Abbildung **A** nicht umkehrbar.
Um den Nullraum zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$. In der erweiterten Matrix-Form, braucht man die Nullen in der letzten Spalten nicht zu schreiben, da die Äquivalentransformationen dort stets wieder Nullen ergeben.

Beispiel 13.21 Invertierbarkeit, **465999**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Bestimmen Sie dazu den Kern der Abbildungen mit Zeilenoperationen, d.h. löse $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 13.22 Singuläre Matrix **1I13CG**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k-3 & -3 & k \\ 3 & k+2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme k, so dass **A** singulär[a] ist.

b) Bestimme die Werte von k, so dass **B** die Inverse von **A** ist.

c) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & i \end{pmatrix}$$

überführt werden. Benutze die Resultate von oben.

[a] singulär=hat keine Inverse

13.6 Weitere Sätze über die Inverse

Beispiel 13.23 Linksinverse, Rechtsinverse **285208**

Da die Matrizen nicht kommutativ sind, ergibt sich die Frage ob aus

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

auch folgt

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1} \ ?$$

Multiplizieren Sie dafür den ersten Ausdruck mit $\mathbf{A}^{-1}$ und benutzen Sie die Gesetze für die Matrixmultiplikation (Satz 9.3)

Aus diesen Überlegungen (Beispiel) folgt, dass die Matrix mit ihrer Matrix-Inversen immer kommutiert.

Infobox 13.3 Inverse für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dies gilt, falls **A** regulär ist, d.h. $\det(A) \neq 0$.

Beispiel 13.24 Inverse für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Invertieren Sie folgende Matrizen

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Infobox 13.4 Weitere Gesetze für die Inverse

Seien **A** und **B** regulär, dann gilt

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^\intercal)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\intercal$

Die Beweise für die Sätze finden sich in Beispiel 13.25.

Beispiel 13.25 Beweise für die Gesetze der Inversen **TPXL3B**

Wir betrachten reguläre die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

a) Finden Sie Argumente, weshalb $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{B}^{-1}$

c) Zeigen Sie, dass gilt
$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal} = (\mathbf{A}^{\intercal})^{-1}$$
Vorgehen:

i) Wir starten mit dem Ausdruck $\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$

ii) Transponieren auf beiden Seiten

iii) Benutze
$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{\intercal} = \mathbf{B}^{\intercal} \odot \mathbf{A}^{\intercal}$$
und vereinfache auf beiden Seiten

d) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck soweit wie möglich
$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{\intercal})^{-1}\, \mathbf{A} \odot (\mathbf{B}^{\intercal} \odot \mathbf{A})^{-1} \odot \left[\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal}\right]^{-1}$$

Beispiel 13.26 Formal auflösen **CTX1KQ**

Wir betrachten die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Löse Sie die Gleichungen formal nach $\mathbf{X}$ auf und geben Sie an, unter welcher Bedingung dies möglich ist.

a) $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

b) $3\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{B} \odot \mathbf{X}$

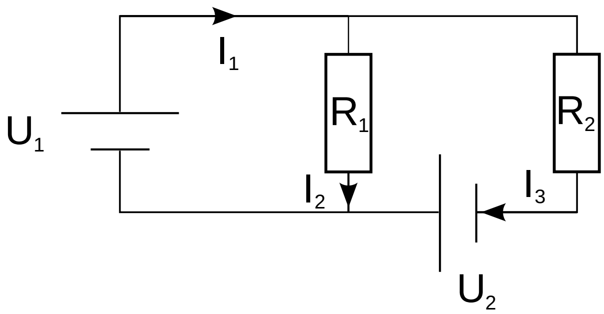
c) $(\mathbf{A} \odot \mathbf{X})^{\intercal} = 4\mathbf{X}^{\intercal} \odot \mathbf{B} - 5\mathbf{C}$

d) $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{X} \odot \mathbf{B}$

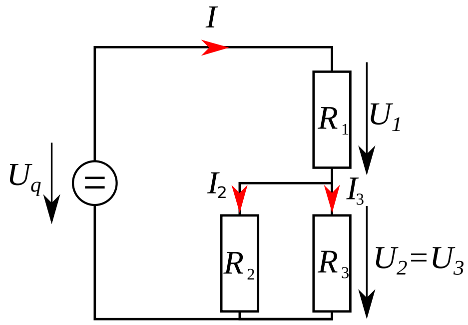
13.7 Maschenstromverfahren

Beispiel 13.27 Bestimme die Ströme I_1, I_2 und I_3 **117132**

Arbeite dabei mit der inversen Matrix. Rechnen Sie zunächst mit den bekannten Grössen $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 0.5\Omega$ und $U_1 = 1$ V und $U_2 = 2$ V. Rechnen Sie erst dann allgmein.



