Serie 10, Musterlösung

Klasse: W1b, W1c | Datum: HS 22

7. Quadratische Gleichungen J3DA6N

Lösung:
Nullstellen und schnellstes Lösungsverfahren:

(a) $x_{1;2} = -\sqrt{5}; \sqrt{5}$, Auflösen nach x und Wurzel ziehen

$$\begin{array}{rcll} 2x^2 & = & 10 & \mid \; :2 \\ x^2 & = & 5 & \mid \; \sqrt{\ldots} \\ x & = & \pm\sqrt{5} & \end{array}$$

(b) $x^2 = -6$ hat keine reelle Lösung.

(c) Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel

$$\begin{array}{rcll} x+4 & = & \pm 5 & \mid \; -4 \\ x_{1;2} & = & -4 \pm 5 = -9;\; 1 & \end{array}$$

(d) Wir bringen die Gleichung in Normalform $x^2+4x-12 = 0$. Der Klammeransatz ergibt $(x+6)\cdot(x-2) = 0$, also $x_{1;2} = -6; 2$

(e) $(x-3)^2 = -4$ hat keine reelle Lösung, da man hier die Wurzel nicht ziehen kann.

(f) Wir lesen die Nullstellen aus $x_{1;2} = -2; 6$

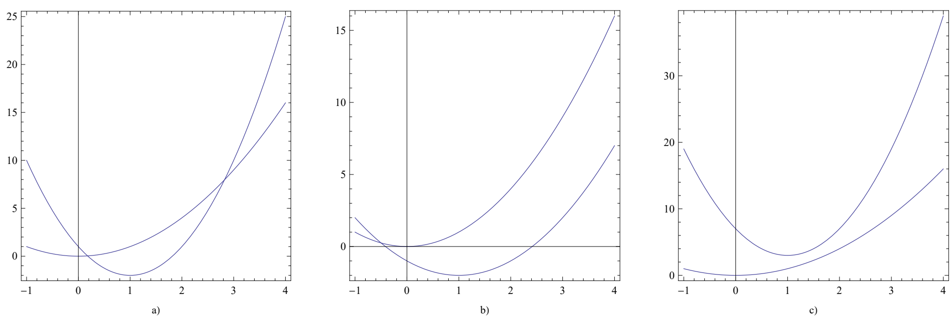
(g) Wir bringen die Gleichung in Normalform $x^2 - 4x - 1 = 0$. Die Mitternachtsformel ergibt $x_{1;2} = 2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}$

(h) Wir bringen die Gleichung in Normalform $-3x = 0$. Die Lösung ist $x_1 = 0$

(i) $x^2 = -\frac{8}{12}$ hat keine reelle Lösung, da man hier die Wurzel nicht ziehen kann.

8. Schnittpunkte von Parabeln graphisch 3EDGRQ

Lösung:



Es wurden folgende quadratische Funktionen geplottet:

(a) $f(x) = 3(x-1)^2 - 2,\ g(x) = x^2$. Hier gibt es viele Möglichkeiten. Auch $f(x) = 0.5 \cdot x^2 + 1,\ g(x) = x^2$ schneiden sich an zwei Stellen.

(b) $f(x) = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1,\ g(x) = x^2$. Da beide Funktionen den selben Koeffizienten von x^2 besitzen — nämlich $A = 1$ — können sie sich entweder nicht schneiden, oder einmal schneiden oder identisch sein.

(c) $f(x) = 4(x-1)^2 + 3,\ g(x) = x^2$. Hier gibt es viele Möglichkeiten. Auch $f(x) = x^2 + 3,\ g(x) = x^2$ schneiden sich nicht.

9. Schnitpunkte von Parablen - rechnerisch G7JV9U

Lösung:

(a) $f(x) = g(x)$, keine Lösung

(b) $f(x) = h(x)$, $x_{1;2} = \pm 2$

(c) $g(x) = h(x)$, $x_1 = 10$

10. Fragen zu einer Parabel NF7PM5

Lösung:

(a) Wir setzen die x-Komponente ein von $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und erhalten

$$f(3) = -3 \neq S_y$$

Also liegt der Punkt nicht auf der Parabel

(b)

$$f(4) = -8 \ \Rightarrow\ \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$f(-3) = -15 \ \Rightarrow\ \vec{B} = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \end{pmatrix}$$

(c) Wir lösen $-x^2 + 2x = -2$ nach x auf:

$$-x^2 + 2x + 2 = 0 \ \Rightarrow\ x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{S}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wenn wir $-x^2 + 2x = 2$ nach x aufzulösen versuchen, erhalten wir keine Lösung, d.h. es gibt auf der Parabel keinen Punkt mit einer y-Komponente 2.

