KAPITEL 13

Umkehrabbildung und inverse Matrix

13.1 Definitionen

Definition 13.1 Matrix-Inverse

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix. Existiert eine Matrix $\mathbf{B}$ so, dass gilt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbb{1}$$

so nennt man $\mathbf{A}$ invertierbar und die Matrix $\mathbf{B}$ die Matrix-Inverse von $\mathbf{A}$.

Im Weiteren schreiben wir $\mathbf{A}^{-1}$ für die Matrix-Inverse von $\mathbf{A}$ und nicht wie oben $\mathbf{B}$, d.h. wir schreiben

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nennt man auch die inverse Matrix von $\mathbf{A}$.

Definition 13.2 Reguläre Matrizen und LGS

Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst **regulär**, falls $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.
Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst **singulär**, falls die Inverse nicht existiert.
Eine LGS $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ heisst **regulär**, falls $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

13.2 Die inverse Matrix bestimmen

Beispiel 13.1 LGS lösen mit Gauss-Jordan **443930**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}$$

Schreibe das Gleichungssystem zuerst als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Wende dann das Gauss-Jordan Verfahren an.

Lösung:

Zuerst das Gauss Verfahren:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & -10 & 41 & 103 \end{array}\right] \to \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Mit der Zeilen-Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 + 10\mathbf{A}_2)$$

Dann zusätzliche Schritte für Gauss-Jordan:

$$\mathbf{A}'' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{A}''' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

mit den Zeilen-Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2; \mathbf{A}'_2; \mathbf{A}'_3) \\ \mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 + 3\mathbf{A}''_3; \mathbf{A}''_2 + 4\mathbf{A}''_3; \mathbf{A}''_3) \end{aligned}$$

Die Lösung kann jetzt direkt abgelesen werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das Gauss-Jordan Verfahren wird in Matlab mit `rref` aufgerufen. Wird es benutzt um LGSs in erweiterter Koeffizienten-Form zu lösen — wie hier in diesem Beispiel — ist es das flexibelste Instrument um LGSs zu lösen. Also: Immer `rref` verwenden, wenn ein LGS mit Matlab gelöst werden soll.

Beispiel 13.2 Die Inverse bestimmen. **332829**

Bestimme die Matrix-Inverse von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix}$ mit dem Gauss-Jordan Verfahren. Überprüfe das Resultat.

Lösung:

$$\begin{array}{rcc|cl}
\mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = \mathbb{1} \\
& \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \\
& \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 30 & 6 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \\
\mathbb{1} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & = \mathbf{A}^{-1}
\end{array}$$

Die Zeilen-Umformungen sind:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2) \\
\mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1 + 6\mathbf{A}'_3; \mathbf{A}'_2 - 2\mathbf{A}'_3; \mathbf{A}'_3) \\
\mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 + 2\mathbf{A}''_2; \mathbf{A}''_2; \mathbf{A}''_3)
\end{aligned}$$

Kontrolle: Die Matrix-Inverse wurde richtig berechnet, denn es gilt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1} \ .$$

Beispiel 13.3 LGS lösen mit Gauss-Jordan **VTDGZN**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}$$

a) Wende das Gauss-Jordan-Verfahren an um die Inverse $\mathbf{B}^{-1}$ zu berechnen. Kontrolle:
$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 31 & 3 \\ 0 & 41 & 4 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Überprüfe, ob $\mathbf{B}^{-1}$ die Inverse von $\mathbf{B}$ ist, indem du $\mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{B}$ berechnest.

c) Berechne $\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b}$. Was stellst du fest, wenn du mit der Lösung von Beispiel 13.1 vergleichst?

Lösung:

a) Gauss-Jordan-Verfahren:

$$
\begin{array}{rcc|cr}
\mathbf{B} = & \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & -10 & 41\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & = \mathbb{1}\\
& \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 10 & 1\end{pmatrix} & \\
& \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1 & -10 & -1\\ 0 & 41 & 4\\ 0 & 10 & 1\end{pmatrix} & \\
\mathbb{1} = & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1 & 31 & 3\\ 0 & 41 & 4\\ 0 & 10 & 1\end{pmatrix} & = \mathbf{B}^{-1}
\end{array}
$$

Vorgehen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}^{\mathrm{i}} &= (\mathbf{B}_1;\ \mathbf{B}_2;\ \mathbf{B}_3 + 10\mathbf{B}_2)\\
\mathbf{B}^{\mathrm{ii}} &= (\mathbf{B}^{\mathrm{i}}_1 - \mathbf{B}^{\mathrm{i}}_3;\ \mathbf{B}^{\mathrm{i}}_2 + 4\mathbf{B}^{\mathrm{i}}_3;\ \mathbf{B}^{\mathrm{i}}_3)\\
\mathbf{B}^{\mathrm{iii}} &= (\mathbf{B}^{\mathrm{ii}}_1 + \mathbf{B}^{\mathrm{ii}}_2;\ \mathbf{B}^{\mathrm{ii}}_2;\ \mathbf{B}^{\mathrm{ii}}_3)
\end{aligned}
$$

b) Test:

$$\mathbf{B} \odot \mathbf{B}^{-1} = \mathbb{1}\ .$$

c) Wir berechnen

$$\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

Wir erhalten auch so die Lösung des LGS.

Beispiel 13.4 LGS lösen mit Gauss-Jordan **WSCFYM**

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 3 & -5 & 0\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}} \odot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}$$

a) Schreibe das LGS als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Löse das LGS mit dem *Gauss-Verfahren*.

b) Wende dann das Gauss-Jordan-Verfahren an um die Inverse $\mathbf{B}^{-1}$ zu berechnen. Kontrolle:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -13 & -15 \\ -3 & -8 & -9 \\ -3 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

c) Überprüfe, ob $\mathbf{B}^{-1}$ die Inverse von $\mathbf{B}$ ist, indem du $\mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{B}$ berechnest.

d) Berechne $\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b}$. Was stellst du fest?

Lösung:

a) Das Gauss Verfahren:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \mathbf{B}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & -7 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \mathbf{B}'' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Mit den *Zeilen*-Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= (\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_2 - 3\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_3 + 3\mathbf{B}_1) \\ \mathbf{B}'' &= (\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_2; \mathbf{B}_3 + \frac{7}{8} \cdot \mathbf{B}_1) \end{aligned}$$

Einsetzen von unten nach oben ergibt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Gauss-Jordan-Verfahren:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \Bigg| & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 9 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix} & \Bigg| & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} & \Bigg| & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{8} & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Bigg| & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & -8 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Bigg| & \begin{pmatrix} -8 & -21 & -24 \\ 24 & 64 & 72 \\ -3 & -7 & -8 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Bigg| & \begin{pmatrix} -5 & -13 & -15 \\ 24 & 64 & 72 \\ -3 & -7 & -8 \end{pmatrix} \\
\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Bigg| & \begin{pmatrix} -5 & -13 & -15 \\ -3 & -8 & -9 \\ -3 & -7 & -8 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}
\end{array}
$$

Schritte des Gauss-Verfahrens wie oben. Danach:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}''' &= (\mathbf{B}''_1; \mathbf{B}''_2; \mathbf{B}''_3 \cdot \frac{1}{8}) \\
\mathbf{B}^{\text{iv}} &= (\mathbf{B}'''_1 + 3\mathbf{B}'''_3; \mathbf{B}'''_2 - 9\mathbf{B}'''_3; \mathbf{B}'''_3) \\
\mathbf{B}^{\text{v}} &= (\mathbf{B}^{\text{iv}}_1 + \frac{1}{8} \cdot \mathbf{B}^{\text{iv}}_2; \mathbf{B}^{\text{iv}}_2; \mathbf{B}^{\text{iv}}_3) \\
\mathbf{B}^{\text{vi}} &= (\mathbf{B}^{\text{v}}_1; \mathbf{B}^{\text{v}}_2 \cdot \frac{(-1)}{8}; \mathbf{B}^{\text{v}}_3)
\end{aligned}
$$

c) Test:

$$\mathbf{B} \odot \mathbf{B}^{-1} = \mathbb{1}\ .$$

d) Wir berechnen

$$\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten auch so die Lösung des LGS.

