Serie 7, Musterlösung

Klasse: W1b, W1c Datum: HS 22

Definition Geschwindigkeit, SI-Einheiten: $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

s Strecke in m, t Zeit in s

Bewegungsgesetz bei gleichmässiger Geschwindigkeit:

$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0 \; .$$

dabei ist s_0 der Ort an dem das Objekt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ steht.
Für ein Objekt, das sich mit gleichmässiger Geschwindigkeit v_0 bewegt und das zum Zeitpunkt t_1 beim Ort s_1 steht, können wir die Position $s(t)$ mit folgendem Ausdruck beschreiben

$$s(t) = v_0 \cdot (t - t_1) + s_1 \; .$$

1. Joggen **096896**

Es sind zwei Positionen der Person bekannt. Ausserdem wissen wir, dass die Geschwindigkeit konstant ist.

$$s(t = 90\,\mathrm{s}) = 60\,\mathrm{m}, \;\; s(t = 3678\,\mathrm{s}) = 9030\,\mathrm{m}$$

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in m/s und km/h

(b) Zeichnen Sie ein Diagramm mit den Achsen s (Position) vs. t (Zeit).

(c) Zeichnen Sie ein Diagramm mit den Achsen v (Geschwindigkeit) vs. t (Zeit).

(d) Wo ist in den Diagrammen die Geschwindigkeit ersichtlich — im $s{-}t$-Diagramm und im $v - t$-Diagramm? Wie würden sich die Diagramme verändern, falls die Person doppel so schnell unterwegs wäre?

(e) Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck $s(t)$ an, der beschreibt, wo die Person zum Zeitpunkt t steht.

(f) Testen Sie ihren Ausdruck bei $t = 90$ s und $t = 3678$ s.

(g) Berechnen Sie die Position bei $t = 0$ s, $t = 120$ s und $t = 60$ s.

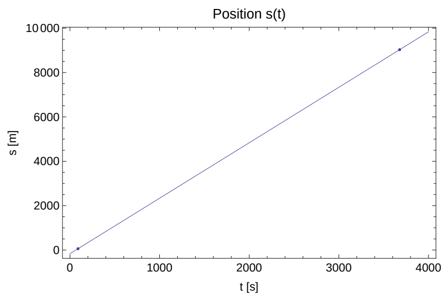
(h) Was bedeutet eine negative Position, also $s(t) < 0$?

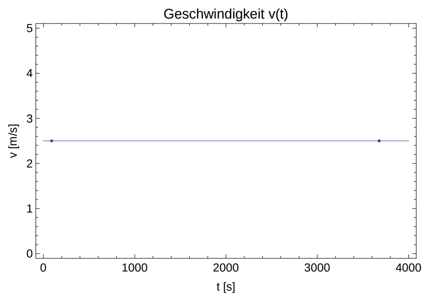
(i) Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck $v(t)$ an, der beschreibt, welche Geschwindigkeit die Person zum Zeitpunkt t hat.

(j) Testen Sie Ihren Ausdruck bei $t = 90$ s und $t = 3678$ s.

(k) Berechnen Sie die Geschwindigkeit bei $t = 0$ s, $t = 120$ s und $t = 60$ s.

Lösung:





(a) Geschwindigkeit

$$v = \frac{9030 - 60}{3678 - 90}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 2.5\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.5 \cdot \frac{3600}{1000}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 9\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(b) $s - t$-Diagramm

(c) $v - t$-Diagramm

(d) Im $s - t$-Diagramm zeigt sich die Geschwindigkeit als Steigung der Geraden: eine doppelte Geschwindigkeit würde zu einer doppelt so steilen Geraden im $s - t$-Diagramm führen.
Im $v - t$-Diagramm zeigt sich die Geschwindigkeit als Höhe der horizontalen Geraden: eine doppelte Geschwindigkeit würde zu einer Geraden führen, die doppelt so hoch liegt.

(e) Allgemeiner Ausdruck

$$s(t) = v_0 \cdot (t - t_1) + s_1$$

also

$$s(t) = 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 90\,\text{s}) + 60\,m = 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t - 165\,\text{m}$$

(f) $s(90\,\text{s}) = 60$ m und $s(3678\,\text{s}) = 9030$ m.

(g) $s(t = 0) = -165$ m, $s(t = 120) = 135$ m, $s(t = 60) = -15$ m

(h) Eine negative Position bedeutet, dass

(i) Allgemeiner Ausdruck $v(t) = 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, d.h. die Geschwindigkeit hängt nicht von der Zeit ab.

(j) Tests: $v(t = 90\,\text{s}) = 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v(t = 3678\,\text{s}) = 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, d.h. die Geschwindigkeit verändert sich nicht.

