Test 3 (MSP) Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb Datum: 3. Februar 2022

1. Ebenengleichung QR5193

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} -46 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g und h liegten vollständig in der Ebene E. $s, t \in \mathbb{R}$

(a) Schneiden sich g und h? Wenn ja, wo?

(b) Bestimmen Sie Normalenvektor von E.

(c) Bestimmen Sie den Abstand von E vom Ursprung.

(d) Bestimmen Sie den Abstand von E zu $\vec{Q}$.

Lösung:

(a) Für den Schnittpunkt der Geraden betrachten wir zuerst nur die x-Komponente:

$$-40 + 6x = -4 \;\Rightarrow\; s = \frac{36}{6} = 6 \Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b) Normalenvektor

$$\vec{n}'' = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix} \;||\; \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} =: \vec{n}'$$

(c) Hessesche-Normalenform, Ansatz:

$$h(\vec{v}) = \frac{\vec{n}' \odot \vec{v} + c}{\|\vec{n}'\|}$$

$\vec{A}$ liegt in E:

$$h(\vec{A}) = \frac{-2 \cdot -40 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + c}{\|\vec{n}'\|} = 0 \;\Rightarrow\; c = -98$$

Abstand zum Ursprung $h(\vec{0}) = 14$.

(d) Abstand zu $\vec{Q}$:

$$h(\vec{Q}) = \frac{92 + 108 + 45 - 98}{7} = \frac{147}{7} = 21$$

.

2. Vektorraum **KSW14V**

Sind die angegebenen Mengen Vektorräume? Begründen Sie mathematisch. Betrachten Sie nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$

(b) $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in [-1, 1]\}$

(c) $H = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$

(d) $J = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $|x^2 + 4y^2| \leq 10$ und $x, y \in \mathbb{R}\}$

Lösung:

(a) V ist ein Vektorraum:

$$\lambda \cdot (a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = (\lambda \cdot a) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in V$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (a + b) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in V$$

(b) Gegenbeispiel: $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$.

$$\vec{Q} = 5 \cdot \vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \notin W$$

(c) H, ist ein Vektorraum, denn $H = V$

(d) Gegenbeispiel: $\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in J$.

$$\vec{S} = 10 \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \notin J$$

3. Lineare Abbildungen **KECN24**

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind. Für lineare Abbildungen geben Sie die dazugehörige Matrix der Abbildungen an.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \end{pmatrix}$ und $a \in \mathbb{R}$

Lösung:

(a) Vortest: $L(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. L ist möglicherweise linear.
Homogenität:

$$L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot z \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot L(x,y,z)$$

Additivität:

$$L(x+a, y+b, z+c) = \begin{pmatrix} z+c \\ z+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = L(x,y,z) + L(a,b,c)$$

Die Abbildung ist linear. Matrix:

$$M = [L(1,0,0), L(0,1,0), L(0,0,1)] = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Vortest: $\mathbf{M} \odot \vec{0} = \vec{0}$. Allgemein gilt

$$L(\lambda \cdot \vec{v}) = \mathbf{M} \odot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}) = \lambda \cdot L(\vec{v})$$

und

$$L(\vec{v} + \vec{w}) = \mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w} = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$$

L ist also linear. Die Matrix der Abbildung ist eindeutig (d.h. es gibt nur eine), und war in der Aufgabenstellung gegeben.

(c) Vortest: $L(\vec{0}) = 0$. Homogenität

$$L(\lambda \cdot \vec{v}) = \sin(\lambda \cdot v_2) \neq \lambda \cdot \sin(v_2) = \lambda \cdot L(\vec{v})$$

d.h. L ist nicht linear.

(d) Vortest: $L(\vec{0}) = 5$. Die Abbildung ist nicht linear.

(e) Vortest: $L(\vec{0}) \neq \vec{0}$. Die Abbildung ist nicht linear.

4. Determinante **DRRY3F**

$$\mathbf{A} = \left(\vec{A}_1,\ \vec{A}_2,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_4\right) \in \mathbb{R}^{4\times 4}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{A}_i$ sind die Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ und $\det(\mathbf{A}) = 3$. Geben Sie folgende Determinanten an

(a) $\det(\mathbf{R})$

(b) $\det(\mathbf{R} \odot \mathbf{R})$

(c) $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A})$

(d) $\det(\frac{1}{4} \cdot \left(\vec{A}_1,\ \vec{A}_2,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_4\right))$

(e) $\det(\left(\vec{A}_4,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_1,\ \vec{A}_2\right))$

(f) $\det(\left(5\vec{A}_4 - \vec{A}_3,\ \vec{A}_3 + \vec{A}_1,\ \vec{A}_1 - \vec{A}_2,\ \vec{A}_2\right))$

Lösung:

(a) $\det(\mathbf{R}) = 3$

(b) $\det(\mathbf{R} \odot \mathbf{R}) = 9$

(c) $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}) = 9$

(d) $\det(\frac{1}{4} \cdot (\vec{A}_1,\ \vec{A}_2,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_4)) = (\frac{1}{4})^4 \cdot \det(\mathbf{A}) = \frac{3}{4^4} \approx 0.011718$