Beim Invertieren einer Matrix mit dem Gauss-Jordan Verfahren, werden die Umformungen auf die Einheitsmatrix angewendet. So werden die Zeilenumformungen auf der rechten Seite in der Einheitsmatrix "zwischengespeichert".
Betrachten wir dazu eine Umformungen aus den vorherigen Beispiels: Beim ersten Schritt

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2)$$

Entsteht auf der rechten Seite die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie speichert die Umformung "3. Zeile plus 5 mal die 2. Zeile".

Beispiel 13.5 Berechne das Produkt P $\odot$ M. **657484**

$$\mathbf{P} \odot \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 1 & 2 & 3 \\ 100 & 200 & 300 \end{pmatrix}$$

Beschreibe den Effekt von **P** auf M in Worten.

Lösung:

$$\mathbf{P} \odot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 1 & 2 & 3 \\ 105 & 210 & 315 \end{pmatrix} .$$

In Worten: Zur dritten Zeile wir 5 mal die zweite Zeile addiert.

Diese Überlegungen können wir für alle Äquivalenzumformungen machen: Welche Umformungen angewendet wurden auf der linken Seite, das wird auf der rechten Seite gespeichert. Deshalb "enthält" am Schluss die Matrix auf der rechten Seite ($\mathbf{A}^{-1}$) alle Umformungen um die ursprüngliche Matrix in die Einheitsmatrix umzuformen, deshalb gilt dann

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Infobox 13.1 Zulässige Umformungen Gauss-Jordan-Verfahren

- das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren
- eine Zeile mit einer Zahl multiplizieren
- Zeilen vertauschen

Es sind die selben Umformungen wie beim Gauss-Verfahren (Definition 8.3 und Infobox 8.2), nur werden diese Schritte noch weiter ausgeführt, bis die Eins-Matrix $\mathbb{1}$ erzeugt wird.

Beispiel 13.6 Elementare Zeilenumformungen **CEPCBK**

Forme das System $[\mathbf{A}|\mathbb{1}]$ mit elementaren Zeilenumformungen in das System $[\mathbb{1}|\mathbf{B}]$ um. Wie verhalten sich **A** und **B** zueinander?

a) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Lösung:

a) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{16}{13} & -\frac{19}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{11}{13} & -\frac{9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{12}{13} & \frac{11}{13} \end{array}\right]$

Für **A** und **B** gilt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbb{1} \text{ und } \mathbf{B} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Die eine ist also Inverse der anderen Matrix.

13.3 Ein reguläres LGS lösen mit A^{-1}

Inverse Matrizen erlaubt ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

wie folgt zu lösen. Wir multiplizieren von beiden Seiten $\mathbf{A}^{-1}$ von links, dann ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Gemäss Definition ist das Matrixprodukt auf der linken Seite gleich der Einheitsmatrix,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Da diese Matrix den Vektor $\vec{x}$ nicht verändert ($\mathbb{1} \odot \vec{x} = \vec{x}$), können wir sie weglassen und erhalten die Lösung

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}\ .$$

Beispiel 13.7 Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Inversen 786014

Berechne die Lösung $\vec{x}$ des LGS mit Hilfe der Inversen

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 33 & -10 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -1 & 11 \\ 61 & -3 & 32 \\ 83 & -4 & 43 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt:

$$\mathbf{A} \odot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b}$$

Also

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Erklärungen zu diesem Thema sind auch in [Papula, 2009, Bd. 2 I 5.5, p. 93] zu finden.

Beispiel 13.8 Gleichungssysteme lösen mit der Inversen **PDCPA1**

Bei allen Aufgaben ist die Inverse der Koeffizientenmatrix gegeben. Lösen Sie die LGSs. Betrachten Sie am Schluss die Aufgaben b) und e) noch einmal. Was stellen Sie fest?

a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left| \begin{array}{rrcr} -2x & -2y & = & 0 \\ -3x & -y & = & 0 \end{array} \right| \text{ und } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -14 & 6 \\ 1 & -19 & 5 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{C}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -66 \\ -78 \\ 18 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 71 & -50 & 44 \\ 34 & -24 & 21 \\ 115 & -81 & 71 \end{pmatrix}$$

d)

$$\left| \begin{array}{rrrcr} -1 & 5 & 1 & = & 55 \\ 0 & 149 & 5 & = & 1267 \\ 5 & 154 & 1 & = & 1247 \end{array} \right| \text{ und } \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} -621 & 149 & -124 \\ 25 & -6 & 5 \\ -745 & 179 & -149 \end{pmatrix}$$

e)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & 11 & 9 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{E}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} -8. & 8.5 & 0.5 \\ -8.5 & 8.75 & 0.75 \\ 9.5 & -9.75 & -0.75 \end{pmatrix}$$

f)

$$\left| \begin{array}{rrrcr} 8 & 0 & -1 & = & 5 \\ -3 & 6 & -2.5 & = & 43.5 \\ 4 & -1 & 0 & = & -5 \end{array} \right| \text{ und } \mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} -2.5 & 1 & 6 \\ -10 & 4 & 23 \\ -21 & 8 & 48 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir berechnen die Lösung, indem wir die Inverse mit der Inhomogenität $\vec{b}$ multiplizieren. Wir erhalten:

a)

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.75 & 0.5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbf{C}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d)

$$\mathbf{D}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

e)

$$\mathbf{E}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f)

$$\mathbf{F}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bei den Aufgaben b) und e) sehen wir: In einem regulären LGS mit der Inhomogenität $\vec{0}$ gibt es nur eine Lösung und die ist $\vec{0}$.

Beispiel 13.9 Bestimme die Inverse von A und löse das folgende LGS **183360**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) = (\mathbb{1}|\mathbf{A}^{-1})$$

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.10 Matrix-Inverse **536550**

Lösen Sie das folgende *inhomogenen* linearen Gleichungssysteme durch Invertierung der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ mit dem Gauss-Jordan-Verfahren. Geben Sie $\mathbf{A}^{-1}$ an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnen wir durch gleichzeitiges Anwenden von

Äquivalenztransformationen auf $\mathbf{A}^{-1}$ und auf $\mathbb{1}$:

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) = (\mathbb{1}|\mathbf{A}^{-1})$$

Die Transformationen sind (hier wird folgende Notation verwendet: $\mathbf{A}_i$ ist die i-te *Zeile*)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 - 2\mathbf{A}_1) \\ \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2/3, \mathbf{A}'_3 - \mathbf{A}'_2/3) \\ \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{A}''_1 + \mathbf{A}''_3/4, \mathbf{A}''_2 + \mathbf{A}''_3/4, -\mathbf{A}''_3/4) \end{aligned}$$

Die Lösung erhalten wir aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Beispiel 13.11 Eindeutigkeit der Lösung **820317**

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS) $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{c}$ genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem besitzt genau eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix invertierbar ist, d.h. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Die Determinante ist (Regel von Sarrus):

$$\det(\mathbf{A}) = 12 - 2\lambda + 0 + 4 + 2(1-\lambda) + 0 = 18 - 4\lambda .$$

Aus der Bedingung $\det(\mathbf{A}) = 18 - 4\lambda \neq 0$ folgt $\lambda \neq \frac{9}{2}$. Das LGS besitzt eine Lösung, wenn λ von $\frac{9}{2}$ verschieden ist.

Beispiel 13.12 Eindeutigkeit der Lösung, **254537**

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung

Die Lösung existiert und sie ist eindeutig, wenn die Determinante der Koeffizienten-Matrix $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ erfüllt. Hier ist (Regel von Sarrus):

$$\det(\mathbf{A}) = -3\lambda - 2\lambda + 0 + 2\lambda - 1 + \lambda + 0 = -1 - 2\lambda$$

und die Lösung ist für alle $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ eindeutig.

