Test 2 Musterlösung

Klasse: 1Eb | Datum: 16. Dez. 2021

1. Homogene Lösung und partikuläre Lösung **CNNZ8U**

Wir betrachten das LGS

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & -5x & +2y & & = & -9 \\ E_2: & 3x & & +3z & = & 0 \end{array}\right| \text{ und } \vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Koeffizizientenmatrix $\mathbf{A}$ und die Inhomogenität $\vec{c}$ an.

(b) Welche der Vektoren oben sind homogene Lösungen des LGS, welche sind partikuläre Lösungen?

(c) Geben Sie alle Lösungen des LGS an.

(d) Wir betrachten das LGS
$$\mathbf{B} \odot \vec{x} = \vec{c}$$
mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, den Unbekannnten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und der Inhomogenität $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$. Es sei $\vec{x}_p$ eine partikuläre Lösung und $\vec{x}_h$ eine homogene Lösung.
Zeigen Sie, dass $\vec{x}_p + \lambda \cdot \vec{x}_h$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung des LGS ist. Geben Sie beim Beweis die Namen der Rechengesetze an, die Sie verwenden.

Lösung:

(a) Koeffizientenmatrix
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Wir nennen die Liste der Koeffizienten $\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{b}$ die Inhomogenität.

(b) Lösungen überprüfen
$$\mathbf{A} \odot \vec{l} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} \odot \vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} \odot \vec{n} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Es sind also zwei partikuläre Lösungen und eine homogene.

(c) allgemeine Lösungen des LGS ($\lambda \in \mathbb{R}$):
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{l} + \lambda \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(d) Allgemeiner Beweis:

$$\mathbf{B} \odot (\vec{x}_p + \lambda \cdot \vec{x}_h) = \underbrace{\mathbf{B} \odot \vec{x}_p}_{=\vec{c}} + \mathbf{B} \odot (\lambda \cdot \vec{x}_h)$$

Es wird das Distributiv-Gesetz des Matrix-Produkts verwendet.

$$\vec{c} + \lambda \cdot \underbrace{(\mathbf{B} \odot \vec{x}_h)}_{=\vec{0}} = \vec{c}$$

Es wurde verwendet, dass das Matrix-Produkt und die Multiplikation mit einem Skalar kommutieren und dass das Matrix-Produkt assoziativ ist.

2. Matrix-Algebra **WEWKTK**

Betrachten Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der folgenden Ausdrücke existieren. Berechnen Sie dann die Resultate.

(a) $\mathbf{A} - \mathbf{A}^\intercal$
(b) $\mathbf{A} \odot \mathbf{C}$
(c) $\mathbf{B}^\intercal \odot \mathbf{B}$
(d) $\mathbf{A}^\intercal \odot \mathbf{B}$
(e) $\mathbf{B} \odot \mathbf{C}^\intercal$

Lösung:

(a) nicht definiert
(b) $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
(d) nicht definiert
(e) nicht definiert

3. Summen **PUY23W**

Berechnen Sie alle fehlenden Fragezeichen **oder** den Wert folgender Summen. Dokumentieren Sie den Lösungsweg ($a \in \mathbb{R}$). **Lösung:**

(a) Obere Grenze aus

$$\left(\frac{1}{5}\right)^i = \frac{1}{625} \ \Rightarrow \ \ln(\left(\frac{1}{5}\right)^i) = \ln(\frac{1}{625})$$

also

$$i \cdot \ln(\left(\frac{1}{5}\right)) = \ln(\frac{1}{625}) \ \Rightarrow \ i = 4$$

Die Summe ist also $\sum_{i=0}^{4} (1/5)^i$

(b) Wir zerlegen den Summanden

$$(i+5)^2 - 350 = i^2 + 10i + 25 - 350$$

und erhalten

$$\sum_{i=1}^{24} i^2 + 10 \cdot \sum_{i=1}^{24} i - 325 \sum_{i=1}^{24} 1 = 4900 + 10 \cdot 300 - 325 \cdot 24 = 100$$