(k) Wir erhalten für die stets $2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, unabhängig vom Zeitpunkt. Dies bedeutet, dass unsere Lösung die Anforderungen der Aufgabenstellung erfüllt ("Geschwindigkeit konstant").

2. Gleichmässige Bewegung: analytischer Ausdruck **5IHBRG**

Geben Sie einen analytischen Ausdruck für die Position in den folgenden Gelegenheiten an. Es handelt sich immer um eine gleichmässige Bewegung. Wenn nicht anders angegeben, starten Objekte zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $s = 0$.

(a) Ein Läufer steht zum Zeitpunkt $t = 5$ s 7 km von mir entfernt. Er rennt mit $v = 12$ km/h auf mich zu.

(b) Wir fahren um 12:00 Uhr auf der Autobahn an Dietikon und um 12:20 Uhr an Birrfeld vorbei (gefahrene Strecke 23 km).

(c) Ein Elektron macht in einer Sekunde macht in einem Synchrontron (Durchmesser 844 m) 111934 Umdrehungen pro Sekunde.

(d) Von einem Velo sind folgende Positionen bekannt: s(20 s) = 500 m, s(1680 s) = -50 m.

Lösung:

(a) Läufer (gemessen von mir aus)

$$s(t) = 7\ km - 12\ \ rmkm/h(t - 5\,\mathrm{s})$$

(b) Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{23 \cdot 1000}{20 \cdot 60}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 19.17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Position auf der Autobahn (gemessen von Dietikon aus)

$$s(t) = 19.17\,\mathrm{m/s}\,t$$

(c) Geschwindigkeit Elektron

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{844 \cdot \pi \cdot 111934}{1}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\,969\,794\,533\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Position im Synchrotron gemessen vom Startpunkt aus

$$s(t) = 2\,969\,794\,533 \cdot t\,\mathrm{m/s}$$

(d) Geschwindigkeit Velo

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-50 - 500}{1680 - 20}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -0.3313253\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Position gemessen vom Betrachter aus

$$s(t) = 500 - 0.3313253 \cdot\ (t - 20)\,\mathrm{m/s}$$

3. Velofahren **ALBM9B**

Es sind zwei Positionen der Person bekannt. Ausserdem wissen wir, dass die Geschwindigkeit konstant ist.

$$s(75\,\mathrm{s}) = 82.5\,\mathrm{m},\ s(95\,\mathrm{s}) = 192.5\,\mathrm{m}$$

Bestimmen Sie nacheinander:

(a) die Geschwindigkeit in m/s und km/h

(b) die Position bei $t = 0$ s?

(c) die Position bei $t = 120$ s?

(d) die Position bei $t = 60$ s?

Lösung:

(a) Geschwindigkeit

$$v = \frac{192.5 - 82.5}{95 - 75} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 5.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5.5 \cdot \frac{3600}{1000} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 19.8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(b) $s(t = 0\,\text{s}) = -330$ m

(c) $s(t = 120\,\text{s}) = 330$ m

(d) $s(t = 60\,\text{s}) = 0$ m

4. Preis und Nachfrage **99ANZM**

Eine wichtige Beobachtung in den Wirtschaftswissenschaften ist die Beziehung zwischen dem Preis p eines Artikels und der Anzahl q die verkauft oder produziert wird. Die Nachfragefunktion $p = d(q)$ lässt sich oft als lineare Funktion darstellen, zumindest näherungsweise.
Wenn ein graphischer Taschenrechner 90 CHF kostet verkauf die Papeterie Höchli monatliche durchschnittlich 480 Stück. Oft findet aber ein Sonderverkauf statt. Dann steigt der durchschnittliche monatlichen Verkäuf um 40 Rechner pro 4 CHF Preissenkung.

(a) Wieviele Taschenrechnern werden verkauf, wenn der Preis auf 72 CHF festgelegt wird?

(b) Bestimmen Sie die Nachfragefunktion $q = d(p)$

(c) Warum ist die Steigung negativ?

(d) Wieviele Taschenrechnern werden verkauft, bei einem Preis von 98 CHF?

(e) Und bei einem Preis von 100 CHF?

Lösung:

(a) Eine Preissenkung von 8 CHF erzeugt einen Rückgang der Nachfrage von 80 Stück, also $q = 400$.