Beispiel 13.13 Inverse bestimmen **SSWSXV**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -4 & -6 \\ -8 & 5 & 7 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & b & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie a und b so, dass $\mathbf{B}$ die Inverse von $\mathbf{A}$ ist.

b) Lösen Sie mit den Resultaten von oben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} x & +2y & -2z & = & 5 \\ 3x & +by & +z & = & 0 \\ -x & +y & -3z & = & a-1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Wir multiplizieren die Matrizen und erhalten

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a-6 & 2a-4b-6 & 14-2a \\ 0 & 5b-9 & 0 \\ 0 & 3b-6 & 1 \end{pmatrix}$$

Falls die eine Matrix die Inverse der anderen ist, sollte $\mathbf{C} = \mathbb{1}$ und

$$\begin{array}{rcl} a-6 & = & 1 \\ 3b-6 & = & 0 \end{array}.$$

Daraus folgt $a = 7$ und $b = 2$.
Wir stellen fest, dass das angegebene LGS die Koeffizeitnenmatrix $\mathbf{B}$ ergibt. Wir benutzen ihre Inverse $\mathbf{A}$, um das LGS zu lösen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

13.4 Kriterien für die Existenz der Inversen

Satz 13.1 Invertierbare lineare Abbildung

Sei $L:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$. Dann ist sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbf{A}$ ist invertierbar
2. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
3. Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist n.
4. Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig, d.h. $\dim S(\mathbf{A}) = n$.
5. Die Zeilen von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig, d.h. $\dim Z(\mathbf{A}) = n$.
6. Die lineare Abbildung L ist bijektiv.
7. Für jedes $\vec{b}$ hat die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.
8. Die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
9. Der Kern von L besteht nur aus dem Nullvektor, d.h. $\dim \mathrm{Kern}(L) = 0$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Trifft eine der Aussagen aus dem vorhergehenden Satz zu, so existiert auch die inverse Abbildung $L^{-1}(\vec{x})$ und es gilt

$$L^{-1}(\vec{x}) = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{x}$$

.

Satz 13.2 Matrix einer injektiven Abbildung

Sei $L:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$. Dann ist L injektiv genau dann, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Beispiel 13.14 Projektion **Y9HXCF**

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{T} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Bilder der Punkte unter der Abbildung L mit der Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} 16x + 12y \\ 12x + 9y \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Inverse von $\mathbf{A}$.

c) Falls die Inverse nicht existiert, erklären Sie weshalb.

Lösung:

a) Die Bilder lauten

$$\vec{P}' = \vec{Q}' = \vec{R}' = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}, \vec{S}' = \vec{T}' = \vec{U}' = \begin{pmatrix} -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass verschiedene Bildpunkte gleich ausfallen.

b) Inversion von **A**

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 16 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1/4 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{array}\right)$$

Hier kann die Elimination nicht weitergeführt werden, denn mit der zweiten Zeile $(0, 0)$ kann die 3 in der ersten Zeile nicht eliminiert werden. Die Inverse existiert nicht.

c) Wir haben oben gesehen, dass **A** die Wirkung hat

$$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \vec{P}'$$

und

$$\vec{S}, \vec{T}, \vec{U} \xrightarrow{\mathbf{A}} \vec{S}'$$

Die Umkehrfunktion müsst also zum Beispiel folgendes bewerkstelligen können

$$\vec{S}' = \begin{pmatrix} -100 \\ -75 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}^{-1}} \vec{S}, \vec{T}, \vec{U}$$

und das ist nicht möglich, denn das Matrix-Produkt $\mathbf{A}^{-1} \odot \vec{S}'$ erzeugt einen einzigen Punkt und nicht drei verschiedene.

Beispiel 13.15 Projektion auf eine Gerade **I8MWWY**

$$g: \ y = -x$$

a) Projezieren Sie den Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal auf g.

b) Wie lautet die Abbildung allgemein.

c) Bestimme die Projektions-Matrix

d) Bestimme die Inverse von **P**.

Lösung:

Die Gerade hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also ist wird der Punkt wie folgt projeziert:

$$\vec{P}' = \frac{\vec{P} \odot \vec{v}}{\vec{v} \odot \vec{v}} \cdot \vec{v} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung lautet allgemein

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \odot \vec{v}}{\vec{v} \odot \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

oder

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}$$

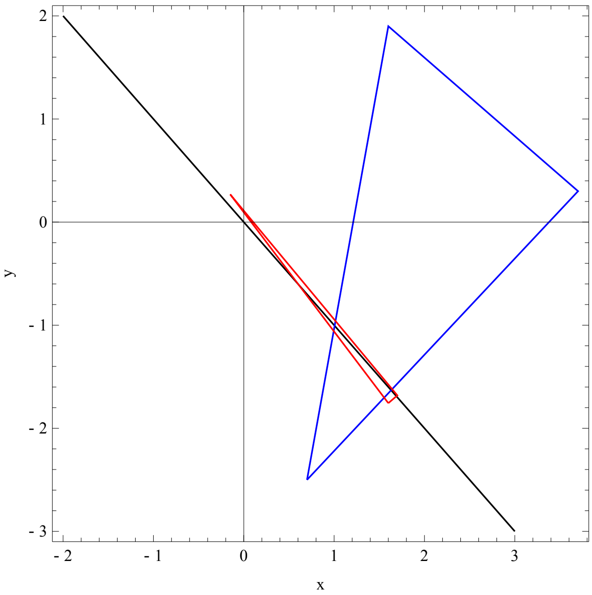
Die beiden Spalten der Projektionsmatrix ergeben sich aus den Bildern der Basisvektoren unter der Projektion:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' = & \quad \vec{e}_1 - \vec{e}_1 \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2' = & \quad \vec{e}_2 - \vec{e}_2 \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix der Projektion ist also $\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Nun wenden wir das Gauss-Jordan-Verfahren an:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weiter kann nicht umgeformt werden. **P** hat keine Inverse.



Beispiel 13.16 Fast eine Projektion	**58II14**

a) Berechne die Bilder der Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -1.6 \\ 1.9 \end{pmatrix}$ unter der Abbildung

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Zeichne die Bildpunkte. Beschreibe das Bild des Dreiecks in Worten.

c) Invertiere **Q**!

Lösung:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbb{1} \\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -16 & 16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -16 & 16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 16 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \end{array}$$

Q ist keine perfekte Projektion, d.h. das Dreieck wird nicht vollständig auf die Gerade projiziert. Die zweidimensionale Information des Dreiecks bleibt erhalten.
Mit Hilfe von $\mathbf{Q}^{-1}$ kann das Dreieck wieder rekonstruiert werden. Das ist nicht möglich bei einer perfekten Projektion, wie in der vorherigen Aufgabe.

13.5 Injektiv, surjektiv und bijektiv Abbildungen

Definition 13.3 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

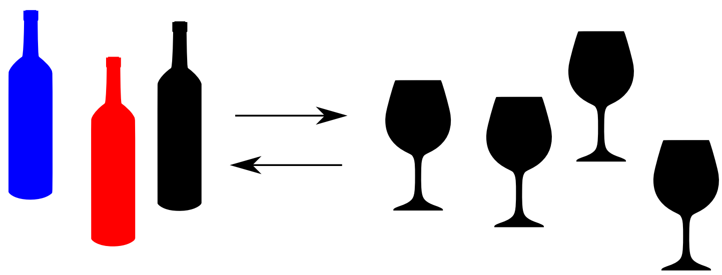
Sei L eine Abbildung[a] von D nach Z oder in Symbolen

$$L:\ D \mapsto Z\,.$$

- L heisst **injektiv**, falls für je zwei Elemente $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $L(x_1) \neq L(x_2)$.
- L heisst **surjektiv**, falls zu jedem $y \in Z$ mindestens ein $x \in D$ existiert mit $L(x) = y$.
- L heisst **bijektiv**, falls L injektiv und surjektiv ist.

[a] Das Wort Abbildung bedeutet bereits, dass jedem $x \in D$ ein $y \in Z$ zugeordnet wird.

