



### Serie 3, Musterlösung

Klasse: W1b, W1c

Datum: HS 22

#### 1. Wie addiert man Brüche?

BS6ELI

- (a) Addieren Sie die Ausdrücke. Es entsteht ein einziger Bruchterm. Prüfen Sie ihre Umformung an Zahlenbeispielen, indem Sie links und rechts einfache Zahlen einsetzen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{2}{5} &= \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{6} &= \\ \frac{2x}{3} + \frac{4x}{3} &= \\ \frac{5}{3m} + \frac{2}{3m} + \frac{-5m^2}{3m} &= \\ \frac{4x}{4x^2 + 7x + 3} + \frac{3}{4x^2 + 7x + 3} &= \\ \frac{4a}{21} + \frac{9x}{14} &= \\ \frac{x-2}{x^2} + \frac{x-1}{x} &= \\ \frac{2r+3}{6} + 1 &= \\ \frac{p}{p+1} - 1 &= \\ \frac{x}{x+y} - \frac{x-y}{2(x+y)} &= \end{aligned}$$

- (b) Beschreiben Sie das Verfahren, mit dem Sie die Brüche addieren.

**Lösung:**

(a) Addition

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{2}{5} &= \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{6} &= \frac{2}{3} \\ \frac{2x}{3} + \frac{4x}{3} &= 2x \\ \frac{5}{3m} + \frac{2}{3m} + \frac{-5m^2}{3m} &= \frac{7-5m^2}{3m} \\ \frac{4x}{4x^2+7x+3} + \frac{3}{4x^2+7x+3} &= \frac{1}{x+1} \\ \frac{4a}{21} + \frac{9x}{14} &= \frac{1}{42}(8a+27x) \\ \frac{x-2}{x^2} + \frac{x-1}{x} &= \frac{x^2-2}{x^2} \\ \frac{2r+3}{6} + 1 &= \frac{1}{6}(2r+9) \\ \frac{p}{p+1} - 1 &= -\frac{1}{p+1} \\ \frac{x}{x+y} - \frac{x-y}{2(x+y)} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Vorfahren: Wir Addieren gleichnamige Brüche (d.h. Brüche, bei denen der Nenner gleich ist. Dies ist immer möglich:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

für  $b \neq 0$  und  $d \neq 0$ .**2. Mache gleichnamig und addiere****55M8Q9**

(a)  $\frac{2}{a}, \frac{3}{b}, \frac{4}{c}$

(d)  $\frac{a}{b}, \frac{a}{b+c}$

(b)  $\frac{7}{8w}, \frac{5}{6w}$

(e)  $\frac{n}{n-5}, \frac{5}{5-n}$

(c)  $\frac{1}{rs}, \frac{1}{r^2+r}$

(f)  $\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{b}{b-a}$

**Lösung:**

(a)  $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{4}{c} = \frac{2bc}{abc} + \frac{3ac}{abc} + \frac{4ab}{abc} = \frac{4ab+3ac+2bc}{abc}$

(b)  $\frac{7}{8w} + \frac{5}{6w} = \frac{41}{24w} + \frac{20}{24w} = \frac{41}{24w}$

(c)  $\frac{1}{rs} + \frac{1}{r^2+r} = \frac{(r+1)}{rs(r+1)} + \frac{s}{rs(r+1)} = \frac{r+s+1}{r(r+1)s}$

(d)  $\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} = \frac{a(b+c)}{b(b+c)} + \frac{ab}{b(b+c)} = \frac{2ab+ac}{b(b+c)}$

(e)  $\frac{n}{n-5} + \frac{5}{5-n} = \frac{-n}{5-n} + \frac{5}{5-n} = \frac{5-n}{5-n} = 1$

$$(f) \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{b-a} = \frac{a}{(a+b)(a-b)} + \frac{-b(b+a)}{(a+b)(a-b)} = \frac{-ab+a-b^2}{(a+b)(a-b)}$$

