Test 1 Musterlösung

Klasse: 1Eb — Datum: 28. Oktober 2021

1. Geradengleichung

Durch die Gleichung $x_2 = mx_1 + c$ wird eine Gerade im x_1x_2-Koordinatensystem beschrieben. Dabei ist m die Steigung und d der y-Achsenabschnitt.

Geben Sie die Parameterdarstellung der Geraden an für

(a) $m = 4,\ d = -2.$

(b) $m = 0,\ d = 5$

(c) $3x_1 - 4x_2 = -4$

(d) Welche Gerade verläuft senkrecht zu $2x_1 + x_2 = 5$?

(e) Wie lautet die Geradengleichung für ($t \in \mathbb{R}$)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Allgemeines Bildungsgesetz

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

(c) Normalenvektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ auslesen, Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Aufpunkt bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Durch Einsetzen erhalten wir $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(d) Alle Geraden, deren Normalenvektor senkrecht auf dem Normalenvektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von g steht, z.B.

$$-1x_1 + 2x_2 = 5$$

Die Konstante kann frei gewählt werden.

(e) Geradengleichung: Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ auslesen, Normalenvektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, d.h. $5x - 2y = c$. Aufpunkt einsetzen: $5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 4$, also

$$5x - 2y = 4$$

2. Vektorraum **0CW6Z0**

Sind die unten angegebenen Mengen Vektorräume? Betrachten Sie nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar.

(a) Grundmenge V ($s \in \mathbb{R}$):

$$V = \{x | x = -2 \cdot s + 5\}$$

(b) Grundmenge W ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung:

(a) Wir stellen fest, dass $V = \mathbb{R}$, d.h. die Verschiebung um 5 ändert die Grundmenge nicht. Z.B. ist auch 0 in V. Für $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + y \in \mathbb{R} \text{ und } x \cdot \lambda \in \mathbb{R}$$

Also ist V abgeschlossen

(b) W ist abgeschlossen ($x, y, z, w, \lambda \in \mathbb{R}$):

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

3. Harmonische Schwingungen **U752WZ**

$$f(t) = 3.7082 \cdot \cos(\frac{2\pi}{9} t) - 11.4127 \sin(\frac{2\pi}{9} t)$$

(a) Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude der Superposition.

(b) Skizzieren Sie die Funktion über 3 Periodenlängen. Geben Sie 2 Nullstellen an.

(c) Zeichnen Sie in der Skizze die Periodenlänge und die Amplitude der Superposition ein.

Lösung:

$$f(t) = \underbrace{3.7082}_{=a} \cdot \cos(\frac{2\pi}{9} t) \underbrace{-11.4127}_{b} \sin(\frac{2\pi}{9} t)$$

(a) $\omega = \frac{2\pi}{9}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 9$, Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2} = 12$, Nullphasenwinkel $\varphi_0 = -\arctan \frac{b}{a} = 1.257$ ($72°$).

$$f(t) = 12 \cdot \cos(\frac{2\pi}{9} t + 1.257)$$

Alternativ: Nullphasenwinkel $\varphi_0 = 2.8274$ (162°)