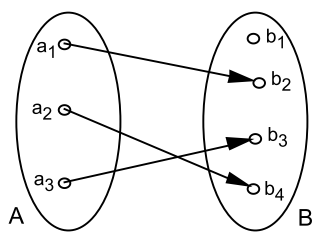
[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]



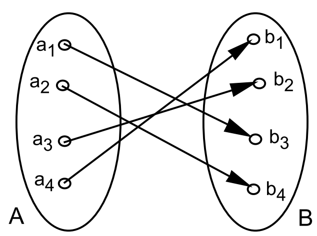
Wir können die Begriffe injektiv und surjektiv in einem Bild veranschaulichen. Wir betrachten die Flaschen $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ als Definitionismenge D und die gefüllten Gläser $L(x_1)$, $L(x_2)$, $L(x_3)$, $L(x_4)$ ... als Zielmenge. Injektiv bedeutet dann, dass verschiedene Flaschen nur in verschiedene Gläser geschüttet wurden (keine zwei Flaschen, wurden in das selbe Glas geschüttet). Und surjektiv bedeutet, dass es keine leeren Gläser gibt, nachdem eingeschenkt wurde.

Beispiel 13.17 Injektiv, surjektiv, bijektiv; 089077

Beurteilen Sie welche Eigenschaften die aufgeführten Funktionen besitzen:



a)



b)

a) $f: x \in \mathbb{R}^- \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

b) $f: x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

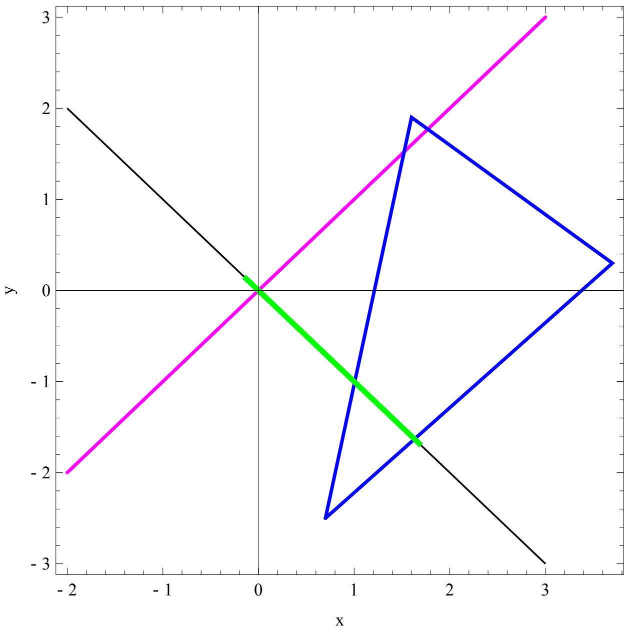


Abbildung 13.1: Bei der Projektion **P** wird die ganze violette Gerade auf den Ursprung abgebildet. Die Abbildung ist nicht injektiv. Deshalb gibt es keine Inverse.

Lösung

a) injektiv aber nicht surjektiv

b) bijektiv

c) bijektiv

d) surjektiv aber nicht injektiv

Satz 13.3 Existenz der Umkehrabbildung

Ist $L : D \mapsto Z$ bijektiv, so existiert eine eindeutige Abbildung $L^{-1} : Z \mapsto D$, die jedem $y \in Z$ ein $x \in D$ zuordnet mit $L(x) = y$. Diese Abbildung heisst Umkehr-Abbildung von L und wird als L^{-1} geschrieben.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]

In Abb. 13.1 wird gezeigt, dass die Abbildung **Q** die Abstände zur Geraden $g : y = -1x$ nur kleiner macht. Die Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ wird zwar geschrumpft wird, aber es wird nicht projiziert. Dann fallen durch die Abbildung **Q** keine weiteren Punkte auf die Gerade g ausser die, die schon darauf sind. Deshalb ist **Q** injektiv[1] und hat auch eine Inverse.

[1] surjektiv ist die Abbildung sowieso

Infobox 13.2 Eigenschaften der Projektion

- Informationen über eine oder mehr Dimension(en) gehen verloren.
- Es gibt noch mehr Vektoren als $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ die auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ abgebildet werden.
- Die Matrix, die eine Projektion enthält, erkennt man daran, dass die Spalten-Vektoren linear abhängig sind.

Beispiel 13.18 Umkehrfunktion **081061**

Betrachten Sie die Funktion $f(x) : x \in \mathbb{R} \mapsto y \in \mathbb{R}$ mit $y = m \cdot x + q$ ($m, q \in \mathbb{R}$).

a) Bestimmen Sie für den Fall, dass f bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1}.

b) Bestimmen Sie, für welche Werte von m und q die Funktion f bijektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass die in b) bestimmte Funktion f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion von f ist, indem Sie nachprüfen, dass $f^{-1} \circ f = 1$ gilt.

Lösung

a) Die Umkehrfunktion berechnet sich durch Vertauschung der Namen der Variablen x und y

$$x = m \cdot y + q$$

und Auflösen nach y:

$$\begin{array}{rcl|l} x & = & m \cdot y + q & -q \\ x - q & = & m \cdot y & : m \\ \frac{x-q}{m} & = & y & \end{array}$$

Die Umkehrfunktion ist also $y = \frac{x-q}{m}$.

b) Der letzte Schritt der Auflösung funktioniert nur, falls $m \neq 0$. Deshalb ist f für alle q, aber nur für $m \neq 0$ bijektiv.

c) $f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(m \cdot x + q) = \frac{(mx+q)-q}{m} = x$

Beispiel 13.19 Invertierbarkeit **980407**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der Determinante.

a) $\begin{pmatrix}3 & -3\\4 & -4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\2 & -2 & 3\\2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-10 & -5 & 2 & -6\\4 & 3 & -1 & 5\\1 & -1 & 0 & -4\\-7 & -4 & 0 & -4\end{pmatrix}$

Lösung

Falls $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ lässt sich eine Matrix invertieren. Die Determinanten sind hier:

a) $\det(\mathbf{A}) = 0$ b) $\det(\mathbf{B}) = -18$ c) $\det(\mathbf{C}) = 12$

Beispiel 13.20 Invertierbarkeit **312846**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der linearen Abhängigkeit der Zeilen.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

Matrizen mit linear abhängigen Zeilen lassen sich nicht invertieren. Wir notieren die i-te Zeile der Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A}_i$.

a) Die beiden Zeilen sind linear abhängig, also lässt sich $\mathbf{A}$ nicht invertieren.

b) Mit der Umformung

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3 - 2/3\mathbf{B}_1)$$

ergibt sich die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{B}'_2$ und $\mathbf{B}'_3$ sind linear abhängig, also lässt sich $\mathbf{B}$ nicht invertieren.

c) Mit der Umformung

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3 - 2 \cdot \mathbf{C}_1)$$

ergibt sich die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Die weitere Umformung

$$\mathbf{C}'' = (\mathbf{C}'_1, \frac{1}{2} \cdot \mathbf{C}'_2, \mathbf{C}'_3 - \frac{3}{2} \cdot \mathbf{C}'_2)$$

führt auf die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Das ist eine obere Dreiecksmatrix, in der die Zeilen (oder Spalten) immer linear unabhängig sind. Also lässt sich $\mathbf{C}$ invertieren.

d) Mit den Umformung

$$\mathbf{D}' = (\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4)$$

$$\mathbf{D}'' = (\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2 - 5\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_3 - 6\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_4 + 4\mathbf{D}'_1)$$

$$\mathbf{D}''' = (\mathbf{D}''_1, \mathbf{D}''_2 - \mathbf{D}''_3, \mathbf{D}''_3, \mathbf{D}''_4 + \mathbf{D}''_3)$$

$$\mathbf{D}'''' = (\mathbf{D}'''_1, \mathbf{D}'''_2/3, \mathbf{D}'''_3/17 + \mathbf{D}'''_2/3, \mathbf{D}'''_4 + 3\mathbf{D}'''_2)$$

ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D}'' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -6 & -6 \\ 0 & -17 & -8 & -8 \\ 0 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}''' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -17 & -8 & -8 \\ 0 & -9 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{D}'''' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{51} & \frac{10}{51} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{D}''''_3$ und $\mathbf{D}''''_4$ sind linear abhängig, also lässt sich $\mathbf{C}$ nicht invertieren.

