WMS1
www.adams-science.org

Serie 5, Musterlösung

Klasse: W1b, W1c | Datum: HS 22

1. Kosten- und Erlösfunktion **PF5EG7**

Die Firma Regional-Map druckt Buspläne und hat monatliche Fixkosten von 50 000 CHF. Im Monat können maximal 40 000 Pläne gedruckt werden. Die Herstellung eines Planes kostet 4 Franken und jeder Plan kann für 6 Franken verkauft werden.

(a) Es werden 10 000 Pläne gedruckt. Wie hoch sind die Kosten in diesem Monat?

(b) Es werden x Pläne gedruckt. Wie hoch sind die Kosten in diesem Monat? (Kostenfunktion, $K(x)$)

(c) Es werden 10 000 Pläne gedruckt. Wie hoch ist der Erlös in diesem Monat?

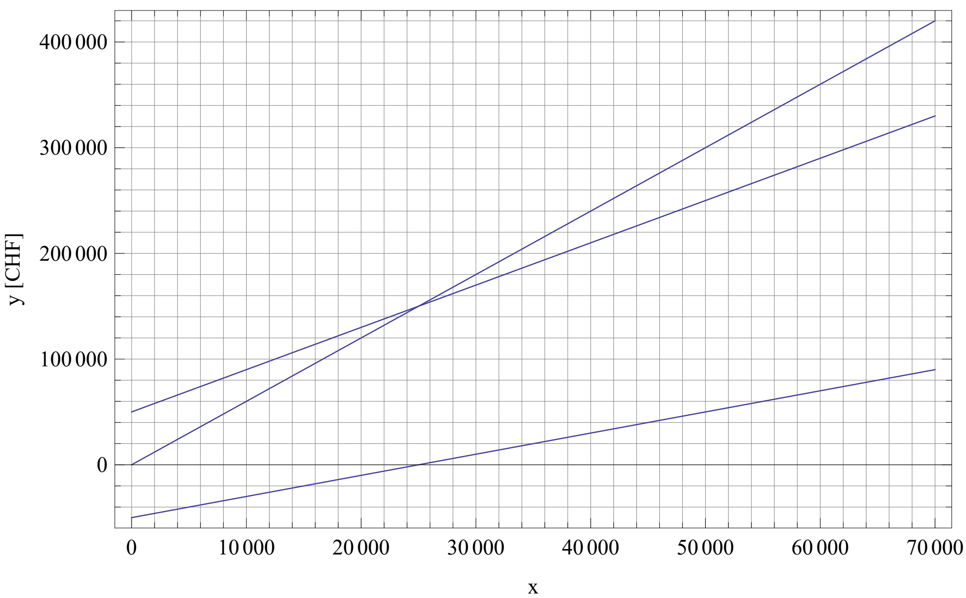
(d) Es werden x Pläne gedruckt. Wie hoch ist der Erlös in diesem Monat? (Erlösfunktion, $E(x)$)

(e) Wie gross ist der Gewinn pro Monat, wenn 10 000 Pläne gedruckt werden? Und bei x gedruckten Plänen? (Gewinnfunktion, $G(x)$).

(f) Bei welcher Produktionsmenge x arbeitet die Firma kostendeckend?

(g) Wie viel Stück müssen produziert werden um einen Gewinn von 20 000 CHF zu erzielen?

(h) Unten finden Sie die den Graphen von $K(x)$, $E(x)$ und $G(x)$. Welcher ist welcher? Wo sind die Fixkosten ersichtlich? Wie könnten Sie daraus den Erlös pro Stück und die Herstellungskosten pro Stück bestimmen?



Lösung:

(a) Kosten in diesem Monat 90000 CHF.

(b) Kosten bei der Produktion von x Plänen $K(x) = 50000 + 4x$.

(c) Erlös in diesem Monat 60000 CHF.

(d) Erlös bei der Produktion von x Plänen $E(x) = 6x$.

(e) Gewinn in diesem Monat Monat, wenn $E - K = 60000 - 90000 = -30\,000$ CHF. Allgemein

$$G(x) = E(x) - K(x) = 6x - (50000 + 4x) = 2x - 50000$$

(f) Kostendeckend bei $G(x) = 0$, also $x = 25000$ CHF.

(g) Gewinn von $G(x) = 20\,000$ CH bei $x = 35000$ Stück.