(e) $\det((\vec{A}_4,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_1,\ \vec{A}_2)) = -1 \cdot \det(\mathbf{A}) = -3$

(f) Mit Eliminationen erhalten wir

$$\det((5\vec{A}_4 - \vec{A}_3,\ \vec{A}_3 + \vec{A}_1,\ \vec{A}_1 - \vec{A}_2,\ \vec{A}_2)) = 5{\cdot}\det((\vec{A}_4,\ \vec{A}_3,\ \vec{A}_1,\ \vec{A}_2)) = 5{\cdot}(-1){\cdot}3 = -15$$

5. Linearkombination D7EFT1

Stellen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -27 \\ 72 \\ -117 \end{pmatrix}$ als Summe der Vektoren $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ dar. Geben Sie *alle* möglichen Linearkombinationen an. Stellen Sie dafür zuerst das Problem zuerst als lineares Gleichungsystem dar.

(a) $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ (b) $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} = \{ \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \}$

Lösung

(a) Wir suchen die drei Vorfaktoren $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$. Die Koeffizientenmatrix lautet dann

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 0 & 1 & 1 & -27 \\ 1 & 0 & 1 & 72 \\ 1 & 1 & 0 & -117 \end{array}\right]$$

Die Gauss-Elimination führt auf

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -108 \\ 0 & 0 & 1 & 81 \end{array}\right]$$

mit der Lösung $\lambda_1 = -9,\ \lambda_2 = -108,\ \lambda_3 = 81$ oder

$$\vec{w} = -9 \cdot \vec{v}_1 - 108 \cdot \vec{v}_2 + 81 \cdot \vec{v}_3$$

(b) Wir suchen die drei Vorfaktoren $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$. Die Koeffizientenmatrix lautet dann

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 7 & -8 & 9 & -27 & \\ 1 & 4 & -9 & 72 & \\ 3 & -4 & 5 & -117 & \end{array}\right]$$

Wir wenden das Gauss-Jordan-Verfahren an und erhalten

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.4444 & -5 \\ 0 & 1 & -0.1111 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

mit der Lösung $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ (freier Parameter), $\lambda_2 = 8 + \frac{1}{9} \cdot \lambda_3,\ \lambda_1 = -5 + \frac{-4}{9} \cdot \lambda_3$ oder

$$\vec{w} = (-5 + \frac{-4}{9} \cdot \lambda_3) \cdot \vec{v}_1 + (8 + \frac{1}{9} \cdot \lambda_3) \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{v}_3$$

6. Lösungen von linearen Gleichungssystemen **WZB69X**

Bestimmen Sie freie Variablen und Pivot-Variablen und die allgemeine Lösung des LGS (in Parameterform).

(a)

$$\left|\begin{array}{lcccc} E_1: & 4x_1 & -6x_2 & -6x_3 & = & 12 \\ E_2: & & 3x_2 & 2x_3 & = & 6 \\ E_3: & & 9x_2 & 10x_3 & = & 30 \end{array}\right|$$

(b)

$$\left|\begin{array}{lccccc} E_1: & 7x_1 & -3x_2 & +6x_3 & = & 4 \end{array}\right|$$

(c)

$$\left|\begin{array}{lcccccc} E_1: & x_1 & -6x_2 & 4x_3 & 17x_4 & 3x_5 & = & -6 \\ E_2: & x_1 & -14x_2 & 9x_3 & 9x_4 & 7x_5 & = & 2 \\ E_3: & x_1 & -22x_2 & 15x_3 & 9x_4 & 13x_5 & = & 2 \end{array}\right|$$

Lösung:

(a) Wir bringen das LGS in Zeilenstufenform.

$$\left|\begin{array}{lccccc} E_1': & x_1 & & & = & 7.5 \\ E_2': & & x_2 & & = & 0 \\ E_3': & & 0 & x_3 & = & 3 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das LGS ist konsistent mit genau einer Lösung.

(b) Das LGS ist in Zeilenstufenform. Ein Aufpunkt ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y und z sind freie Variablen. Die entsprechenden Richtungsvektoren sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(entweder löst man das homogene LGS oder benutzt in Matlab `null`) Die allgemeine Lösungen lässt sich darstellen als $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(c) LGS in Zeilenstufenform

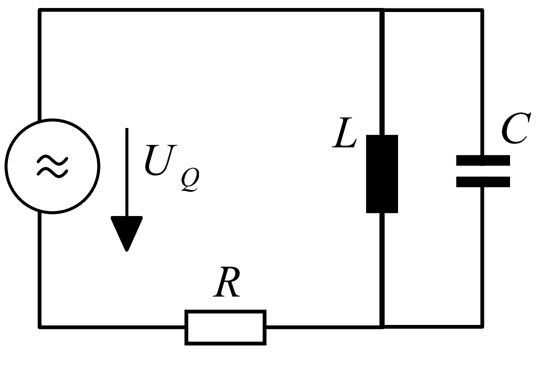
$$\left| \begin{array}{lccccccc} E_1: & x_1 & & & +21x_4 & -\frac{x_5}{2} & = & -10 \\ E_1: & & x_2 & & 6x_4 & +\frac{3x_5}{4} & = & -6 \\ E_1: & & & x_3 & +8x_4 & +2x_5 & = & -8 \end{array} \right|$$

mit der Lösung $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Impedanzen 7PLTU1

Gegeben ist das Netzwerke mit den Komponenten $R = 6.66\,\mathrm{m}\Omega$, $C = 44\,\mu\mathrm{F}$ und $L = 222$ nH.



Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gilt

$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t) + \hat{v} \cdot \sin(\omega t)$ mit $\hat{u} = 0.3246$ V, $\hat{v} = -0.1497$ V und $f = 25$ kHz .

Bestimmen Sie den Strom (nur stationäre Lösung) als harmonische Schwingung mit Hilfe der Zeigerdarstellung.

Vorgehen:

(a) Matrix der Gesamtimpedanz bestimmen

(b) Quellspannung $\vec{u}$ in Zeigerform schreiben

(c) Strom in Zeigerform berechnen

(d) Umrechnen von der Zeigerform in die Form $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Lösung:
Wir rechnen in der Basis in der Basis $\vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega \cdot t)$ und $\vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega \cdot t)$.

(a) Wir berechnen die Winkelfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f = 1.570 \cdot 10^5$ Hz.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_t &= \mathbf{Z}_R + \left[(\mathbf{Z}_C)^{-1} + (\mathbf{Z}_L)^{-1}\right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0067 & 0.0459 \\ -0.0459 & 0.0067 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Quellspannung $\vec{u}$ in Zeigerform $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0.3246 \\ -0.1497 \end{pmatrix}$ (SI-Einheiten, also V).

(c) Strom in Zeigerform berechnen

$$\vec{i} = \mathbf{Z_t}^{-1} \odot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4.1942 \\ 6.4570 \end{pmatrix}$$

(d) Der Strom hat die Amplitude

$$\hat{i} = \sqrt{(4.1942)^2 + (6.4570)^2} = 7.7 \text{ A}$$

Die Phase ist

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4.1942}{6.4570}\right) = 0.5761 \quad (= 33^\circ)$$

also (in A):

$$i(t) = 7.7 \cdot \sin(\omega t + 0.5761)$$

oder

$$i(t) = 7.7 \cdot \cos(\omega t - 0.9947)$$

8. Ionenleiter 31ISMX

Basis:

$$\vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega t) \text{ und } \vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega t)$$

Wir betrachten den Operator $\mathcal{W}$. Er berechnet aus dem Strom durch einen Ionenleiter die resultierende Spannung. Für ein harmonisches Signal mit der Winkelfrequenz ω gilt

$$\mathcal{W}\big(i(t)\big) = -A_W \cdot \frac{1}{\omega^{5/2}} \cdot \frac{d^2}{d^2 t} i(t)$$

(a) Zeigen Sie, dass der Operator (für harmonische Signale) linear ist.

(b) Berechnen Sie $\mathcal{W}\big(\cos(\omega t)\big)$,

(c) Berechnen Sie $\mathcal{W}\big(\sin(\omega t)\big)$.

(d) Bestimmen Sie schliesslich die Matrix des Operators $\mathcal{W}$ in der angegebenen Basis.

Lösung:

(a) Linearität

$$\mathcal{W}\big(\lambda \cdot i(t)\big) = -A_W \cdot \frac{1}{\omega^{5/2}} \cdot \frac{d^2}{d^2t}(\lambda \cdot i(t)) = \lambda \cdot \mathcal{W}\big(i(t)\big)$$

und

$$\mathcal{W}\big(f(t) + g(t)\big) = -A_W \cdot \frac{1}{\omega^{5/2}} \cdot \frac{d^2}{d^2t}\big(f(t) + g(t)\big) = \mathcal{W}\big(f(t)\big) + \mathcal{W}\big(g(t)\big)$$

Dabei nützen wir aus, dass die Ableitung (und also auch die zweite Ableitung) linear ist.

(b) Wir bereiten vor

$$[\cos(\omega t)]' = -\omega \cdot \sin(\omega t)$$

und

$$[\cos(\omega t)]'' = -\omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

Genau gleich:

$$[\sin(\omega t)]'' = -\omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

Also

$$\mathcal{W}\big(\cos(\omega t)\big) = -A_W \cdot \frac{1}{\omega^{5/2}} \cdot \big[-\omega^2 \cdot \cos(\omega t)\big] \mathrel{\widehat{=}} A_W \cdot \frac{1}{\omega^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathcal{W}\big(\sin(\omega t)\big) = -A_W \cdot \frac{1}{\omega^{5/2}} \cdot \big[-\omega^2 \cdot \sin(\omega t)\big] \mathrel{\widehat{=}} A_W \cdot \frac{1}{\omega^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Matrix des Operators $\mathcal{W}$

$$\mathbf{W} = A_W \cdot \frac{1}{\omega^{1/2}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$