KAPITEL 15

Komplexe Zahlen

Lernziele 15.1 Komplexe Zahlen

- Die Studierenden kennen die komplexe Zahlen ($\mathbb{C}$).
- Sie können komplexe Zahlen in der karthesichen und in der Polarform darstellen.
- Sie kennen die Zahlenebene von Gauss.
- Sie können komplexen Zahlen addieren und multiplizieren (also auch subtrahieren und dividieren).
- Sie können für $z \in \mathbb{C}$ und $q \in \mathbb{Q}$, die Potenz berechnen, z.B. $(1+i)^{14}$ und $(1+i)^{\frac{1}{5}}$ (5. Wurzel)
- Sie kennen die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten ($e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)$, Euler Formel).
- Sie können Amplitude und Phase berechnen bei der Superposition von gleichfrequenzen harmonischen Schwingungen mit Hilfe von komplexen Zahlen.

Beispiel 15.1 Gleichungen lösen

Lösen sie die Gleichungen. Diskutieren Sie: Wieviele Lösungen hat eine quadratische Gleichung hat?

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $x^2 + 25 = 0$

e) $x^2 - 10x + 34 = 0$

15.1 Komplexe Zahlen, $\mathbb{C}$, Zahlenebene von Gauss

Keine reelle Zahl erfüllt die Gleichung $x^2 = -1$, denn Quadrate von reellen Zahlen sind immer positiv.

Definition 15.1 Imaginäre Einheit

Für i gilt

$$i^2 = -1$$

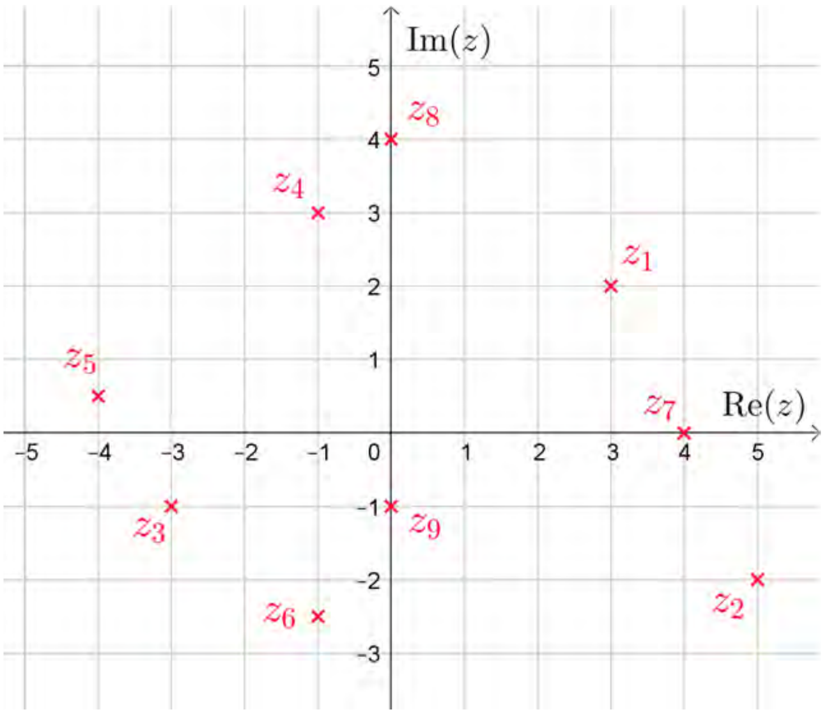
Beispiel 15.2 Komplexe Zahlenebene **KICGBV**

a) Lesen Sie $z_1, \ldots, z_9$ aus und geben Sie die Zahlen in der karthesischen Darstellung an.

b) Wie gross ist der Abstand von z_1, z_7 und z_9 vom Ursprung?

c) Geben Sie eine allgemeine Formel an um für $z = x + i\,y$ den Abstand vom Ursprung $|z|$ zu berechnen.

d) Wir nennen $|z|$ den Betrag. Was ist der Betrag von z_2, z_3 und z_4?