(h) Die Fixkosten sind bei $K(0)$ ersichtlich. Der Erlös pro Stück ist z.B.

$$m = \frac{420\,000 - 0}{70\,000 - 0} = 6\,\text{CHF}$$

und die Herstellungskosten pro Stück

$$n = \frac{330\,000 - 150\,000}{70\,000 - 25\,000} = 4\,\text{CHF}$$

2. Geraden zeichnen **HZRXKR**

Zeichnen Sie die Geraden

(a) $x = 2.5$

(b) $y = 3/4\,x + 1.5$

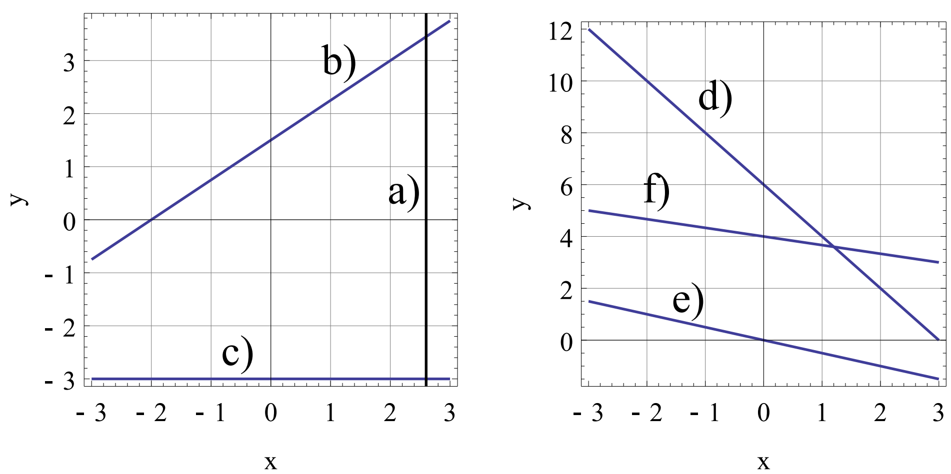
(c) $y = -3$

(d) $y = -2x + 6$

(e) $y = -1/2x$

(f) $x + 3y - 12 = 0$

Lösung:



3. Gleichung der Geraden bestimmen **NB6KBS**

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{R} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{S} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix},\ \vec{T} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) $\vec{P}, \vec{T}$
(b) $\vec{Q}, \vec{R}$
(c) $\vec{P}, \vec{R}$
(d) $\vec{S}, \vec{T}$
(e) $\vec{Q}, \vec{T}$

Lösung:

(a) $m = 0$, $f(x) = 4$
(b) Die Steigung kann nicht berechnet werden. Wir finden

$$x = -4$$

(c) $m = \frac{3}{2}$, $f(x) = \frac{3x}{2} + 4$
(d) $m = 2$, $f(x) = 2x - 12$
(e) $m = -\frac{1}{6}$, $f(x) = \frac{16}{3} - \frac{x}{6}$

4. Geradengleichung **E5D4UK**

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden

(a) g geht durch $\vec{P}$ und $\vec{Q}$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) h geht durch $\vec{R}$ und $\vec{S}$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \ \vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

(c) k geht durch $\vec{T}$ und $\vec{V}$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{V} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ -4.1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) $m = 0.714286$, $f(x) = 0.714286x + 2.21429$
(b) $m = -\frac{5}{12}$, $f(x) = \frac{7}{4} - \frac{5x}{12}$
(c) $m = -2.81818$, $f(x) = 4.91818 - 2.81818x$

5. Spiegelung **BXSYTA**

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4$$

Bestimmen Sie die Gleichung der folgenden Geraden

(a) g: Spiegelung von $f(x)$ an der y-Achse

(b) h: Spiegelung von $f(x)$ an der x-Achse

(c) k: Spiegelung von $f(x)$ an der Geraden $y = x$

Lösung:
Aus einer Skizze, oder durch die Abbildung von zwei Punkten, die auf der Geraden liegen, z.B. $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir folgendes:

(a) Spiegelung der y-Achse: y-Achsen-Abschnitt bleibt gleich, Steigung m wird zu $-m$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$$

(b) Spiegelung der x-Achse: y-Achsen-Abschnitt c wird zu $-c$, Steigung m wird zu $-m$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x - 4$$