11. Parabelgleichungen bestimmen **5W87UU**

Lösung:

(a) Die Scheitelpunktform ist

$$f(x) = A \cdot (x-5)^2 + 3\ .$$

Wir setzen den Punkt ein und erhalten

$$A \cdot (1-5)^2 + 3 = 5 \ \Rightarrow A = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

also $f(x) = \frac{1}{8}(x-5)^2 + 3$.

(b) Der Scheitelpunkt liegt genau zwischen den Nullstellen, also bei $S_x = \frac{-2+3}{2} = 1/2$. Einen höchsten Punkt gibt es nur bei einer nach unten offenen Parabel, deshalb

$$f(x) = -A \cdot (x-1/2)^2 + 8\ .$$

Wir setzen eine Nullstelle ein und erhalten

$$-A \cdot (3-1/2)^2 + 8 = 0 \ \Rightarrow A = 1.28$$

Also $f(x) = -1.28 \cdot (x-1/2)^2 + 8$

(c) Der zweite Punkt lässt uns schreiben $f(x) = a\,x^2 + b\,x - 1$, d.h. damit ist die Konstante bestimmt. Danach stellen wir ein Gleichungssystem auf indem wir die weiteren Punkte einsetzen

$$\left|\begin{array}{lcc} L_1: & \underbrace{-1+4a-2b}_{f(-2)} & = & 1 \\ L_2: & \underbrace{-1+16a+4b}_{f(4)} & = & 31 \end{array}\right|$$

also

$$L_2 + 2L_1:\ -3 + 24a = 33 \ \Rightarrow\ a = 3/2$$

Einsetzen in L_1 ergibt

$$-1 + 4 \cdot 3/2 - 2b = 1 \ \Rightarrow\ b = 2$$

Also $f(x) = 3/2\,x^2 + b\,x - 1$.

12. Eine Hängebrücke **DAHUN6**

Lösung:

Der Scheitelpunkt liegt bei $\vec{S} = \begin{pmatrix}100\\5\end{pmatrix}$, also ist die Scheitelpunktform

$$f(x) = A \cdot (x-100)^2 + 5 = 5 + 10000A - 200Ax + Ax^2$$

Wir setzen den ersten Punkt ein und erhalten

$$f(0) = 5 + 10000A = 40 \Rightarrow \; A = \frac{35}{10000} = \frac{7}{2000} \; .$$

Also

$$f(x) = \frac{7}{2000} \cdot (x - 100)^2 + 5$$

13. Zahlenrätsel **27AHHP**

Lösung:

(a) Wir machen eine Tabelle

x	1	4	7	10	13	16	19	22
y	23	20	17	14	11	8	5	2
$x \cdot y$	23	80	119	140	143	128	95	44

Das Produkt wächst an und nimmt dann wieder ab, also suchen wir in der Mitte

x	10	11	12	13	14
y	14	13	12	11	10
$x \cdot y$	140	143	144	143	140

also $x = 12$ und $y = 12$.

Alternativ:

$x + y = 24$, also $y = 24 - x$, d.h. wir suchen das Maximum von

$$f(x) = x \cdot y = x \cdot (24 - x) = 24x - x^2 \; .$$

Wir bringen dies in die Scheitelpunktsform

$$f(x) = -1 \cdot [(x - 12)^2 - 144] \; .$$

Daraus lesen wir das Maximum 144 aus bei $x = 12$.

(b) Es gilt $y = x - 3$. Wir suchen das Minimum von

$$f(x) = x \cdot y = x \cdot (x - 3) = x^2 - 3x \; .$$

Wir bringen dies in die Scheitelpunktsform

$$f(x) = (x - 3/2)^2 - 9/4 \; .$$

Wir sehen, das Minimum $-9/4$ liegt bei $x = 3/2$.