Zusatzaufgaben, Musterlösung

Klasse: W1b, W1c　　　　Datum: HS 22

1. Ungleichungen　　　　R7NPER

Lösen Sie die Ungleichungen. Stellen Sie die Lésung an der Zahlengeraden dar. Machen Sie eine Probe für einige Zahlen. `https://www.mathebibel.de/ungleichungen`

(a) $-19 + 8x \geq 37$

(b) $(x-7)^2 > x^2 + 49$

(c) $2(x-3) - 5x \geq 4 - x$

(d) $(a-x)(a+3) \leq a^2$

(e) $(x-3)(x+2) < (x+3)(x-2)$

Lösung:
Allgemeines:
Die Symbole $<, >, \geq$ und $\leq$ ändern ihre Richtung, wenn mit $b < 0$ multipliziert oder dividiert wird. Hier ein Beispiel

$$\begin{array}{rcll} -5 & < & -3 & \mid \cdot(-2) \\ 10 & > & 6 & \end{array}$$

Nicht erlaubt ist die Division durch 0 oder eine Multiplikation mit 0

$$\begin{array}{rcll} -5 & < & -3 & \mid \cdot 0 \\ 0 & > & 0 & \end{array}$$

Hier entsteht eine falsche Aussage. Ist also ein Faktor möglicherweise 0, so machen wir Fallunterscheidungen.

(a)

$$\begin{array}{rcll} -19 + 8x & \geq & 37 & \mid +19 \\ 8x & \geq & 56 & \mid :8 \\ x & \geq & 7 & \end{array}$$

(b) Wir multiplizieren aus und vereinfachen

$$\begin{array}{rcll} (x-7)^2 & > & x^2 + 49 & \\ x^2 - 14x + 49 & > & x^2 + 49 & \mid -x^2 - 49 \\ -14x & > & 0 & \mid :(-14) \\ x & < & 0 & \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcll} 2(x-3) - 5x & \geq & 4 - x & \\ 2x - 6 - 5x & \geq & 4 - x & \mid +3x - 4 \\ -10 & \geq & 2x & \mid :2 \\ -5 & \geq & x & \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcll} (a-x)(a+3) & \leq & a^2 & \\ a^2+3a-xa-3x & \leq & a^2 & \mid \; -a^2-3a \\ x(-3-a) & \leq & -3a & \mid \; :(-3-a) \end{array}$$

Wir unterscheiden jetzt 3 Fälle:

i. $(-3-a) > 0$, dann erhalten wir

$$x \leq \frac{-3a}{-3-a} = \frac{3a}{3+a}$$

ii. $(-3-a) < 0$, dann erhalten wir

$$x \geq \frac{-3a}{-3-a} = \frac{3a}{3+a}$$

iii. $(-3-a) = 0$, d.h. $a = 3$ dann betrachten wir *die* Ungleichung, die dasteht, bevor devidiert wird:

$$x \cdot 0 \leq -3 \cdot 3 \;\Rightarrow\; 0 \leq -9$$

Das ist eine falsche Aussage, also gibt es keine Lösung in diesem Fall.

(e) Wir multiplizieren aus und vereinfachen

$$\begin{array}{ccccl} (x-3)(x+2) & < & (x+3)(x-2) & & \\ x^2-x-6 & < & x^2+x-6 & \mid & -x^2+6+x \\ 0 & < & 2x & \mid & :2 \\ 0 & < & x & & \end{array}$$

2. Oberfläche und Volumen **KNBTX9**

Die grosse Raviolibüchse hat laut Beschriftung eine Füllmenge von 820 g, die kleine Dose 420 g.

(a) Wie gross ist das Verhältnis von Durchmesser zur Höhe bei den beiden Büchsen?

(b) Rechercherieren Sie: Wie berechnet sich das Volumen eines Zylinders? Wie dessen Oberfläche?

(c) Rechnen Sie nach, ob die kleine Dose in etwa das halbe Volumen der grossen Dose hat.

(d) Vergleichen Sie die Oberflächen der Dosen. Welche ist vom Materialverbrauch her wirtschaftlicher?

Lösung:

(a) Die Verhältnisse sind; Gross:

$$\frac{d}{h} = \frac{2 \cdot 4.9\,\text{cm}}{11.3\,\text{cm}} = 0.867$$

Klein:

$$\frac{d}{h} = \frac{2 \cdot 3.6\,\text{cm}}{10.5\,\text{cm}} = 0.686$$

(b) Das Volumen eines Zylinders:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Oberfläche:

$$O = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$$

(c) Volumina; Gross:

$$V_{\text{gross}} = \pi \cdot (4.9)^2 \cdot 11.3\,(\text{cm})^3 = 852.35\,\text{cm}^3$$

Klein:

$$V_{\text{klein}} = \pi \cdot (3.6)^2 \cdot 10.5\,(\text{cm})^3 = 427.51\,\text{cm}^3$$