(c) Die Bildpunkte sind $\vec{P}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$. Die Gerade lautet

$$k(x) = -16 + 2x$$

6. Schnittpunkte **BBS1G2**

Berechnen Sie den Schnittpunkt von $f(x)$ und $g(x)$

(a) $f(x) = x - 5$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

(b) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ und $g(x) = 2x + 7$

(c) $f(x) = \frac{3}{5}x + 1$ und $g(x) = \frac{2}{5}x + 10$

(d) $f(x) = -3.7$ und $g(x) = -4x - 3$

Lösung:

(a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -18/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{R} = \begin{pmatrix} 45 \\ 28 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{S} = \begin{pmatrix} 0.175 \\ -3.7 \end{pmatrix}$

7. Schnittpunkte 2 **2W43QK**

Bestimmen Sie die zweite Gerade und den Schnittpunkt.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$. $g(x)$ ist parallel zu $f(x)$ und geht durch $\vec{P} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}$.

(b) $h(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$. $k(x)$ ist parallel zu $h(x)$ und geht durch $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5.5 \end{pmatrix}$.

(c) $l(x) = 2x - 4$. $m(x)$ ist senkrecht zu $l(x)$ und geht durch $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) $n(x) = -\frac{3}{4}x + 1$. $p(x)$ ist senkrecht zu $n(x)$ und geht durch $\vec{S} = \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Parallele Geraden haben die selbe Steigungung, also $g(x) = \frac{1}{2}(x-50)+100 = \frac{1}{2}x + 75$. Parallele Geraden schneiden sich nicht.

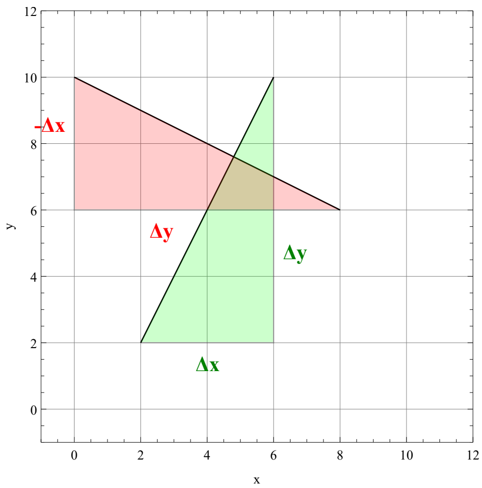
(b) $k(x) = -\frac{3}{5}(x-4) + 5.5 = -\frac{3}{5}x + 7.9$

(c) Eine kleine Skizze zeigt, dass die senkrechte Gerade das Steigungsdreieck

$$m' = \frac{-\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{m}$$

hat. Also $m(x) = -\frac{1}{2}(x-0)+0 = -\frac{1}{2}x$ und der Schnittpunkt ist $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$.

(d) $p(x) = \frac{4}{3}(x-9) - \frac{7}{4} = \frac{4}{3}x - \frac{55}{4}$ und der Schnittpunkt ist $\vec{B} = \begin{pmatrix} 177/25 \\ -431/100 \end{pmatrix}$.



8. Bewegungsdiagramme **VQCPX7**

(a) Berechnen Sie alle auftretenden Geschwindigkeiten.

(b) Geben Sie für A und B den Ort $s(t)$ zu jemdem Zeitpunkt an (vor T).

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Treffpunktes $\vec{T}$ rechnerisch.

(d) Zu welchem Zeitpunkt (vor $\vec{T}$) sind A und B genau 20 km voneinander entfernt? (rechnerische Lösung)

Lösung:

(a) Die Geschwindigkeiten sind die Steigungen der Geraden, also für A vor T

$$v = \frac{60-20}{1}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ und nach T } v = \frac{20}{1+2/3}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 12\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Für B

$$v = \frac{-100}{5/3}\frac{\text{km}}{\text{h}} = -60\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