Definition 13.4 Kern einer Abbildung L, Nullraum einer Matrix $\mathbf{A}$

Wir betrachten alle $\vec{x}$, die über $L(\vec{x})$ auf $\vec{0}$ abgebildet werden:

$$L(\vec{x}) = \vec{0}\,.$$

Diese Vektoren heissen **Kern** von L.
Die Matrix $\mathbf{A}$ hat einen **Nullraum**. Es sind die Vektoren $\vec{x}$ für die gilt

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}\,.$$

Wir werden nicht unterscheiden zwischen einer linearen Abbildung L und der entsprechenden Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$. Deshalb werden wir auch vom *Kern einer Matrix* sprechen.

Matrizen mit $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \neq \vec{0}$ lassen sich nicht invertieren. Um dies zu verstehen, halten Sie sich vor Augen, dass eine Abbildung einem Element der Bildmenge nur *ein* Element der Definitionsmenge zuordnen darf, damit sie invertierbar bleibt.
Betrachten wir kurz den Fall, wo eine Abbildung zwei Elementen g_1 und g_2 das selbe Element h in der Bildmenge zuordnet. Bei der Umkehrabbildung ist nicht klar, ob h auf g_1 oder g_2 abgebildet werden soll. Deshalb existiert keine Umkehrabbildung. Siehe auch Beispiel 13.14.
Gibt es ausser $\vec{0}$ noch andere Vektoren, die auf $\vec{0}$ abgebildet werden, ist die Abbildung $\mathbf{A}$ nicht umkehrbar.
Um den Nullraum zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$. In der erweiterten Matrix-Form, braucht man die Nullen in der letzten Spalten nicht zu schreiben, da die Äquivalentransformationen dort stets wieder Nullen ergeben.

Beispiel 13.21 Invertierbarkeit, **465999**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Bestimmen Sie dazu den Kern der Abbildungen mit Zeilenoperationen, d.h. löse $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

Wir notieren die i-te *Spalte* der Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A}_i$.

a) Mit den Umformungen

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)$$

ergibt sich die Matrix

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie bildet keinen anderen Vektor ausser $\vec{0}$ auf $\vec{0}$ ab. Der Kern ist also $\vec{0}$. Deshalb lässt sich $\mathbf{A}$ invertieren.

b) Die erste Spalte ist gleich 0, also ist der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Kern und $\mathbf{B}$ lässt sich nicht invertieren.

c) Mit den Umformungen

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_2 + 4\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_1 - 7\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4 - 2\mathbf{C}_3);\; \mathbf{C}'' = (\mathbf{C}'_1, \mathbf{C}'_2, \mathbf{C}'_3, \mathbf{C}'_4 + 3\mathbf{C}'_2)$$

ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Zeile in $\mathbf{C}''$ folgt, dass x_4 und damit auch x_1, x_2, x_3 gleich 0 sind. Deshalb ist nur $\vec{0}$ im Kern von $\mathbf{C}$ und die Matrix lässt sich invertieren.

Beispiel 13.22 Singuläre Matrix **1I13CG**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k-3 & -3 & k \\ 3 & k+2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme k, so dass $\mathbf{A}$ singulär[a] ist.

b) Bestimme die Werte von k, so dass $\mathbf{B}$ die Inverse von $\mathbf{A}$ ist.

c) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & i \end{pmatrix}$$

überführt werden. Benutze die Resultate von oben.

Lösung:

a) $\mathbf{A}$ ist singulär, falls $\det(\mathbf{A}) = 0$. Wir berechnen

$$\det(\mathbf{A}) = -4 + k + 2k^2 = 0$$

mit den Lösungen $k = \frac{1}{4} \cdot (-1 \pm \sqrt{41})$.

b) Falls die eine Matrix die Inverse der anderen ist, sollte $\mathbf{C} = \mathbb{1}$. Wir multiplizieren die Matrizen und erhalten

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k-2(k-1) & -4(k-1)+k-1 & 2k-2 \\ (k-3)k+2 & 4-3k & k^2-1 \\ 6(k-3)+12 & 2(k+2)-6 & 6k-5 \end{pmatrix}.$$

Das Element $c_{1,1}$ sollte 1 sein, daraus folgt $k - 2(k-1) = 1$ und $k = 1$.

c) Die Angaben bedeuten, dass die Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

die Inverse von $\mathbf{A}$ ist.

[a] singulär=hat keine Inverse

13.6 Weitere Sätze über die Inverse

Beispiel 13.23 Linksinverse, Rechtsinverse **285208**

Da die Matrizen nicht kommutativ sind, ergibt sich die Frage ob aus

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

auch folgt

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}\ ?$$

Multiplizieren Sie dafür den ersten Ausdruck mit $\mathbf{A}^{-1}$ und benutzen Sie die Gesetze für die Matrixmultiplikation (Satz 9.3)

Lösung:

Wir multiplizieren den ersten Ausdruck von links mit $\mathbf{A}^{-1}$. Es ergibt sich

$$\mathbf{A}^{-1} \odot (\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1}) = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbb{1}}_{=\mathbf{A}^{-1}}$$

Wir wissen, die Matrixmultiplikation ist assoziativ. Deshalb können wir die Matrizen mit einer Klammer umgruppieren.

$$(\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A}) \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$$

Wir sehen jetzt: Unabhängig davon, wie die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lautet, der Ausdruck in Klammer $(\ldots)$, verändert diese Matrix nicht. Dies kann nur wahr sein, wenn in der Klammer die Einheitsmatrix steht, also

$$\underbrace{(\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A})}_{=\mathbb{1}}$$

Schliesslich schreiben wir also:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}\ .$$

Aus diesen Überlegungen (Beispiel) folgt, dass die Matrix mit ihrer Matrix-Inversen immer kommutiert.

Infobox 13.3 Inverse für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dies gilt, falls $\mathbf{A}$ regulär ist, d.h. $\det(A) \neq 0$.

Beispiel 13.24 Inverse für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Invertieren Sie folgende Matrizen

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1. & -1. \\ -2. & 3. \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2. & 1. \end{pmatrix}$

c) existiert nicht

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1. & 5. \\ 2. & -9. \end{pmatrix}$

Infobox 13.4 Weitere Gesetze für die Inverse

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ regulär, dann gilt

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{\intercal})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}$

Die Beweise für die Sätze finden sich in Beispiel 13.25.

Beispiel 13.25 Beweise für die Gesetze der Inversen **TPXL3B**

Wir betrachten reguläre die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

a) Finden Sie Argumente, weshalb $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{B}^{-1}$

c) Zeigen Sie, dass gilt

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal} = (\mathbf{A}^{\intercal})^{-1}$$

Vorgehen:

i) Wir starten mit dem Ausdruck $\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$

ii) Transponieren auf beiden Seiten

iii) Benutze

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{\intercal} = \mathbf{B}^{\intercal} \odot \mathbf{A}^{\intercal}$$

und vereinfache auf beiden Seiten

d) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck soweit wie möglich

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{\intercal})^{-1}\, \mathbf{A} \odot (\mathbf{B}^{\intercal} \odot \mathbf{A})^{-1} \odot [(\mathbf{B}^{-1})^{\intercal}]^{-1}$$

Lösung:

a) Gauss-Jordan-Verfahren kann rückwärts gelesen werden als Inversion der Inversen. $\mathbf{A}$ entsteht dann als Inverse von $\mathbf{A}^{-1}$

b) Wir argumentieren in Worten: Gesucht ist das Inverse des Ausdrucks

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})$$

oder in Symbolen: Wir suchen eine Matrix $\mathbf{C}$, die folgendes bewerkstelligen kann für alle Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} = \mathbb{1}$$

Wir wissen, dass die Matrixmultiplikation Assoziativ ist. Deshalb schreiben wir ohne Klammern:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \odot \mathbf{C} = \mathbb{1}$$

Wir versuchen nun $\mathbf{C}$ so aufzubauen, dass $\mathbf{C}$ nacheinander "die Wirkung der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ rückgängig macht". Wir finden

