Test 3 (MSP)

Klasse: 1Ea, 1Eb — Datum: 3. Februar 2022

1	2	3	4	5	6	7	8	Total	Note

Zeit: 120 min. Max. 99 Punkte. Lösung *nicht* mit Bleistift, Lösungsweg muss ersichtlich sein! Zugelassen: handgeschriebene Zusammenfassung (8 Seiten, einseitig A4), Matlab und Taschenrechner ohne Speicher.

1. Ebenengleichung (12)

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} -46 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g und h liegten vollständig in der Ebene E. $s, t \in \mathbb{R}$

(a) Schneiden sich g und h? Wenn ja, wo?

(b) Bestimmen Sie Normalenvektor von E.

(c) Bestimmen Sie den Abstand von E vom Ursprung.

(d) Bestimmen Sie den Abstand von E zu $\vec{Q}$.

2. Vektorraum (14)

Sind die angegebenen Mengen Vektorräume? Begründen Sie mathematisch. Betrachten Sie nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \}$

(b) $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in [-1, 1] \}$

(c) $H = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \}$

(d) $J = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } |x^2 + 4y^2| \leq 10 \}$

3. Lineare Abbildungen (16)

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind. Für lineare Abbildungen geben Sie die dazugehörige Matrix der Abbildungen an.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \end{pmatrix}$ und $a \in \mathbb{R}$

(a) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix}$

(b) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \vec{v}$

(c) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$ definiert durch $L(\vec{v}) = \sin(v_2)$

(d) $L : \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1$ definiert durch $L(x) = 5 + 3 \cdot x$

(e) L ist die Drehung der xy-Ebene um den Punkt $\vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ um 60° im Uhrzeigersinn.

4. Determinante (12)

$$\mathbf{A} = \left(\vec{A}_1,\ \vec{A}_2,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_4\right) \in \mathbb{R}^{4\times4}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{A}_i$ sind die Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ und $\det(\mathbf{A}) = 3$. Geben Sie folgende Determinanten an

(a) $\det(\mathbf{R})$

(b) $\det(\mathbf{R} \odot \mathbf{R})$

(c) $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A})$

(d) $\det(\frac{1}{4} \cdot \left(\vec{A}_1,\ \vec{A}_2,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_4\right))$

(e) $\det(\left(\vec{A}_4,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_1,\ \vec{A}_2\right))$

(f) $\det(\left(5\vec{A}_4 - \vec{A}_3,\ \vec{A}_3 + \vec{A}_1,\ \vec{A}_1 - \vec{A}_2,\ \vec{A}_2\right))$

5. Linearkombination (10)

Stellen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -27 \\ 72 \\ -117 \end{pmatrix}$ als Summe der Vektoren $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ \vec{v}_3$ dar. Geben Sie *alle* möglichen Linearkombinationen an. Stellen Sie dafür zuerst das Problem zuerst als lineares Gleichungsystem dar.

(a) $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

(b) $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} = \{\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}\}$

6. Lösungen von linearen Gleichungssystemen (15)

Bestimmen Sie freie Variablen und Pivot-Variablen und die allgemeine Lösung des LGS (in Parameterform).

(a)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & 4x_1 & -6x_2 & -6x_3 & = & 12 \\ E_2: & & 3x_2 & 2x_3 & = & 6 \\ E_3: & & 9x_2 & 10x_3 & = & 30 \end{array} \right|$$

(b)

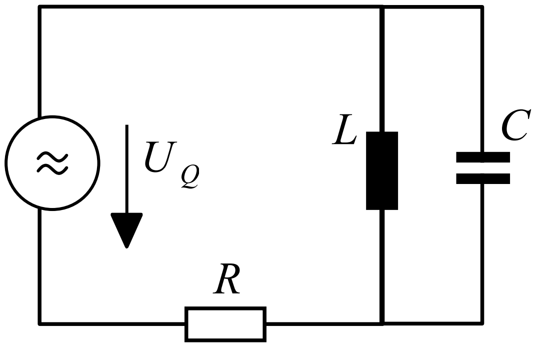
$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & 7x_1 & -3x_2 & +6x_3 & = & 4 \end{array} \right|$$

(c)

$$\left| \begin{array}{lrrrrrcr} E_1: & x_1 & -6x_2 & 4x_3 & 17x_4 & 3x_5 & = & -6 \\ E_2: & x_1 & -14x_2 & 9x_3 & 9x_4 & 7x_5 & = & 2 \\ E_3: & x_1 & -22x_2 & 15x_3 & 9x_4 & 13x_5 & = & 2 \end{array} \right|$$

7. Impedanzen (10)

Gegeben ist das Netzwerke mit den Komponenten $R = 6.66\,\mathrm{m}\Omega$, $C = 44\,\mu\mathrm{F}$ und $L = 222$ nH.



Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gilt

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t) + \hat{v} \cdot \sin(\omega t) \text{ mit } \hat{u} = 0.3246 \text{ V}, \hat{v} = -0.1497 \text{ V und } f = 25 \text{ kHz} .$$

Bestimmen Sie den Strom $i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ mit Hilfe der Zeigerdarstellung (nur stationäre Lösung).

Vorgehen:

(a) Matrix der Gesamtimpedanz bestimmen
(b) Quellspannung $\vec{u}$ in Zeigerform schreiben
(c) Strom in Zeigerform berechnen
(d) Umrechnen von der Zeigerform in die Form $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

8. Ionenleiter (10)

Basis:

$$\vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega t) \text{ und } \vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega t)$$

Wir betrachten den Operator $\mathcal{W}$. Er berechnet aus dem Strom durch einen Ionenleiter die resultierende Spannung. Für ein harmonisches Signal mit der Winkelfrequenz ω gilt

$$\mathcal{W}\big(i(t)\big) = -A_W \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega}^5} \cdot \frac{d^2}{d^2t} i(t)$$

(a) Zeigen Sie, dass der Operator (für harmonische Signale) linear ist.
(b) Berechnen Sie $\mathcal{W}\big(\cos(\omega t)\big)$,
(c) Berechnen Sie $\mathcal{W}\big(\sin(\omega t)\big)$.
(d) Bestimmen Sie schliesslich die Matrix des Operators $\mathcal{W}$ in der angegebenen Basis.