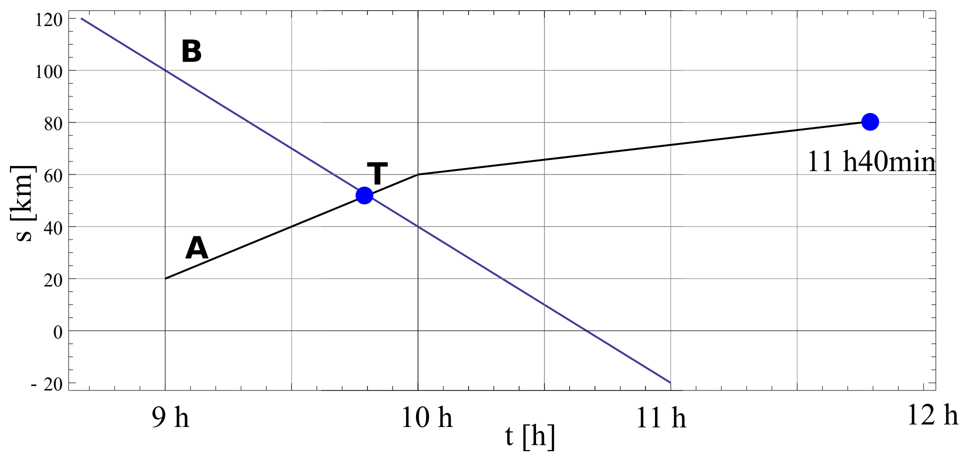
(b) $s_A(t) = 40\frac{\text{km}}{\text{h}}t + 20\text{km}$ und $s_B(t) = -60\frac{\text{km}}{\text{h}}t + 100\text{km}$

(c) Aus $s_A(t) = s_B(t)$ also $40\frac{\text{km}}{\text{h}}t + 20\text{km} = -60\frac{\text{km}}{\text{h}}\text{t} + 100\text{km}$ berechnen wir $t = \frac{4}{5}\text{h} = 45\text{min}$ und $s_A(t = \frac{4}{5}\text{h}) = 52$ km. Also

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 48\text{min} \\ 52\text{km} \end{pmatrix}.$$

(d) Distanz genau 20 km: $s_A(t)+10 = s_B(t)$ also $40\frac{\text{km}}{\text{h}}t+30\text{km} = -60\frac{\text{km}}{\text{h}}\text{t}+100\text{km}$ berechnen wir $t = \frac{7}{1}0\text{h} = 42\text{min}$ und $s_A(t = \frac{7}{1}0\text{h}) = 48$ km. Also

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 42\text{min} \\ 48\text{km} \end{pmatrix}.$$



9. Öltank **HXVKTZ**

Ein Öltank mit 6000 Liter Fassungsvermögen wird gleichmässig mit Heizöl gefüllt. Nach 6 Minuten sind 2100 Liter im Tank, eine Viertelstunde später 4350 Liter.

(a) Geben Sie die Funktion an, die für die Zeit t (Fülldauer) den Füllstand $f(t)$ berechnet.

(b) Zeichnen Sie den Graphen von $f(t)$.

(c) War der Tank bei Beginn der Füllung leer?

(d) Wie lange dauert es, bis der Tank voll ist?

Lösung:

(a) Bekannt sind die Punkte im Diagramm

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2100 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6+15 \\ 4350 \end{pmatrix}$$

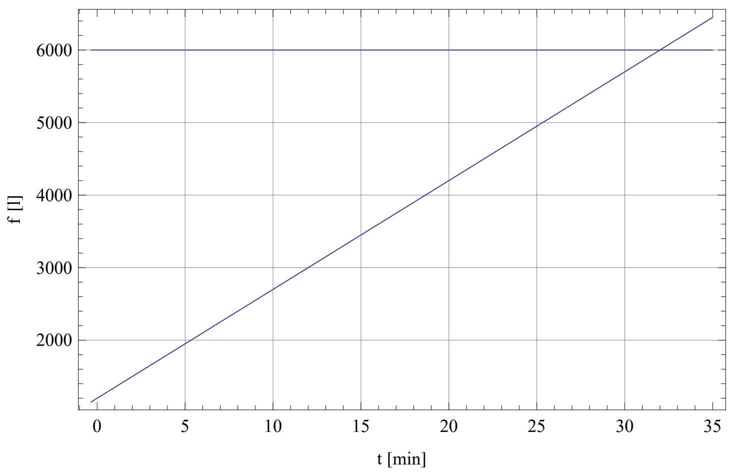
In der ersten Komponenten schreiben wir die Zeit in min, in der zweiten den Füllstand in Liter. So ergibt sich

$$m = \frac{4350 - 2100}{21 - 6} = 150 \text{ also } f(t) = 150(t-6) + 2100 = 150t + 1200$$

(b) Skizze

(c) $f(t=0) = 1200$, d.h. es waren 1200 am Anfang drin.