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}$$

Zusammengefasst also

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}$$

c) Wie oben beschrieben, führen wir die Schritte durch. Start

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Transponieren auf beiden Seiten

$$(\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A})^{\intercal} = \mathbb{1}^{\intercal}$$

Gesetz für Transponierte benutzen

$$\mathbf{A}^{\intercal} \odot (\mathbf{A}^{-1})^{\intercal} = \mathbb{1} \tag{13.1}$$

Achtung, dies ist nicht

$$\mathbf{A}^{\intercal} \odot (\mathbf{A}^{\intercal})^{-1} = \mathbb{1} \tag{13.2}$$

Die Gleichung 13.2 ist selbstverständlich, denn es ist eine Abwandlung von $\mathbf{B} \odot (\mathbf{B})^{-1} = \mathbb{1}$, nur dass statt $\mathbf{B}$ jetzt $\mathbf{A}^{\intercal}$ geschrieben wurde.
Der Ausdruck hingegen überrascht. Er besagt, dass $(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}$, den gleichen Effekt hat auf $\mathbf{A}^{\intercal}$, wie die Inverse $(\mathbf{A}^{\intercal})^{-1}$ von $\mathbf{A}^{\intercal}$. Daraus folgern wir, dass wir auf zwei verschiedene Arten, die selbe Matrix gefunden haben, d.h.

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal} = (\mathbf{A}^{\intercal})^{-1}$$

d) Nach den Vereinfachungen bleibt

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{\intercal})^{-1}$$

Beispiel 13.26 Formal auflösen CTX1KQ

Wir betrachten die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Löse Sie die Gleichungen formal nach $\mathbf{X}$ auf und geben Sie an, unter welcher Bedingung dies möglich ist.

a) $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

b) $3\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{B} \odot \mathbf{X}$

c) $(\mathbf{A} \odot \mathbf{X})^\intercal = 4\mathbf{X}^\intercal \odot \mathbf{B} - 5\mathbf{C}$

d) $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{X} \odot \mathbf{B}$

Lösung:

Wir benutzen für die Matrix mit lauter Nullen.

a) $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Wir multiplizieren auf beiden Seiten $\mathbf{A}^{-1}$ und erhalten

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{B}$$

b) Wir subtrahieren auf beiden Seiten $\mathbf{B} \odot \mathbf{X}$ und klammern $\mathbf{X}$ aus:

$$(3\mathbf{A} - \mathbf{B}) \odot \mathbf{X} = \mathbb{0}$$

Wir multiplizieren auf beiden Seiten das Inverse der Klammer und erhalten

$$\mathbf{X} = (3\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} \odot \ =$$

c) Wir wenden das Gesetz für die Transponierte an

$$\mathbf{X}^\intercal \odot \mathbf{A}^\intercal = 4\mathbf{X}^\intercal \odot \mathbf{B} - 5\mathbf{C}$$

Nun bringen wir alle Unbekannten $\mathbf{X}^\intercal$ auf die linke Seite und klammern aus

$$\mathbf{X}^\intercal \odot (\mathbf{A}^\intercal - 4 \odot \mathbf{B}) = -5\mathbf{C}$$

Wir multiplizieren mit dem Inverse der Klammer:

$$\mathbf{X}^\intercal = -5\mathbf{C} \odot (\mathbf{A}^\intercal - 4 \odot \mathbf{B})^{-1}$$

Schliesslich transponieren wir

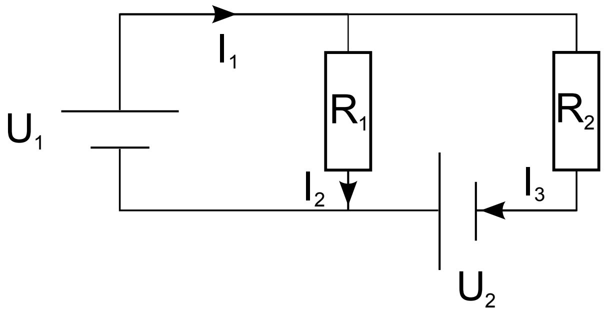
$$\mathbf{X} = -5\left[(\mathbf{A}^\intercal - 4 \odot \mathbf{B})^{-1}\right]^\intercal \odot \mathbf{C}^\intercal$$

d) $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{X} \odot \mathbf{B}$ hat keine allgemeine Lösung ausser $\mathbf{X} = \mathbb{0}$

13.7 Maschenstromverfahren

Beispiel 13.27 Bestimme die Ströme I_1, I_2 und I_3 **117132**

Arbeite dabei mit der inversen Matrix. Rechnen Sie zunächst mit den bekannten Grössen $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 0.5\Omega$ und $U_1 = 1$ V und $U_2 = 2$ V. Rechnen Sie erst dann allgmein.



Lösung:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 \cdot I_2 &= U_1 \\ -R_1 \cdot I_2 + R_2 \cdot I_3 &= U_2 \end{aligned}$$

Wir schreiben das LGS in Matrixschreibweise

$$\mathbf{A}\vec{I} = \vec{b}$$

dabei gruppieren wir die Ströme in einem Vektor

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

die Koeffizienten in einem Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & -R_1 & R_2 \end{pmatrix}$$

und die Inhommogenität ebenfalls in einem Vektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad .$$

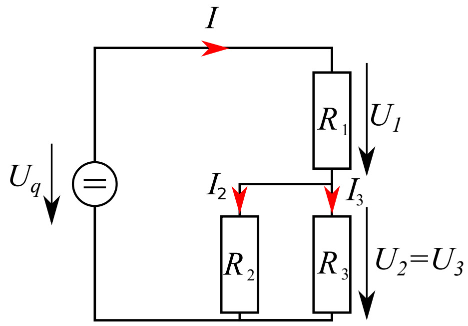
Wir berechnen die Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \ 1/\Omega$$

So ergeben sich die Ströme

$$\vec{I} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} U_1 \cdot (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) + \frac{U_2}{R_2} \\ \frac{U_1}{R_1} \\ \frac{U_1}{R_2} + \frac{U_2}{R_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ A}$$

Beispiel 13.28 Netzwerkberechnung **99P61P**



Berechnen Sie die Grössen I, I_2, I_3, U_1 und U_2. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

a) Benutzen Sie die Knotengleichung, die Maschenregel und drei Mal das Ohmsche Gesetz.

b) Stellen Sie ein LGS in der folgenden Form auf.

$$\mathbf{A} \odot \begin{pmatrix} I \\ I_2 \\ I_3 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \vec{c}\,,$$

c) Benutzen Sie Matlab für die Inversion der Matrix.

Lösung

Die Gleichungen lauten

- $I = I_2 + I_3$ (Zufliessende Ströme = abfliessende Ströme)
- $U_q = U_1 + U_2$ (Maschenregel)
- $U_1 = R_1 \cdot I$ (Ohm)
- $U_2 = R_2 \cdot I_2$ (Ohm)
- $U_2 = R_3 \cdot I_3$ (Ohm)

Als lineares Gleichungssystem geschrieben ergibt dies:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} I \\ I_2 \\ I_3 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder $\mathbf{A}\vec{I} = \vec{c}$. Das Resultat ergibt sich aus $\vec{I} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{c}$ d.h.

$$\begin{pmatrix} I \\ I_2 \\ I_3 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ U_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \begin{pmatrix} R_2R_3 & R_2+R_3 & R_2+R_3 & R_3 & R_2 \\ -R_1R_3 & R_3 & R_3 & R_1+R_3 & -R_1 \\ -R_1R_2 & R_2 & R_2 & -R_1 & R_1+R_2 \\ R_1R_2R_3 & R_1R_2+R_1R_3 & -R_2R_3 & R_1R_3 & R_1R_2 \\ -R_1R_2R_3 & R_2R_3 & R_2R_3 & -R_1R_3 & -R_1R_2 \end{pmatrix},$$