### 3. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

6HS1UE

$$(a) \frac{1}{m+1} + \frac{2m+2}{m+1}$$

$$(e) \frac{c-2}{c^3} + \frac{c-1}{c^2}$$

$$(b) \frac{cd}{b-d} - \frac{bc}{b-d}$$

$$(f) \frac{(u-v)^2}{u^2v^2} + \frac{-2u-v}{u^2v} + \frac{u-3v}{uv^2}$$

$$(c) \frac{4a}{4a^2+7a+3} - \frac{3}{4a^2+7a+3}$$

$$(g) \frac{2r+3}{6} + 6$$

$$(d) \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3}$$

$$(h) d + \frac{2-dn}{n}$$

**Lösung:**

$$(a) \frac{2m+3}{m+1}$$

$$(e) \frac{c^2-2}{c^3}$$

$$(b) -c$$

$$(f) \frac{2u-7v}{uv^2}$$

$$(c) \frac{1}{a+1}$$

$$(g) \frac{2r+39}{6}$$

$$(d) \frac{r-1}{r^3}$$

$$(h) \frac{2}{n}$$

### 4. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

AM68Q2

$$(a) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c}$$

$$(e) \frac{2n-11}{3n-5} - \frac{4n+15}{n+7} + 1$$

$$(b) \frac{x+y}{x-y}, \frac{1-x}{x+y}$$

$$(f) \frac{2v+3w}{2v+3} - \frac{2v-w}{2v} + \frac{-2v-3w}{w}$$

$$(c) \frac{c}{c-d} - \frac{2c}{c^2-d^2} - \frac{d}{c+d}$$

$$(g) \frac{2u-v}{2u-2v} - \frac{u-v}{3u+3v} - \frac{v(3v-u)}{3v^2-3u^2}$$

$$(d) \frac{1}{a-2}, \frac{1}{a+r} - \frac{2a+3}{a^2+3a-10}$$

$$(h) \frac{1}{z^2-z} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2+z}$$

**Lösung:**

$$(a) \frac{a+b+c}{c(a+b)}$$

$$(e) \frac{-7n^2-6n-37}{(n+7)(3n-5)}$$

$$(b) \frac{3xy+x+y^2-y}{(x-y)(x+y)}$$

$$(f) \frac{-8v^3-12v^2w-12v^2+8vw^2-24vw+3w^2}{2v(2v+3)w}$$

$$(c) \frac{c-d}{c+d}$$

$$(g) \frac{4u+v}{6(u-v)}$$

$$(d) \frac{5-r}{(a+5)(a+r)}$$

$$(h) \frac{2}{(z-1)z^2(z+1)}$$

### 5. Multiplikation und Division von Brüchen

GF9VIM

(a) Betrachten Sie die Beispiele. Beschreiben Sie in Worten, was bei den einzelnen Schritten gemeint wird.

- $\frac{5}{9} \cdot 27 = \frac{5 \cdot 27}{9} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 3}{9} = 15$
- $\frac{72}{48} : 9 = \frac{72}{48 \cdot 9} = \frac{9 \cdot 8}{6 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{6}$
- $\frac{12}{17} \cdot \frac{34}{36} = \frac{12 \cdot 34}{17 \cdot 36} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 17}{17 \cdot 3 \cdot 12} = \frac{2}{3}$

- $\frac{28}{25} : \frac{14}{15} = \frac{28 \cdot 15}{25 \cdot 14} = \frac{2 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 14} = \frac{6}{70}$

(b) Übertragen Sie das Vorgehen auf die weiteren Beispiele

- $6xy \cdot \frac{9x}{4y}$
- $\frac{15a}{4b} : 6ab$
- $\frac{8x}{3y} \cdot \frac{9yz}{4x}$
- $\frac{5ij}{6} : \frac{3i}{2j}$

**Lösung:**

(a) Betrachten Sie die Beispiele. Beschreiben Sie in Worten, was bei den einzelnen Schritten gemacht wird.