Beispiel 15.3 Gausschen Zahlenebene **KGX8MQ**

Wo liegen in der Gausschen Zahlenebene jeweils alle komplexen Zahlen z mit folgender Eigenschaft?

a) Der Realteil ist 2.

b) Der Imaginarteil ist 2.

c) Der Realteil und der Imaginarteil sind gleich.

d) Der Realteil ist das Doppelte des Imaginarteils.

e) $\mathrm{Im}\,(z) > 0$

f) $\mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z) < 0$

g) $3 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 4$

h) $\mathrm{Im}\,(z)^2 < 0$

i) $\mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2 = 1$

j) $\big(\mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)\big)^2 = 1$

15.2 Addieren und Multiplizieren

Beispiel 15.4 Addition, Multiplikation **1EUM2V**

Wie können Sie folgende Ausdrücke vereinfachen? Welche Gesetze benutzen Sie dafür? $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

a) i^2

b) $-i^3$

c) $-i^4$

d) i^5

e) $i^{100} - i^{98}$

f) $i + i + i$

g) $(2 + i) + (4 + 2i)$

h) $2 \cdot (1 + 3i)$

i) $a \cdot (c + i\, d)$

j) $(2 + i) \cdot (4 + 2i)$

k) $(2 + i) \cdot (2 - i)$

l) $(a + i\, b) + (c + i\, d)$

Infobox 15.1 Reelle Zahlen Addition, Multiplikation

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt u.a.

i) $a + (b + c) = (a + b) + c$

ii) $a + b = b + a$

iii) $a \cdot b = b \cdot a$

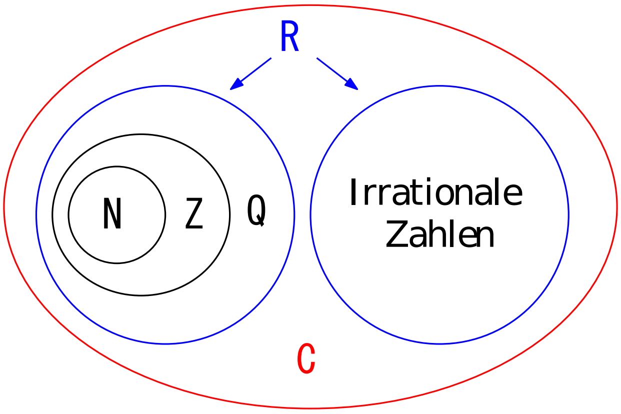
iv) $a \cdot b = b \cdot a$

v) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

vi) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

Wir wollen die bisher bekannten Zahlenmenge in $\mathbb{C}$ einbetten.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$



Dann sollten alle Rechengesetze, die in $\mathbb{R}$ gelten, auch in $\mathbb{C}$ gelten.

Infobox 15.2 Multiplikation, Addition

Multiplikation und Addition in $\mathbb{C}$ erfolgen durch

i) Zusammenfassen von Realteil und Imaginärteil (Addition)

ii) Ausmultiplizieren (Multiplikation)

Beispiel 15.5 Addition, Multiplikation **2FXNNA**

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

a) $i + 2i + 3i + 4i$

b) $i \cdot 2i$

c) $i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i$

d) $(3i)^2$

e) $(\sqrt{3}i)^2$

f) $(1 + i)^2$

g) $(1 + 2i) \cdot (3 + 4i)$

h) $(2 - 5i) + (5 + 2i)$

i) $(1 + i)^4$

15.2.1 Subtraktion und Division

Beispiel 15.6 Komplexe Zahlen Dividieren **R3LX15**

Stimmt die Gleichung $\frac{3+4i}{1-2i} = -1 + 2i$. Wie könnte man dies überprüfen?

Beispiel 15.7 Addition, Multiplikation **1IDMNV**

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

a) $i - 2i$

b) $(2 - 5i) - (5 + 2i)$

c) $\frac{i}{2i}$

d) $\frac{1}{2i}$

e) $\frac{1+2i}{3+4i}$

f) $\frac{2-5i}{5+2i}$

Beispiel 15.8 Subtraktion, Division **9KJS56**

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

a) $5i - 6i$

b) $(8-15i)-(15+12i)$

c) $(1+i)+(1-i)+(-1+i)+(-1-i)$

d) $(1+i)-(1-i)-(-1+i)-(-1-i)$

e) $\frac{2i}{i}$

f) $\frac{2}{2+2i}$

g) $\frac{1}{i}$

h) $\frac{4+5i}{3-4i}$

i) $\frac{1+i}{1-i}$

j) $1+\frac{1}{i}$

k) $\frac{2/3-i5/6}{1/2-i7/3}$

l) $\frac{7/6+5/2i}{1/3-2/3i}$

m) $\frac{7i}{\sqrt{2}}+i\sqrt{5}$

n) $\frac{9+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i9}$

Infobox 15.3 $1/i$

$$\frac{1}{i} = -i$$

Infobox 15.4 Subtraktion, Division

i) Subtraktion = Addition der Gegenzahl, d.h. $a-b=a+(-1)\cdot b$

ii) Division: Ein Bruch wird in Real- und Imaginärteil zerlegt, indem mit dem Nenner erweitert wird. D.h. für $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ gilt