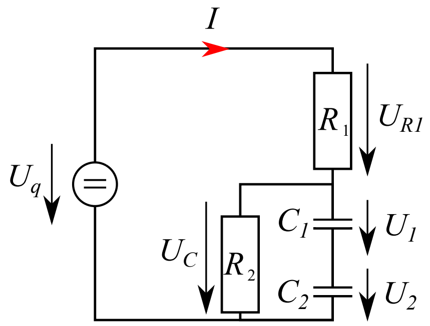
Numerisch

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.16 & 1. & 1. & 0.8 & 0.2 \\ -0.672 & 0.8 & 0.8 & 1.64 & -0.84 \\ -0.168 & 0.2 & 0.2 & -0.84 & 1.04 \\ 0.1344 & 0.84 & -0.16 & 0.672 & 0.168 \\ -0.1344 & 0.16 & 0.16 & -0.672 & -0.168 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} I \\ I_2 \\ I_3 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{U_q}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \begin{pmatrix} R_2+R_3 \\ R_3 \\ R_2 \\ R_1R_2+R_1R_3 \\ R_2R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,\mathrm{A} \\ 4\,\mathrm{A} \\ 1\,\mathrm{A} \\ 4.2\,\mathrm{V} \\ 0.8\,\mathrm{V} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 13.29 Netzmasche mit Widerständen und Kondensatoren DNGTIO



Berechnen Sie die Grössen I, U_C, U_{R1}, U_1 und U_2. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

a) Benutzen Sie zwei Mal die Maschenregel, zwei Mal das Ohmsche Gesetz und die Ladungserhaltung.

b) Stellen Sie ein LGS in der folgenden Form auf.

$$\mathbf{A} \odot \begin{pmatrix} I \\ U_C \\ U_{R1} \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \vec{c}\,,$$

c) Benutzen Sie Matlab für die Inversion der Matrix.

Lösung

Die Grössen lassen sich aus den folgenden linear unabhängigen Gleichungen bestimmen:

- $U_q = U_C + U_{R1}$ (Maschenregel)
- $U_{R1} = R_1 \cdot I$ (Ohm)
- $U_C = R_2 \cdot I$ (Ohm)
- $U_1 + U_2 - U_C = 0$ (Maschenregel)
- $(Q =)\ C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$ (Ladungserhaltung)

Als lineares Gleichungssystem geschrieben ergibt dies:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ R_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & -C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ U_C \\ U_{R1} \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

oder $\mathbf{A}\vec{I} = \vec{c}$. Das Resultat ergibt sich aus $\vec{I} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{c}$ d.h.

$$\begin{pmatrix} I \\ U_C \\ U_{R1} \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \odot \begin{pmatrix} U_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

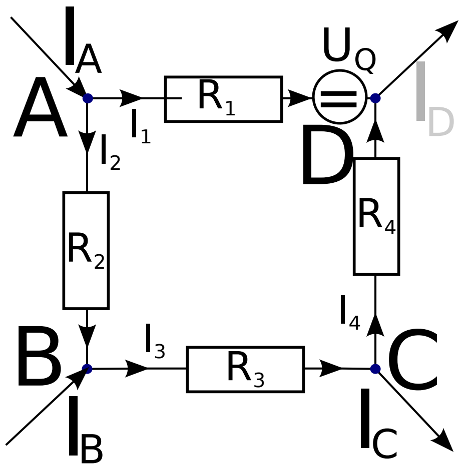
mit

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{C_1R_1 + C_2R_1 + C_1R_2 + C_2R_2} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & C_1 + C_2 & C_1 + C_2 & 0 & 0 \\ C_1R_2 + C_2R_2 & C_1R_2 + C_2R_2 & -C_1R_1 - C_2R_1 & 0 & 0 \\ C_1R_1 + C_2R_1 & -C_1R_2 - C_2R_2 & C_1R_1 + C_2R_1 & 0 & 0 \\ C_2R_2 & C_2R_2 & -C_2R_1 & C_2R_1 + C_2R_2 & R_1 + R_2 \\ C_1R_2 & C_1R_2 & -C_1R_1 & C_1R_1 + C_1R_2 & -R_1 - R_2 \end{pmatrix}.$$

also

$$\begin{pmatrix} I \\ U_C \\ U_{R1} \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{U_q}{C_1R_1 + C_2R_1 + C_1R_2 + C_2R_2} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ (C_1 + C_2) \cdot R_2 \\ (C_1 + C_2) \cdot R_1 \\ C_2R_2 \\ C_1R_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.30 Netzmasche **643107**



$$R_1 = 1\,\Omega,\ R_2 = 2\,\Omega,\ R_3 = 5\,\Omega,\ R_4 = 2\,\Omega,\ U_q = 19\,\mathrm{V},\ I_A = 2\,\mathrm{A},\ I_B = 1\,\mathrm{A},\ I_C = 1\,\mathrm{A}$$

Berechnen Sie die vier Zweigströme $I_1,\ I_2,\ I_3$ und I_4. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

a) Benutzen Sie dreimal die Knotengleichung und einmal die Maschengleichung.

b) Stellen Sie ein LGS in der folgenden Form auf.

$$\mathbf{A} \odot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \vec{c}\,,$$

c) Benutzen Sie Matlab für die Inversion der Matrix.

Lösung

Die vier Grössen lassen sich aus dem vier linear unabhängigen Gleichungen bestimmen:

- $I_A = I_1 + I_2$ (Zufliessende Ströme = abfliessende Ströme)
- $I_2 + I_B = I_3$ (Zufliessende Ströme = abfliessende Ströme)
- $I_3 = I_C + I_4$ (Zufliessende Ströme = abfliessende Ströme)

- $-I_2R_1 - U_q + I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = 0$ (Maschenregel)

Als lineares Gleichungssystem geschrieben ergibt dies:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix},$$

oder $\mathbf{A}\vec{I} = \vec{c}$

Für die Einheiten gilt: Benutze SI-Einheiten beim Aufstellen der Gleichungen, kümmere dich nicht mehr um die Einheiten, denn das Resultat kommt wieder in den SI-Einheiten heraus.
oder $\mathbf{A}\vec{I} = \vec{c}$. Das Resultat ergibt sich aus $\vec{I} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{c}$ d.h.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & 7 & -2 & -1 \\ 1 & -7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.6 \\ 2.6 \\ 1.6 \end{pmatrix}.$$

13.8 Knotenpotentialverfahren

Beispiel 13.31 Knotenpotentialverfahren **QINUXN**

$$G_1 = 0.2,\ G_2 = 0.8,\ G_3 = 0.84,\ I_1 = 1,\ I_2 = 1.2,\ I_3 = -2.4$$

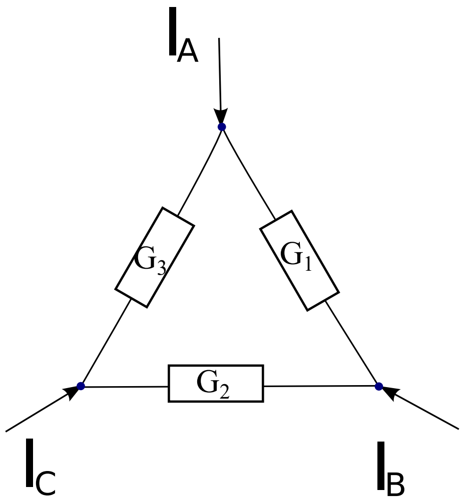
a) Knoten des Netzwerkes nummerieren + Bezugspfeile für Einströmungen einheitlich definieren (in das Netzwerk hinein)

b) Aufstellen der UAM: Eigenleitwerte der Knoten auf der Hauptdiagonalen, Koppelleitwerte zwischen den Knoten negativ eintragen

c) Einströmungsvektor aufstellen (positive Zählrichtung, für Bezugspfeil ins Netzwerk hinein)

d) Potenzialnullpunkt wählen und entsprechende Zeile und Spalte streichen ($V_3 = 0$).

e) Gleichungssystem numerisch lösen



a) Knoten nummerieren

b) Bezugspfeile für Einströmungen einheitlich definieren (in das Netzwerk hinein)

c) UAM

$$\begin{pmatrix} G_1+G_3 & -G_1 & -G_3 \\ -G_1 & G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_3 & -G_2 & G_2+G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} ,$$

d) Einströmungsvektor oben

e) $V_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} G_1+G_3 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} ,$$

f) Gleichungssystem numerisch lösen

$$\begin{pmatrix} 1.04 & -0.2 \\ -0.2 & 1. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

13.9 Orthogonale Matrizen und ihre Inverse*

Definition 13.5 Orthogonale Matrix

Ein Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst orthogonal, wenn die Spaltenvektoren zueinander senkrecht stehen **und** normiert sind.