- $\frac{5}{9} \cdot 27 = \frac{5 \cdot 27}{9}$ , d.h. ein Faktor kann mit dem Nenner multipliziert werden.
- $\frac{72}{48} : 9 = \frac{72}{48 \cdot 9}$ . Beim Teilen wird die Zahl mit dem Nenner multipliziert.
- $\frac{12}{17} \cdot \frac{34}{36} = \frac{12 \cdot 34}{17 \cdot 36}$ . Bei der Multiplikation werden die Nenner und die Zähler multipliziert.
- $\frac{28}{25} : \frac{14}{15} = \frac{28 \cdot 15}{25 \cdot 14}$ . Beim Teilen wird mit dem Kehrbruch multipliziert.

(b) Weitere Beispiele mit Symbolen

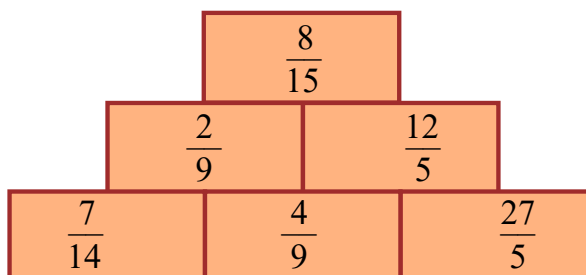
- $6xy \cdot \frac{9x}{4y} = \frac{6xy \cdot 9x}{4y} = \frac{54x^2y}{4y} = \frac{27x^2}{2}$
- $\frac{15a}{4b} : 6ab = \frac{15a}{4b \cdot 6ab} = \frac{3 \cdot 5a}{4 \cdot 2 \cdot 3ab^2} = \frac{5}{8b^2}$
- $\frac{8x}{3y} \cdot \frac{9yz}{4x} = \frac{8x \cdot 9yz}{3y \cdot 4x} = 6z$
- $\frac{5ij}{6} : \frac{3i}{2j} = \frac{5ij \cdot 2j}{6 \cdot 3i} = \frac{5j^2}{9}$

## 6. Multiplikationspyramide

VVHCZZ

Bei der Pyramide werden die Zahlen der beiden unteren Steine miteinander multipliziert. Das Ergebnis wird in den oberen Stein geschrieben. Füllen Sie die Lücken.

**Lösung:**



## 7. Multiplikation von Brüchen

NS45QG

- (a)  $29k^5t \cdot \frac{47h^2}{29k^5t}$  (f)  $\frac{-18u^w}{65v^4} \cdot -26v27uw^3$   
 (b)  $\frac{5rs^2}{18uv^3}(-15rsuv)$  (g)  $\left(\frac{6a}{7b}\right)^2$   
 (c)  $\frac{x}{yz}(xz + yz)$  (h)  $\left(\frac{m}{4}\right)^3$   
 (d)  $(3g - 3f)\frac{4f+4g}{5f-5g}$  (i)  $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \cdot \frac{p+q}{p-q}$   
 (e)  $\frac{-xy^2}{35z^3} \cdot \frac{7z^2}{x^2y^2}$  (j)  $\frac{x^2-6xy+9y^2-z^2}{5m-5n} \cdot \frac{m^4-n^4}{x-3y+z}$

**Lösung:**

- (a)  $\frac{29k^5t \cdot 47h^2}{29k^5t} = 47h^2$   
 (b)  $\frac{5rs^2 \cdot (-15rsuv)}{18uv^3} = \frac{-75r^2s^3}{18v^2}$   
 (c)  $\frac{x(xz+yz)}{yz} = \frac{x^2z+xyz}{yz} = \frac{x^2+xy}{y}$   
 (d)  $(3g - 3f)\frac{4f+4g}{5f-5g} = \frac{(3g-3f)(4f+4g)}{5f-5g} = \frac{(-3)(f-g) \cdot 4 \cdot (f+g)}{5(f-g)} = \frac{-12 \cdot (f+g)}{5}$   
 (e)  $\frac{-1}{5xy}$   
 (f)  $\frac{4u}{15v^3w^2}$   
 (g)  $\frac{36a^2}{49b^2}$   
 (h)  $\frac{m^3}{64}$   
 (i)  $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \cdot \frac{p+q}{p-q}$   
 (j)  $\frac{x^2-6xy+9y^2-z^2}{5m-5n} \cdot \frac{m^4-n^4}{x-3y+z}$