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)}$$

wobei im rechten Ausdruck der Zähler reell ist.

Definition 15.2 Die konjugiert-komplexe Zahl

Die komplexe Zahl
$$\overline{z} := x + i\,(-y) = x - i\,y$$
heisst die zu $z = x + iy$ konjugiert-komplexe Zahl.

Beispiel 15.9 Komplex konjugierte Zahl **WEFYB9**

Berechnen Sie die konjugiert komplexen Zahlen.

a) $z_1 = -7 - 8i$

b) $z_2 = 4i$

c) $z_3 = -17$

d) $z_1 = -2 + 3i$

Beispiel 15.10 Real- und Imaginärteil **5UF7TR**

$$z_0 = 1 - 2i$$

a) Berechnen Sie: $\mathrm{Re}\,(z_0)$, $\mathrm{Im}\,(z_0)$, $\overline{z_0}$, $\mathrm{Im}\,(i \cdot z_0)$, $\overline{\mathrm{Im}\,(z_0)}$, $\overline{i \cdot \mathrm{Re}\,(z_0)}$, $\mathrm{Re}\,(1/z_0)$.

b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z = x + i\,y$ mit $\mathrm{Im}\,(2z + 7 - 5i) = 1$.

c) Für $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = -5 + 2i$ berechnen Sie
$$\mathrm{Re}\,(z_1 + 4z_2)\,;,\ \mathrm{Im}\left((z_1)^2 \cdot z_2\right);,\ \mathrm{Re}\left(z_1 \cdot (z_2)^2\right);,\ \mathrm{Im}\,(2z_1 - 3z_2)$$

d) Für $z = x + iy$ schreiben Sie $\mathrm{Re}\,(z)$ und $\mathrm{Im}\,(z)$ nur mit Hilfe von z und $\overline{z}$.

Beispiel 15.11 Betrag bei der Multiplikation FDE1CP

Überprüfen Sie, ob bei der oben gefundenen Multiplikation von komplexen Zahlen, das Gesetz für den Betrag

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

erhalten ist. Benutzen Sie, dass auch gilt

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2$$

a) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 6 + 8i$

b) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 5 + 12i$

c) $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$

Infobox 15.5 Rechenregeln für konjugiert-komplexe Zahlen

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iv) $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$

Beispiel 15.12 Betrag bei der Multiplikation GEH2DQ

Überprüfen Sie allgemein, ob bei der oben gefundenen Multiplikation von komplexen Zahlen, das Gesetz für den Betrag

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

erhalten ist. Benutzen Sie, dass dann auch gilt

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2 \text{ und } |z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

15.3 Polarform

Satz 15.1 Satz von Euler

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Der Satz kann z.B. mit der Reihenentwicklungen der drei Funktionen gezeigt werden.

Beispiel 15.13 Sinus und Cosinus **F663GL**

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \text{ und } e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$$

b) Stellen Sie $\cos(\varphi)$ mit Hilfe von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ dar.

c) Stellen Sie $\sin(\varphi)$ mit Hilfe von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ dar.