(c) Indexverschiebung mit $k = i - 15$, d.h. $i = k + 15$

$$\sum_{i=15}^{26} (i+5)^3 = \sum_{k=15-15}^{26-15} (i+15+5)^3 = \sum_{k=0}^{11} (i+20)^3$$

(d) $\sum_{i=1}^{12} (a+i)^2 = \sum_{i=1}^{12} a^2 + 2a \cdot i + i^2 = 12 \cdot a^2 + 2a \cdot \sum_{i=1}^{12} i + \sum_{i=1}^{12} i^2 = 12a^2 + 156a + 650$

(e)

$$4 + 19 + 44 + 79 + 124 + 179 + 244 + \ldots + 49999 = \sum_{i=1}^{100} 5i^2 - 1 = 1\,691\,650$$

4. Lineare Abbildungen **KECN24**

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind. Für lineare Abbildungen geben Sie die dazugehörige Matrix der Abbildungen an.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \end{pmatrix}$ und $a \in \mathbb{R}$

Lösung:

(a) Vortest: $L(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. L ist möglicherweise linear.

Homogenität:

$$L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \lambda \cdot y \\ 2 \cdot \lambda \cdot y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot y \\ 2 \cdot y \end{pmatrix} = \lambda \cdot L(x, y)$$

Additivität:

$$L(x+a, y+b) = \begin{pmatrix} 3 \cdot (y+b) \\ 2 \cdot (y+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot y \\ 2 \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot b \\ 2 \cdot b \end{pmatrix} = L(x,y) + L(a,b)$$

Die Abbildung ist linear. Matrix:

$$M = [L(1,0), L(0,1)] = [\ \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix}\ ] = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Vortest: $L(\vec{0}) = 1$, d.h. L ist nicht linear.

(c) Vortest: $L(0,0) = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$, d.h. L ist möglicherweise linear.
Homogenität:

$$L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} = \lambda \cdot L(x,y)$$

Additivität:

$$L(x+a, y+b) = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} = L(x,y) + L(a,b)$$

Die Abbildung ist linear. Matrix:

$$M = [L(1,0), L(0,1)] = \left[\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix}00\end{pmatrix}$$

5. Lösungen von linearen Gleichungssystemen **WZB69X**

Bestimmen Sie freie Variablen und Pivot-Variablen und die allgemeine Lösung des LGS (in Parameterform).

(a)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ E_2: & & x_2 & -4x_3 & = & 1 \\ E_3: & & 2x_2 & -12x_3 & = & 3 \end{array} \right|$$

(b)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & 6x_1 & -3x_2 & +4x_3 & = & 4 \end{array} \right|$$

(c)

$$\left| \begin{array}{lrrrrrcr} E_1: & -40x_1 & -136x_2 & +80x_3 & & & = & 77 \\ E_2: & 12x_1 & +10x_2 & -24x_3 & & +77x_5 & = & 0 \\ E_3: & -142x_1 & +10x_2 & -24x_3 & +77x_4 & +154x_5 & = & 0 \end{array} \right|$$

Lösung:

(a) Wir bringen das LGS in Zeilenstufenform.

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ E_2: & & x_2 & -4x_3 & = & 1 \\ E_3 - 2E_2: & & 0 & -4x_3 & = & 1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

Das LGS ist konsistent mit genau einer Lösung.

(b) Das LGS ist in Zeilenstufenform. Ein Aufpunkt ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y und z sind freie Variablen. Die entsprechenden Richtungsvektoren sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösungen lässt sich darstellen als ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(c) LGS in Zeilenstufenform

$$\left| \begin{array}{lccccccc} E_1: & x_1 & & & -\frac{x_4}{2} & -\frac{x_5}{2} & = & 0 \\ E_1: & & x_2 & & & -\frac{5x_5}{2} & = & -\frac{3}{4} \\ E_1: & & & x_3 & -\frac{x_4}{4} & -\frac{9x_5}{2} & = & -\frac{5}{16} \end{array} \right|$$

mit der Lösung ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \\ -5/16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$