(b) Nachfragefunktion: Steigung

$$m = \frac{-40}{4\,\text{CHF}} = -10\,\frac{1}{\text{CHF}}$$

also

$$q = -10\,\frac{1}{\text{CHF}} \cdot (p - 90) + 480$$

(c) Preis 98 CHF

$$q = -10\,\frac{1}{\text{CHF}} \cdot (98 - 90) + 480 = 400$$

(d) Preis 100 CHF

$$q = -10\,\frac{1}{\text{CHF}} \cdot (100 - 90) + 480 = 380$$

5. Preis und Angebot **2Q2KH6**

Eine Angebotsfunktion $s(q)$ drückt den Preis p aus, zu dem ein Produzent bereit ist, q Güter zu liefern.
Angenommen, der Preis p, zu dem der Hersteller q Taschenrechner zu liefern bereit ist, ist gegeben durch

$$p = s(q) = 0.2\,\text{CHF} \cdot q + 12\,\text{CHF}$$

(a) Warum ist die Steigung positiv?

(b) Wenn der Preis auf 100 CHF festgesetzt wird, wie viele Taschenrechner werden an die Papeterie Höchli geliefert?

(c) Betrachten Sie Angebot und Nachfrage bei 100 CHF (siehe auch vorherige Aufgabe). Was sollte gemässt den Regeln des freien Marktes mit dem Preis eines Taschenrechners geschehen?

(d) Ermitteln Sie für unser Beispiel die Gleichgewichtsmenge bei der das Angebot gleich der Nachfrage ist.

(e) Wie hoch ist der Gleichgewichtspreis?

Lösung:

(a) Die positive Steigung besagt, dass man mehr Zahlen muss, wenn man mehr Stück bestellt.

(b) Wir lösen die Gleichung

$$100\,\text{CHF} = 0.2\,\text{CHF} \cdot q + 12\,\text{CHF}$$

und erhalten $q = 440$.

(c) Angebot: Es werden $q = 440$ Stück geliert. Nachfrage: Bei $p = 100\ CHF$ können 380 Stück verkauft werden. Wir erwarten, dass die Preise der Taschenrechner fallen. Evtl. wird wieder ein Sonderverkauf gemacht, und somit sinkt der mittlere Preis der Taschenrechner.

(d) Bei der Gleichgewichtsmenge gilt

$$\begin{aligned} q &= -10\,\frac{1}{\text{CHF}} \cdot (p - 90) + 480 = -10\,\frac{1}{\text{CHF}} \cdot p + 1380 \\ p &= 0.2\,\text{CHF} \cdot q + 12\,\text{CHF} \end{aligned}$$

Wir setzen die zweite Gleichung in die erste ein und erhalten

$$q = -10\,\frac{1}{\text{CHF}} \cdot (0.2\,\text{CHF} \cdot q + 12\,\text{CHF}) + 1380$$

Auflösen nach q ergibt $q = 420$.

(e) Gleichgewichtspreis

$$p = s(q = 420) = 0.2\,\text{CHF} \cdot q + 12\,\text{CHF} = 96\,\text{CHF}$$

6. Break-Even-Analyse **GYF72K**

Ein Erfinder möchte sein neuestes Gadget vermarkten. Jeder Artikel kostet 2.50 CHF in der Herstellung, und seine fixen Produktionskosten betragen 1200 CHF. Er plant seine Gadget für 10 CHF zu verkaufen.

(a) Finde $C(x)$, das die Gesamtkosten für die Herstellung von x Stück ausdrückt. Wie hoch sind die marginalen Kosten?

(b) Wenn der Erfinder glaubt, dass er 150 Stück verkaufen kann, sollte er das Gerät dann auf den Markt bringen?

(c) Ermitteln Sie die Ertragsfunktion $R(x)$.

(d) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion P(x). Wie hoch ist der marginale Gewinn?

(e) Bestimmen Sie den Break-even-Punkt. Sollte der Erfinder mit der Produktion seines Geräts fortfahren?

Lösung:

(a) Gesamtkosten

$$C(x) = 1200\,\text{CHF} + x \cdot 2.5\,\text{CHF}$$

Grenzkosten 2.5 CHF/Stück.

(b) Ertragsfunktion $R(x)$.

$$R(x) = x \cdot (10 - 2.5)\,\text{CHF}$$

(c) Gewinnfunktion

$$P(x) = x \cdot (10 - 2.5)\,\text{CHF} - 1200\,\text{CHF}$$

Marginaler Gewinn 7.5 CHF/Stück.

(d) Gewinn

$$P(x = 150) = 150 \cdot 7.5\,\text{CHF} - 1200\,\text{CHF} = -75\,\text{CHF}$$

Beim Verkauf von 150 Stück macht der Erfinder einen Verlust. Er sollte das Gadget nicht produzieren.

(e) Break-even-Punkt

$$P(x) = x \cdot 7.5\,\text{CHF} - 1200\,\text{CHF} = 0$$

also $x = 160$. Wir sehen, dass ab $x = 160$ Stück, das Geschäft lohnenswert wird. Wir könnten den Erfinder ermutigen zu produzieren und mit etwas Werbung mehr als 160 Stück zu Verkaufen.