15.3.1 Von der Polardarstellung zur karthesischen Darstellung

Beispiel 15.14 Polardarstellung **246ZKY**

Stellen Sie folgende Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und markieren Sie sie in der Zahlenebene (φ ist das Argument von z).

a) $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{7\pi}{36}$

b) $|z| = 4$, $\varphi = \frac{25\pi}{36}$

c) $|z| = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{9}$

d) $|z| = a$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

15.3.2 Von der karthesischen Darstellung zur Polardarstellung

Beispiel 15.15 Polardarstellung aus der karthesischen Darstellung **Y4PQ8E**

a) Wir betrachten $z = r \cdot \big(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\big)$ mit $\varphi, r \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$\frac{\mathrm{Im}\,(z)}{\mathrm{Re}\,(z)}$$

und lösen Sie den Ausdruck formal nach φ auf.

b) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$ für $z_1 = 3+4i$ und für $z_2 = -3-4i$. Welche Schwierigkeiten erwarten Sie bei der Berechnung von φ?

c) Berechnen Sie nun das Argument für die Paare

$$\begin{aligned} z_3 &= 5 + 12i, \quad & z_4 &= -5 - 12i \\ z_5 &= 5 - 12i, \quad & z_6 &= -5 + 12i \\ z_7 &= -4 - 13i, \quad & z_8 &= 4 + 13i \end{aligned}$$

d) Wie kann man allgemein das Argument berechnen für $z = a + i\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$?

Beispiel 15.16 Polarform **A2ELY3**

Geben Sie in Polarform an (ohne Taschenrechner).

a) $2 + 2i$

b) $-2 + 2i$

c) $-2 - 2i$

d) $2 - 2i$

e) $1 + \sqrt{3}i$

f) $-1 + \sqrt{3}i$

g) $1 - \sqrt{3}i$

h) $-1 - \sqrt{3}i$

Beispiel 15.17 Polarform 2 **DWGXLH**

Stellen Sie folgende Zahlen in Polarform dar und markieren Sie sie in der Zahlenebene:

a) i

b) -1

c) $1+i$

d) $3+\sqrt{3}i$

e) $-1-\sqrt{3}i$

f) $0.6-0.8i$

g) $4e^{i\pi/2}$

h) $2e^{i7\pi/6}$

i) $2e^{0}$

j) $6e^{-i\frac{\pi}{3}}$

k) $3e^{i\pi}$

l) $6e^{i3\pi/4}$

m) $\frac{2}{3}\cdot e^{i3\pi/2}$

n) $8e^{-\pi i}$

15.3.3 Die Grundrechenarten in der Polardarstellung

Beispiel 15.18 Polardarstellung **2FG7T1**

Führen Sie die Multiplikation aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{7\pi}{5}} \cdot 7 \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$

b) $z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{3\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{9\pi}{10}}$

c) $z_1 \cdot z_2 = 10 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 5 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

d) $z_1 \cdot z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

e) $z_1 \cdot z_2 = \cdot e^{i} \cdot \cdot e^{i3}$

f) $z_1 \cdot z_2 = \cdot e^{-i\frac{21\pi}{40}} \cdot e^{-i\frac{9\pi}{40}}$

g) $(z)^3 = \left(2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3$

h) $(z)^5 = \left(3 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5$

Führen Sie die Divisionen aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $z_1/z_2 = \frac{36 \cdot e^{i5\pi}}{6 \cdot e^{i3\pi}}$

b) $z_1/z_2 = \frac{56 \cdot e^{i\frac{15\pi}{4}}}{8 \cdot e^{i\frac{9\pi}{4}}}$

c) $z_1/z_2 = \frac{24 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{48 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

d) $z_1/z_2 = \frac{63 \cdot e^{i\frac{5\pi}{2}}}{-7 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}}$

e) $z_1/z_2 = \frac{-42 \cdot e^{i4}}{6 \cdot e^{i}}$

f) $z_1/z_2 = \frac{-21 \cdot e^{i\frac{5\pi}{8}}}{-3 \cdot e^{i\frac{11\pi}{8}}}$

g) $z_1 \cdot (z_2)^{-1} = 24 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \left(16 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^{-1}$

h) $(z_1)^{-1} = \left(30 \cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}\right)^{-1}$

Beispiel 15.19 Grundrechenoperationen, Verallgemeinerung **5WJR7Y**

Betrachten Sie die Beispiele oben. Versuchen Sie jetzt zu verallgemeinern

a) Wie werden komplexe Zahlen in der Polardarstellung multipliziert?

b) Wie werden komplexe Zahlen in der Polardarstellung dividiert?

c) Wie berechnet man die n-te Potenz einer komplexe Zahl in der Polardarstellung?

d) Wie berechnet man die n-te Wurzel einer komplexe Zahl in der Polardarstellung?

e) Wir haben am Anfang des Kapitels besprochen, dass $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ eingebettet werden soll. Welche Gesetze aus $\mathbb{R}$ haben wir auf $\mathbb{C}$ übertragen?