Beispiel 13.28 Netzwerkberechnung **99P61P**



Berechnen Sie die Grössen I, I_2, I_3, U_1 und U_2. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

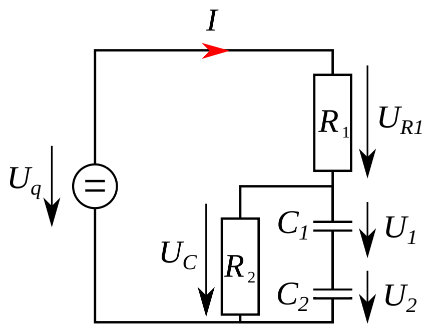
a) Benutzen Sie die Knotengleichung, die Maschenregel und drei Mal das Ohmsche Gesetz.

b) Stellen Sie ein LGS in der folgenden Form auf.

$$\mathbf{A} \odot \begin{pmatrix} I \\ I_2 \\ I_3 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \vec{c}\,,$$

c) Benutzen Sie Matlab für die Inversion der Matrix.

Beispiel 13.29 Netzmasche mit Widerständen und Kondensatoren **DNGTIO**



Berechnen Sie die Grössen I, U_C, U_{R1}, U_1 und U_2. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

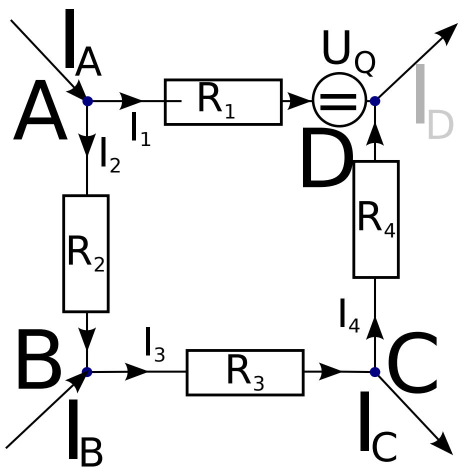
a) Benutzen Sie zwei Mal die Maschenregel, zwei Mal das Ohmsche Gesetz und die Ladungserhaltung.

b) Stellen Sie ein LGS in der folgenden Form auf.

$$\mathbf{A} \odot \begin{pmatrix} I \\ U_C \\ U_{R1} \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \vec{c}\,,$$

c) Benutzen Sie Matlab für die Inversion der Matrix.

Beispiel 13.30 Netzmasche **643107**



$$R_1 = 1\,\Omega,\ R_2 = 2\,\Omega,\ R_3 = 5\,\Omega,\ R_4 = 2\,\Omega,\ U_q = 19\,\mathrm{V},\ I_A = 2\,\mathrm{A},\ I_B = 1\,\mathrm{A},\ I_C = 1\,\mathrm{A}$$

Berechnen Sie die vier Zweigströme $I_1,\ I_2,\ I_3$ und I_4. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

a) Benutzen Sie dreimal die Knotengleichung und einmal die Maschengleichung.

b) Stellen Sie ein LGS in der folgenden Form auf.

$$\mathbf{A} \odot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \vec{c}\,,$$

c) Benutzen Sie Matlab für die Inversion der Matrix.

13.8 Knotenpotentialverfahren

Beispiel 13.31 Knotenpotentialverfahren **QINUXN**

$$G_1 = 0.2,\ G_2 = 0.8,\ G_3 = 0.84,\ I_1 = 1,\ I_2 = 1.2,\ I_3 = -2.4$$

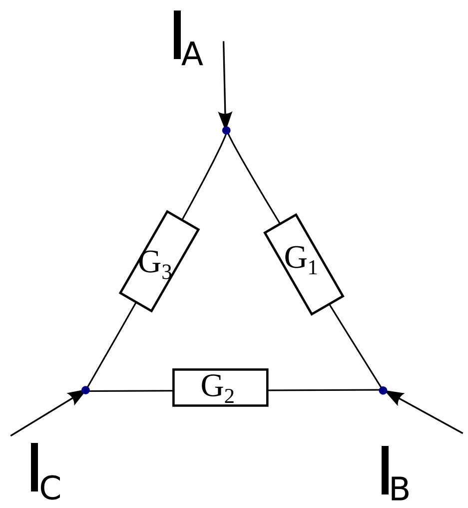
a) Knoten des Netzwerkes nummerieren + Bezugspfeile für Einströmungen einheitlich definieren (in das Netzwerk hinein)

b) Aufstellen der UAM: Eigenleitwerte der Knoten auf der Hauptdiagonalen, Koppelleitwerte zwischen den Knoten negativ eintragen

c) Einströmungsvektor aufstellen (positive Zählrichtung, für Bezugspfeil ins Netzwerk hinein)

d) Potenzialnullpunkt wählen und entsprechende Zeile und Spalte streichen ($V_3 = 0$).

e) Gleichungssystem numerisch lösen



13.9 Orthogonale Matrizen und ihre Inverse*

Definition 13.5 Orthogonale Matrix

Ein Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst orthogonal, wenn die Spaltenvektoren zueinander senkrecht stehen **und** normiert sind.