**8. Division von Brüchen**

GF9VIM

- (a)  $\frac{19r^2s^2}{23t} : (19r^2s^2)$  (f)  $\frac{12u^2v}{25tw} : \frac{18uv^2}{35tw}$   
 (b)  $\frac{-16ab^2}{27c} : (-16bc^2)$  (g)  $\frac{a^3+a^2b}{c^2+1} : \frac{a^3-ab^2}{c^2-c}$   
 (c)  $\frac{2a+2b}{ab} : (a+b)$  (h)  $\frac{e^2+2ef+f^2}{e^2+2ef} : \frac{e^2+ef-e-f}{2ef+4f^2}$   
 (d)  $\frac{c^2-cd}{d^2} : (3c-3d)$  (i)  $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$   
 (e)  $\frac{5km}{6} : \frac{3k}{2m}$  (j)  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

**Lösung:**

- (a)  $\frac{1}{23t}$  (f)  $\frac{14u}{15v}$   
 (b)  $\frac{ab}{27c^3}$  (g)  $\frac{ac(c-1)}{(a-b)(c^2+1)}$   
 (c)  $\frac{2}{ab}$  (h)  $\frac{2f(e+f)}{e(e-1)}$   
 (d)  $\frac{c}{3d^2}$  (i)  $\frac{ad-bc}{ad+bc}$   
 (e)  $\frac{5m^2}{9}$  (j)  $\frac{n-1}{n}$

## 9. Doppelbrüche

CA9RLG

(a)  $\frac{\frac{25}{36}}{\frac{15}{16}}$

(b)  $\frac{\frac{19}{24}}{\frac{57}{8}}$

(c)  $\frac{\frac{39}{44}}{\frac{13}{11}}$

(d)  $\frac{\frac{z}{r}}{\frac{z}{s}}$

(e)  $\frac{g+\frac{1}{3}}{g-\frac{1}{3}}$

(f)  $\frac{\frac{y-z}{x-y}}{-\frac{z}{x}}$

(g)  $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x-y}{y-x}}$

(h)  $\frac{-\frac{2k}{a}+\frac{3k}{b}}{\frac{6}{a}\cdot\frac{k}{b}}$

(i)  $\frac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{y}{x+y}}$

(j)  $\frac{\frac{n}{n^2-1}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}}$

## Lösung:

(a)  $\frac{20}{27}$

(b)  $\frac{\frac{19}{24}}{\frac{57}{8}}$

(c)  $\frac{3}{4}$

(d)  $\frac{s}{r}$

(e)  $\frac{3g+1}{3g-1}$

(f)  $\frac{xz-y^2}{yz}$

(g)  $\frac{1}{x-y}$

(h)  $\frac{3a-2b}{6}$

(i)  $\frac{-3xy+y^2}{x^2+xy+2y^2}$

(j)  $\frac{-n}{2}$

## 10. Nenner, Zähler, Divisor, Dividend

TRZL9D

Begründe oder widerlege die folgenden Aussagen zum Rechnen mit Brüchen:

- (a) Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen werden jeweils die Zähler und Nenner miteinander addiert bzw. voneinander subtrahiert.
- (b) Beim Multiplizieren von Brüchen muss man erst die beiden Faktoren gleichnamig machen.
- (c) Wenn die Brüche den gleichen Nenner haben, dann werden nur die Zähler addiert, wenn man die Brüche addieren will.
- (d) Wenn man die Brüche dividiert, dann multipliziert man den Dividenten mit dem Kehbruch.
- (e) Wenn man die Brüche dividiert, dann multipliziert man den Divisor mit dem Kehbruch.
- (f) Wenn man Brüche subtrahiert, dann stellt man erst den gleichen Nenner her und subtrahiert dann die Zähler dieser Brüche und lässt den Nenner gleich.
- (g) Man multipliziert einen Bruch mit einer natürlichen Zahl, indem man den Nenner dieses Bruches mit der natürlichen Zahl multipliziert.

## Lösung:

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

$$(\text{Dividend}) : (\text{Divisor})$$

- (a) falsch
- (b) falsch
- (c) richtig
- (d) richtig
- (e) falsch
- (f) richtig
- (g) richtig