Beispiel 15.20 Polarform **9G8NBZ**

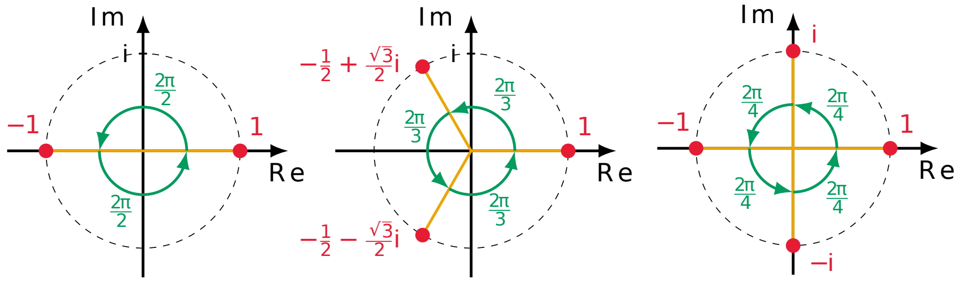
Geben Sie für $-z$, $\overline{z}$ und z^{-1} in der Polarform an (ohne Taschenrechner). Wie können Sie ihr Resultat überprüfen?

a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $z_2 = \frac{1}{3} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

c) $z_3 = 8 \cdot e^{-i\frac{5\pi}{9}}$

15.4 Potenzen und Wurzeln



Infobox 15.6 Wurzeln von komplexen Zahlen

Für das Wurzelziehen von komplexen Zahlen ist es nützlich die Polarform zu benutzen. Dann kann die Wurzel aus dem Betrag r gezogen werden muss und das Argument durch n zu dividiert werden. So erhält man die 1. von n Lösungen der Wurzel.
Die weiteren Lösungen erhält man, indem man das Argument um $2k\pi$ erhöht, d.h. für $z = r \cdot e^{i\varphi}$ gilt

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

mit $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \ldots, n-1$.

Beispiel 15.21 Potenzen und Wurzeln **JN82T5**

a) Geben Sie w^0, w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6 an für $w = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Was beobachten Sie?

b) Können Sie auch w^7, w^8 angeben?

c) Berechnen Sie $u = e^{i(\frac{5\pi}{3}+2\pi)}$ und $v = e^{i(\frac{5\pi}{3}+4\pi)}$

d) Berechnen Sie $(-1)^3$ und $(e^{i\frac{\pi}{3}})^3$

e) Was folgt daraus für den Ausdruck $\sqrt[3]{-1}$?

f) Wie berechnen Sie die Ausdrücke $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$?

g) Wie können Sie diese Ausdrücke benutzen um $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[6]{-64}$ und $\sqrt[4]{81}$ zu berechnen?

Beispiel 15.22 Wurzeln **HCH7NG**

Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichungen erfüllen

a) $\sqrt[5]{z} = -1$

b) $\sqrt[8]{z} = 256$

c) $\sqrt[3]{z} = 125i$

d) $\sqrt[3]{z} = l000 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

15.5 Gleichung n-ten Grades, Fundamentalsatz der Algebra

Beispiel 15.23 Gleichung n-ten Grades **8AIP6W**

a) Wenden Sie auf die Gleichung $13 - 6x + x^2 = 0$ die Mitternachtsformel an.

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Was beobachten Sie?

b) Berechnen Sie die dritte Potenz von i, $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ und von $e^{i\frac{11\pi}{6}}$

c) Lösen Sie nun die Gleichung $z^3 = -i$.

d) Wie viele Lösungen finden Sie bei der Berechnung der Wurzel? Was vermuten Sie aufgrund dieser Resultate?

Beispiel 15.24 Quadratische Gleichungen **1TGWY4**

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$.

a) $z^2 + 6z + 9 = 0$

b) $2z^2 + 9z - 5 = 0$

c) $4z^2 + 25 = 0$

d) $4z^2 + 8z + 29 = 0$

e) $z^2 - 2iz - 10 = 0$

f) $iz^2 - (9 + 16i) = -\frac{144}{z^2}$

Satz 15.2 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom n-ten Grades ($n > 0$)

$$P(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z^1 + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_n \neq 0$ kann zerlegt werden:

$$P(z) = a_n \cdot (z + z_n) \cdot (z + z_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (z + z_2) \cdot (z + z_1)$$

Die Zahlen $z_1, z_2, \ldots z_n$ sind die Nullstellen von $P(z)$. Sie sind nicht immer verschieden voneinander, d.h. manchmal tritt eine Nullstelle mehrfach auf.