(d) Wir lösen $f(t) = 150t + 1200 = 6000$ nach t auf und erhalten $t = 32$ min.



10. Sonnenkollektoren **8X9BNW**

Sonnenkollektoren wandeln Lichtenergie in Wärme um, die in einen Warmwasserspeicher abgeführt wird. Die benötigte Kollektorfläche hängt linear vom Volumen des Speichers ab. Bei einer Speichertemperatur von 45°C wird für 200 Liter eine Kollektorfläche von $3\,\mathrm{m}^2$, für 500 Liter $7\,\mathrm{m}^2$ empfohlen. Pro Person wird mit einem Verbrauch von 50 Liter Warmwasser am Tag gerechnet. Das Speichervolumen sollte 50% über dem Verbrauch liegen.

(a) Wieviel Wasser soll im Tank gespeichert werden für eine Person?

(b) Ergänzen Sie die Tabelle.

(c) Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$, die für die Personenzahl x die Kollektorfläche berechnet.

(d) Wie gross sollte die Kollektorfläche bei einem 4-Personen-Haushalt sein?

(e) Für wie viele Personen reicht eine Kollektorfläche von $8\,\mathrm{m}^2$?

Lösung:

(a) Pro Person brauchen wir 70 l im Tank.

(b) Tabelle

(c) Bekannt sind die Punkte im Diagramm

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2.\dot{6} \\ 200 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6.\dot{6} \\ 500 \end{pmatrix}$$

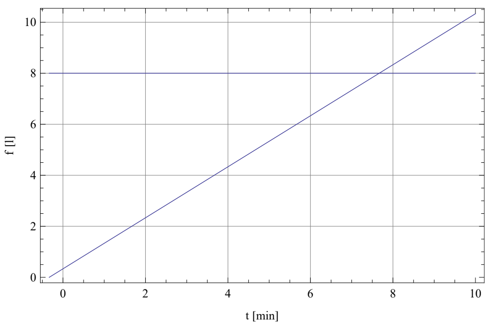
In der ersten Komponenten schreiben wir die Anzahl Personen, in der zweiten die Kollektorfläche. So ergibt sich

$$m = \frac{500 - 200}{6.\dot{6} - 2.\dot{6}} = \frac{1}{3} \text{ also } f(x) = \frac{1}{3}(x - 2.\dot{6}) + 200 = \frac{1}{3} + x$$

(d) 4-Personen-Haushalt: $f(x = 4) = 13/3 = 4.\dot{3}$

(e) Wir lösen $\frac{1}{3} + x = 8$ nach x auf und erhalten $x = 7.\dot{6}$, d.h. 8 m^2 reichen für 7 Personen.

Fläche	3 m^2	7 m^2
Tank [l]	200	500
Personen	$2.\dot{6}$	$6.\dot{6}$



11. Quadrat **ATM4E3**

Wir betrachten die Geraden f_c, mit $0 < c \leq 10$. Für jedes c entsteht eine neue gerade. Wir nennen das Geradenschar. und

(a) Wie lautet die Geradengleichung für $c = 4$?

(b) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Schar, d.h. die Geradengleichung für ein allgemeines c.

(c) Erzeugen Sie die Schar für $c = \{1, 2, \ldots, 10\}$

Lösung:

(a) Bekannt sind die Punkte im Diagramm

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

So ergibt sich

$$m = \frac{10 - 4}{4 - 0} = \frac{3}{2} \text{ also } f(x) = \frac{3}{2}(x - 0) + 4 = \frac{3}{2}x + 4$$

(b) Wir schreiben allgemein, d.h. ohne c zunächst festzulegen: Bekannt sind die Punkte im Diagramm

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \text{ und } \vec{Q} = \begin{pmatrix} c \\ 10 \end{pmatrix}$$

So ergibt sich

$$m = \frac{10-c}{c-0} = \frac{10-c}{c} \text{ also } f(x) = \frac{10-c}{c}(x-0) + c = \frac{10-c}{c} \cdot x + c$$

(c) Für $c = 1$: $f(x) = 1 + 9x$, für $c = 2$: $f(x) = 2 + 4x$, ... für $c = 10$: $f(x) = 10$