Achtung: Die Spalten einer ortho**gonalen** Matrix bilden eine ortho**normale** Basis!

Beispiel 13.32 $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal$ **ISWNQT**

Überprüfen Sie ob die Matrix $\mathbf{A}$ orthogonal ist. Berechnen Sie dann $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal$.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Spalten der Matrix sind

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Skalarprodukte sind

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 \odot \vec{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{10}}(1 \cdot 1 + 3 \cdot 3) = 1 \\ \vec{A}_2 \odot \vec{A}_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{10}}(3 \cdot 3 + 1 \cdot 1) = 1 \\ \vec{A}_1 \odot \vec{A}_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{10}}(1 \cdot (-3) + 3 \cdot 3) = 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{A}$ ist also eine ortogonale Matrix.

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Wir wollen nun das Produkt $\mathbf{A}^\intercal \odot \mathbf{A}$ für alle orthogonale Matrizen $\mathbf{A}$ berechnen. Dafür schreiben wir die Matrix mit Hilfe ihrer Spalten als

$$\mathbf{A} = \left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right]$$

Beim Transponieren verwandeln sich die Spalten in die Zeilen

$$\mathbf{A}^\intercal = \begin{pmatrix} \vec{A}_1^\intercal \\ \vec{A}_2^\intercal \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Wie in Matlab können wir durch die Transposition um einen Spaltenvektor in einen Zeilenvektor umwandeln! So ergibt das Produkt

$$\mathbf{A}^\intercal \odot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^\intercal \\ \vec{a}_2^\intercal \\ \ldots \end{pmatrix} \odot \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vdots\right] = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_1 & \vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_2 & \ldots \\ \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_1 & \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Die Spalten stehen senkrecht aufeinander, deshalb verschwinden alle Vektorprodukte ausserhalb der Diagonalen. Auf der Diagonalen bleiben Vektorprodukte der Form

$$\vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_1 = \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_2 = 1$$

Sie ergeben 1, weil die Vektoren normiert sind.

Satz 13.4 Das Inverse einer orthogonalen Matrix

Die Inverse der orthogonalen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\mathbf{A}^\intercal$.

13.10 Die inverse Matrix mit der Adjungierten*

Beispiel 13.33 Kofaktoren, **837230**

Zu jedem Matrix-Element $a_{i,j}$ einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ gehört ein Kofaktor $a_{m,n}$. Er ist wie folgt definiert

$$\mathrm{cof}(a_{m,n}) = (-1)^{m+n} \cdot \det(\mathbf{A}_{m,n})$$

Dabei entsteht die Matrix $\mathbf{A}_{m,n}$ durch streichen der $m-$ten Zeile und $n-$ten Spalte in $\mathbf{A}$.
Bestimme die Kofaktoren $\mathrm{cof}(a_{1,1})$ und $\mathrm{cof}(a_{2,3})$ der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Für den Kofaktor $a_{1,1}$ streichen wir die erste Zeile und die erste Spalte:

$$\mathbf{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit der Determinanten

$$\det(\mathbf{A}_{1,1}) = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 11 .$$

Der Kofaktor ist also $\mathrm{cof}(a_{1,1}) = (-1)^{1+1} \cdot 11 = 11$. Für den Kofaktor $a_{2,3}$ streichen wir die zweite Zeile und die dritte Spalte:

$$\mathbf{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Determinanten

$$\det(\mathbf{A}_{2,3}) = -2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -8 .$$

Der Kofaktor ist also $\mathrm{cof}(a_{2,3}) = (-1)^{2+3} \cdot 11 = 8$.

Beispiel 13.34 Die Adjungierte, **237356**

Die Kofaktoren der Matrix $\mathbf{A}$ können wieder in Matrixform aufgeschrieben werden. Wird die Matrix der Kofaktoren transponiert, erhalten wir die Adjungierte Matrix

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathrm{cof}(a_{1,1}) & \dots & \mathrm{cof}(a_{1,n}) \\ & \dots & \\ \mathrm{cof}(a_{m,1}) & \dots & \mathrm{cof}(a_{m,n}) \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Berechnen Sie die Adjungierte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Die Matrix der Kofaktoren ist

$$\mathrm{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 11 & 6 & -7 \\ -11 & -10 & 8 \\ 11 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

und die Adjungiert ist also

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathrm{cof}(\mathbf{A})^\intercal = \begin{pmatrix} 11 & 6 & -7 \\ -11 & -10 & 8 \\ 11 & 11 & -11 \end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix} 11 & -11 & 11 \\ 6 & -10 & 11 \\ -7 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.35 Die inverse Matrix mit der Adjungierten **431045**

Mit Matrix-Inverse lässt sich mit der Adjungierten schnell berechnen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}) .$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ und die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$. Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie $\mathbf{A} \odot \mathrm{cof}(\mathbf{A})^\intercal$ berechnen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Die Determinante ist

$$\det(\mathbf{A}) = -32 + 30 + 1 - 8 + 10 - 12 = -11 .$$

Die Inverse Matrix ist also

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-11} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -11 & 11 \\ 6 & -10 & 11 \\ -7 & 8 & -11 \end{pmatrix} .$$

Als Kontrolle berechnen wir

$$\mathbf{A} \odot \mathrm{cof}(\mathbf{A})^\intercal = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Würde die zweite Matrix noch durch $\det(\mathbf{A}) = -11$ geteilt, wäre das Resultat die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$. Deshalb ist $\frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$ die Inverse von $\mathbf{A}$.

Beispiel 13.36 Die inverse Matrix mit der Adjungierten **332409**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{F}$ und die Inverse $\mathbf{F}^{-1}$ mit Kofaktoren. Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie $\frac{1}{\det(\mathbf{F})} \cdot \mathbf{F} \odot \operatorname{cof}(\mathbf{F})^\intercal$ berechnen.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Die Determinante ist

$$\det(\mathbf{F}) = -90 - 42 - 18 - 126 - 30 + 18 = -288 .$$

Die Kofaktoren sind

$$\operatorname{cof}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} -24 & 24 & -24 \\ 0 & -72 & -12 \\ -24 & -48 & 12 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse Matrix ist also

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{-288} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 24 & -24 \\ 0 & -72 & -12 \\ -24 & -48 & 12 \end{pmatrix}^\intercal = \frac{1}{-288} \begin{pmatrix} -24 & 0 & -24 \\ 24 & -72 & -48 \\ -24 & -12 & 12 \end{pmatrix} .$$

Als Kontrolle berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \cdot \mathbf{F} \odot \operatorname{cof}(\mathbf{F})^\intercal &= \frac{1}{-288} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -24 & 0 & -24 \\ 24 & -72 & -48 \\ -24 & -12 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-288} \cdot \begin{pmatrix} -288 & 0 & 0 \\ 0 & -288 & 0 \\ 0 & 0 & -288 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Deshalb ist $\frac{1}{\det(\mathbf{F})} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{F})$ die Inverse von $\mathbf{F}$.

Beispiel 13.37 Inverse mit der Adjungierten **246885**

Berechnen Sie die Inverse der Rotations-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Adjungierten.

Übrigens:

Die Inversion mit der Adjungierten ist auf aufwändig, weil die Berechnung der Determinanten aufwändig ist. Deshalb wird sie nur bei kleinen Matrizen angewandt oder bei Problemen mit (vielen) Parametern. Das Beispiel hier ist also eine *typische* Anwendung.

Lösung

Die Determinante der Matrix ist

$$\det(\mathbf{A}) = \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

Deshalb ergibt sich die Inverse direkt aus der Adjungierten:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$