Test 2

Klasse: 1Ec Datum: 16. Dez. 2021

1	2	3	4	5	Total	Note	EN

Zeit: 60 min. Max. 50 Punkte. Lösung *nicht* mit Bleistift, Lösungsweg muss ersichtlich sein! Zugelassen: handgeschriebene Zusammenfassung (2 Seiten, einseitig A4), Matlab und Taschenrechner ohne Speicher.

1. Homogene Lösung und partikuläre Lösung (10)

Wir betrachten das LGS

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & -5x & +2y & & = & -9 \\ E_2: & 3x & & +3z & = & 0 \end{array}\right| \text{ und } \vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Koeffizizientenmatrix $\mathbf{A}$ und die Inhomogenität $\vec{c}$ an.

(b) Welche der Vektoren oben sind homogene Lösungen des LGS, welche sind partikuläre Lösungen?

(c) Geben Sie alle Lösungen des LGS an.

(d) Wir betrachten das LGS

$$\mathbf{B} \odot \vec{x} = \vec{c}$$

mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, den Unbekannnten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und der Inhomogenität $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$. Es sei $\vec{x}_p$ eine partikuläre Lösung und $\vec{x}_h$ eine homogene Lösung. Zeigen Sie, dass $\vec{x}_p + \lambda \cdot \vec{x}_h$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung des LGS ist. Geben Sie beim Beweis die Namen der Rechengesetze an, die Sie verwenden.

2. Matrix-Algebra (10)

Betrachten Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der folgenden Ausdrücke existieren. Berechnen Sie dann die Resultate.

(a) $\mathbf{A} - \mathbf{A}^\intercal$

(b) $\mathbf{A} \odot \mathbf{C}$

(c) $\mathbf{B}^\intercal \odot \mathbf{B}$

(d) $\mathbf{A}^\intercal \odot \mathbf{B}$

(e) $\mathbf{B} \odot \mathbf{C}^\intercal$

3. Summen (10)

Berechnen Sie alle fehlenden Fragezeichen **oder** den Wert folgender Summen. Dokumentieren Sie den Lösungsweg ($a \in \mathbb{R}$).

(a) $\sum_{?}^{?}(1/5)^i = 1 + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{625}$

(b) $\sum_{i=1}^{24} \left[(i+5)^2 - 350\right]$

(c) $\sum_{i=15}^{26}(i+5)^3 = \sum_{i=0}^{?}(?)$

(d) $\sum_{i=1}^{12}(a+i)^2$

(e)

$$4+19+44+79+124+179+244+\ldots+49999$$

4. Lineare Abbildungen (12)

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind. Für lineare Abbildungen geben Sie die dazugehörige Matrix der Abbildungen an.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \end{pmatrix}$ und $a \in \mathbb{R}$

(a) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y) = \begin{pmatrix} 3 \cdot y \\ 2 \cdot y \end{pmatrix}$

(b) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$ definiert durch $L(\vec{v}) = (1 - v_2)$

(c) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$ definiert durch $L(\vec{v}) = \big(0\big)$

5. Lösungen von linearen Gleichungssystemen (10)

Bestimmen Sie freie Variablen und Pivot-Variablen und die allgemeine Lösung des LGS (in Parameterform).

(a)

$$\left|\begin{array}{lcccl} E_1: & x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ E_2: & & x_2 & -4x_3 & = & 1 \\ E_3: & & 2x_2 & -12x_3 & = & 3 \end{array}\right|$$

(b)

$$\left|\begin{array}{lcccl} E_1: & 6x_1 & -3x_2 & +4x_3 & = & 4 \end{array}\right|$$

(c)

$$\left|\begin{array}{lcccccc} E_1: & -40x_1 & -136x_2 & +80x_3 & & & = & 77 \\ E_2: & 12x_1 & +10x_2 & -24x_3 & & +77x_5 & = & 0 \\ E_3: & -142x_1 & +10x_2 & -24x_3 & +77x_4 & +154x_5 & = & 0 \end{array}\right|$$