Beispiel 15.25 Gleichung 6. und 8. Grades **NANZ5I**

Lösen Sie mit Hilfe einer Substitution.

a) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

b) $z^8 + 12z^4 - 64 = 0$

Infobox 15.7 Komplex konjugierte Nullstellen

Solange ein Polynom reelle Koeffizienten hat, treten komplexe Nullstellen immer komplex konjugiert auf, d.h. falls z eine Nullstelle ist ist auch $\overline{z}$ eine Nulllstelle.

Beispiel 15.26 Nullstellen **DJUTAZ**

Berechnen Sie alle Nullstellen.

a) $P(z) = z^2 - 2z + 5$

b) $P(z) = (z^2 - 2)(z - 3)(3z + 2)$

c) $P(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 1)$

d) $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$, Tipp: $z_1 = 1 - 2i$.

15.6 Zerlegen in Real- und Imaginärteil

Beispiel 15.27 Real- und Imaginärteil bei Brüchen **QP7Y08**

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen (evtl. auch Betrag und Argument).

a) $z = \frac{7+24j}{3+4j}$

b) $z = \frac{33+56j}{5-12j}$

c) $z = \frac{36-77j}{-3+4j}$

d) $z = \frac{e^{2i}}{3+4j}$

e) $z = \frac{e^{-j}}{5-12j}$

f) $z = \frac{e^{4+2j}}{-3+4j}$

g) $z = \frac{e^{-2-j}}{5-12j}$

h) $z = \frac{e^{4+\frac{\pi}{3}j}}{-3+4j}$

15.7 Harmonischen Schwingungen

Beispiel 15.28 Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen

a) Gehen Sie die Schritte unten durch. Was wird jeweils gemacht.

b) Versuchen Sie das Vorgehen zu verallgemeinern.

- Überlagerung von $f_1(t) = 3\sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 5\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$, d.h.

$$f_1(t) = 3\cos(\omega t - \pi/2) \text{ und } f_2(t) = 5\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

- Wir schreiben

$$\underline{f_1(t)} = 3e^{i(\omega t - \pi/2)} \text{ und } \underline{f_2(t)} = 5e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})}$$

- Addition

$$\underline{f_T(t)} = \underline{f_1(t)} + \underline{f_2(t)} = 3e^{i(\omega t - \pi/2)} + 5e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})} = (3e^{-i\pi/2} + 5e^{i\frac{\pi}{6}}) \cdot e^{i\omega t}$$

- Wir berechnen zunächst

$$(3e^{-i\pi/2} + 5e^{i\frac{\pi}{6}}) = -i/2 + (5\sqrt{3})/2$$

  und damit

$$f_T(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{f_T(t)}\right) = \mathrm{Re}\left((-i/2 + (5\sqrt{3})/2) \cdot (\cos(\omega t) + i\,\sin(\omega t))\right)$$

  Wir erhalten

$$f_T(t) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(\omega t) +$$

Beispiel 15.29 Überlagerung harmonischer Wellen GDIMWT

Schreiben Sie die Superposition in der Form $f_T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

a) Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t +)$

b) Überlagerung von $f_1(t) = 6 \cdot \sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \sin(\omega t +)$

c) Überlagerung von $f_1(t) = 5 \cdot \sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t +)$

d) Überlagerung von $f_1(t) = 7 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{10})$ und $f_2(t) = 6 \cdot \cos(\omega t + \frac{4\pi}{5})$

e) Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ und $f_2(t) = \cdot 7 \cos(\omega t + \frac{9\pi}{7})$

f) Überlagerung von $f_1(t) = 7 \cdot \cos(\omega t - \frac{3\pi}{2})$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t + \frac{5\pi}{8})$

g) Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega t - \frac{2}{3})$ und $f_2(t) = 7 \cdot \cos(\omega t + 1)$

h) Überlagerung von $f_1(t) = 8 \cdot \cos(\omega t + \frac{3}{8})$ und $f_2(t) = 8 \cdot \cos(\omega t + \frac{3}{7})$