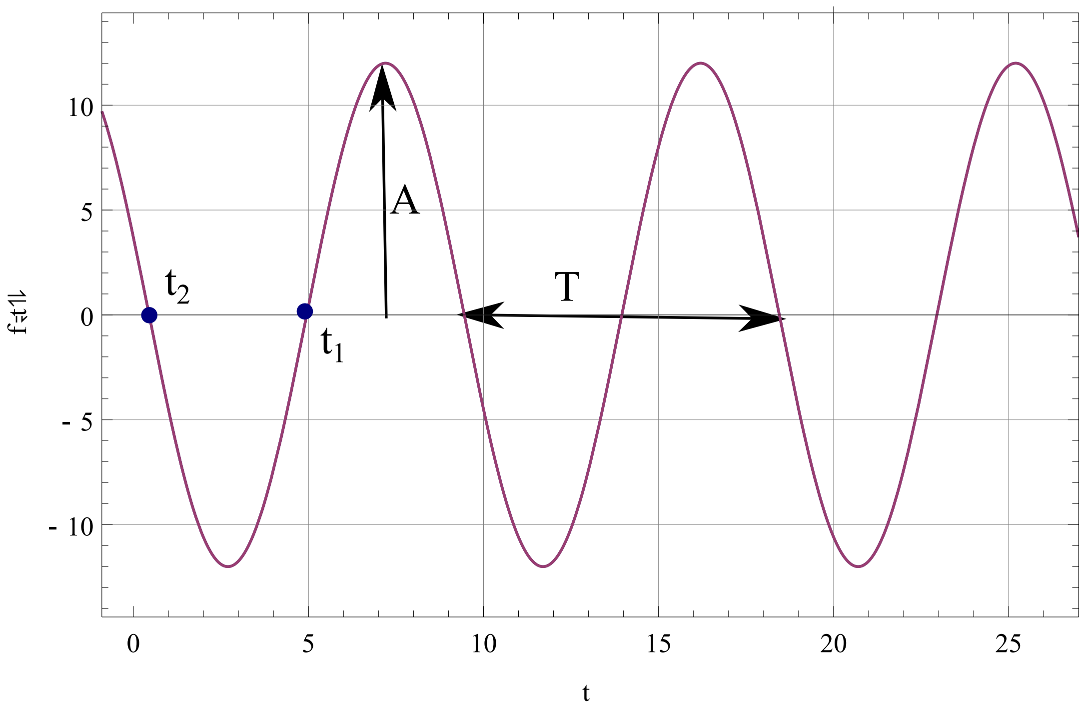
$$f(t) = 12 \cdot \sin(\frac{2\pi}{9}t - 0.3141)$$

(b) Nullstellen des Cosinus aus $\omega \cdot t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = 4.95$ (283.6°), und aus

$$\omega \cdot t + \varphi_0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_2 = 0.449999 \quad (25.78°)$$

Skizze unten.

(c) Skizze



4. Vektoren V6NSXH

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Komponenten folgender Vektoren an:

(a) $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ hat die Norm 16.2 und schliesst mit der x-Achse den Winkel $\alpha = 72°$ ein.

(b) $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist komplanar zu $\vec{f}$ und $\vec{g}$ ($\vec{b} \neq \vec{g}$ und $\vec{b} \neq \vec{f}$)

(c) $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$, steht senkrecht zu $\vec{f}$ und $\vec{g}$.

(d) $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ ist antiparallel zu $\vec{f}$ und hat die Länge 12.

(e) $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ ist die Projektion von $\vec{h}$ auf $\vec{f}$.

Lösung:

(a) $\vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.00608 \\ 15.4071 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \vec{f} + \vec{g} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (viele Möglichkeiten, alle entstehen durch Linearkombinationen von $\vec{f}$ und $\vec{g}$)

(c) $\vec{c} = \vec{f} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix}$ (viele Möglichkeiten, alle sind aber kollinear zu $\vec{c}$)

(d) $\vec{d} = -12 \cdot \frac{1}{|\vec{f}|} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} -9.6 \\ 0 \\ 7.2 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{e} = (\vec{h} \odot \vec{f} \cdot \frac{1}{|\vec{f}|}) \cdot \frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} \cdot = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 0 \\ -5.4 \end{pmatrix}$, $|\vec{f}| = 5$.

5. Lineares Gleichungssystem **5ZIASE**

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} L_1: & 2x & +2y & & = & 4 \\ L_2: & x & & +5z & = & 41 \\ L_3: & 3x & +6y & +z & = & 1 \end{array}\right|$$

(a) Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Zeilenstufenform.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

(c) Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Lösung:

(a) Zeilenstufenform z.B.

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} L_1': & x & & +5z & = & 41 \\ L_2': & & 2y & -10z & = & -78 \\ L_3': & & & 16z & = & 112 \end{array}\right|$$

(b) Einsetzen von unten nach oben ergibt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(c) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig. Die Gauss-Elimination (oben) führt nicht auf eine Linearkombination, die $\vec{0}$ ergibt.