Achtung: Die Spalten einer ortho**gonalen** Matrix bilden eine ortho**normale** Basis!

Beispiel 13.32 $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal$ **ISWNQT**

Überprüfen Sie ob die Matrix $\mathbf{A}$ orthogonal ist. Berechnen Sie dann $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal$.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun das Produkt $\mathbf{A}^\intercal \odot \mathbf{A}$ für alle orthogonale Matrizen $\mathbf{A}$ berechnen. Dafür schreiben wir die Matrix mit Hilfe ihrer Spalten als

$$\mathbf{A} = \left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right]$$

Beim Transponieren verwandeln sich die Spalten in die Zeilen

$$\mathbf{A}^\intercal = \begin{pmatrix} \vec{A}_1^\intercal \\ \vec{A}_2^\intercal \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Wie in Matlab können wir durch die Transposition um einen Spaltenvektor in einen Zeilenvektor umwandeln! So ergibt das Produkt

$$\mathbf{A}^\intercal \odot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^\intercal \\ \vec{a}_2^\intercal \\ \ldots \end{pmatrix} \odot \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vdots\right] = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_1 & \vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_2 & \ldots \\ \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_1 & \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Die Spalten stehen senkrecht aufeinander, deshalb verschwinden alle Vektorprodukte ausserhalb der Diagonalen. Auf der Diagonalen bleiben Vektorprodukte der Form

$$\vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_1 = \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_2 = 1$$

Sie ergeben 1, weil die Vektoren normiert sind.

Satz 13.4 Das Inverse einer orthogonalen Matrix

Die Inverse der orthogonalen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\mathbf{A}^\intercal$.

13.10 Die inverse Matrix mit der Adjungierten*

Beispiel 13.33 Kofaktoren, **837230**

Zu jedem Matrix-Element $a_{i,j}$ einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ gehört ein Kofaktor $a_{m,n}$. Er ist wie folgt definiert

$$\operatorname{cof}(a_{m,n}) = (-1)^{m+n} \cdot \det(\mathbf{A}_{m,n})$$

Dabei entsteht die Matrix $\mathbf{A}_{m,n}$ durch streichen der $m-$ten Zeile und $n-$ten Spalte in $\mathbf{A}$.
Bestimme die Kofaktoren $\operatorname{cof}(a_{1,1})$ und $\operatorname{cof}(a_{2,3})$ der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Beispiel 13.34 Die Adjungierte, **237356**

Die Kofaktoren der Matrix $\mathbf{A}$ können wieder in Matrixform aufgeschrieben werden. Wird die Matrix der Kofaktoren transponiert, erhalten wir die Adjungierte Matrix

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \operatorname{cof}(a_{1,1}) & \dots & \operatorname{cof}(a_{1,n}) \\ & \dots & \\ \operatorname{cof}(a_{m,1}) & \dots & \operatorname{cof}(a_{m,n}) \end{pmatrix}^\intercal$$

Berechnen Sie die Adjungierte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Beispiel 13.35 Die inverse Matrix mit der Adjungierten **431045**

Mit Matrix-Inverse lässt sich mit der Adjungierten schnell berechnen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{A}) \ .$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ und die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$. Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie $\mathbf{A} \odot \operatorname{cof}(\mathbf{A})^\intercal$ berechnen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

Beispiel 13.36 Die inverse Matrix mit der Adjungierten **332409**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{F}$ und die Inverse $\mathbf{F}^{-1}$ mit Kofaktoren. Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie $\frac{1}{\det(\mathbf{F})} \cdot \mathbf{F} \odot \operatorname{cof}(\mathbf{F})^\intercal$ berechnen.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix} \ .$$

Beispiel 13.37 Inverse mit der Adjungierten **246885**

Berechnen Sie die Inverse der Rotations-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Adjungierten.

Übrigens:

Die Inversion mit der Adjungierten ist auf aufwändig, weil die Berechnung der Determinanten aufwändig ist. Deshalb wird sie nur bei kleinen Matrizen angewandt oder bei Problemen mit (vielen) Parametern. Das Beispiel hier ist also eine *typische* Anwendung.