(d) Oberflächen; Gross:

$$O_{\text{gross}} = 498.76\,\text{cm}^2$$

Klein:

$$O_{\text{klein}} = 318.93\,\text{cm}^2$$

Daraus ergeben sich die Verhältnisse

$$\frac{V_{\text{gross}}}{O_{\text{gross}}} = 1.71$$

und

$$\frac{V_{\text{klein}}}{O_{\text{klein}}} = 1.34$$

, d.h. pro Einheit Blecht in der Oberfläche der Büchse, hat die grosse Büchse mehr Volumeneinheiten, nämlich 1.71. Allgemein sehen wir folgendes für eine Büchse mit $h = 2r$:

$$V = 2\pi \cdot r^3 \text{ und } O = 6\pi \cdot r^2$$

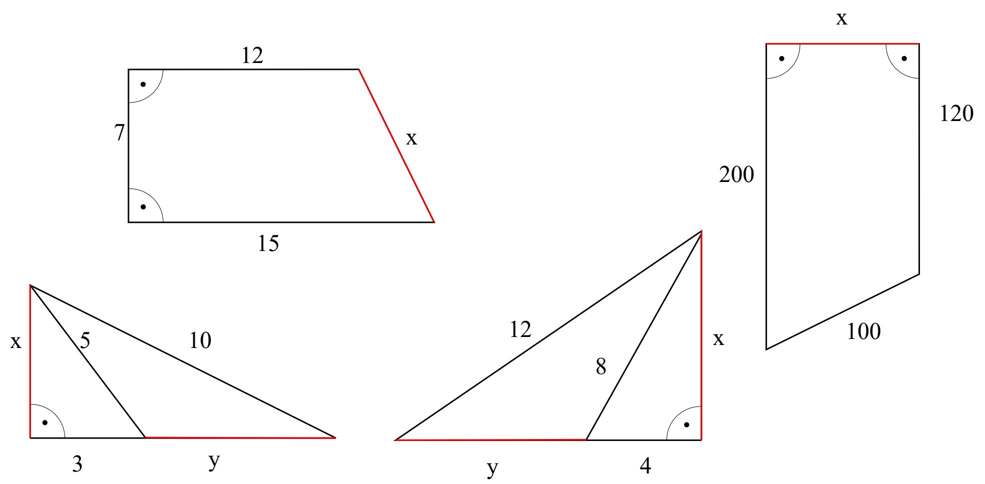
Daraus ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{V}{O} = \frac{2\pi \cdot r^3}{6\pi \cdot r^2} = \frac{1}{3} \cdot r$$

d.h. je grösser die Büche (je mehr Volumen sie hat), desto grösser (besser) ist der Verhältnis Volumen zu Oberfläche, das heißt desto mehr Volumen kann man pro Fläche an verbrauchtem Blech einfüllen.
Das hat eine handfest Konsequenz in der Biologie: An den Polen (Nordpol und Südpol) sind die Tiere grösser als am Äquator. Am Pol minimieren die Tiere das Verhältnis $V/0$ um den wärmeverlust über die Oberfläche möglichst klein zu halten.

3. Seiten **IY59DC**

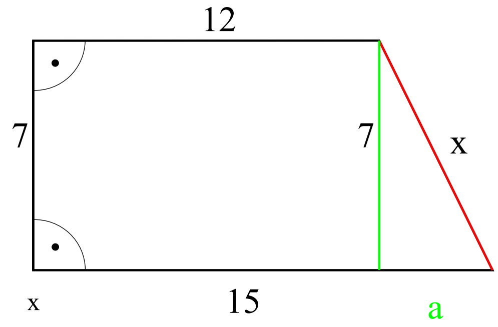
Berechnen Sie die Längen x und y in den Figuren.
Tipps: `https://www.mathebibel.de/satz-des-pythagoras`



Lösung:

(a) Zunächst stellen wir fest $a = 3$. Daraus ergibt sich

$$x^2 = 3^2 + 7^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{58} \approx 7.61577$$



(b) Zunächst stellen wir fest $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Daraus ergibt sich

$$\begin{array}{rcll} (y+3)^2 + x^2 & = & 10^2 & \mid -10^2 \\ y^2 + 6y + 3^2 + x^2 - 10^2 & = & 0 & \\ y^2 + 6y - 75 & = & 0 & \end{array}$$

Und also $y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-75)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{336}}{2} = -12.1652; 6.16515$ Es macht nur die Lösung $y > 0$ Sinn, also $y = 6.16515$.

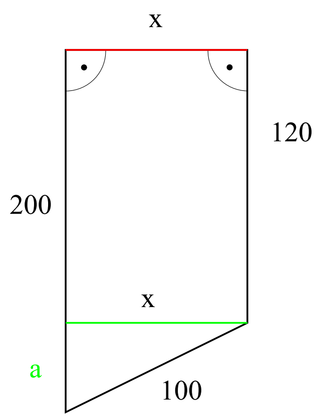
(c) Zunächst stellen wir fest $x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{array}{rcll} (y+4)^2 + (\sqrt{48})^2 & = & 12^2 & \mid -12^2 \\ y^2 + 8y + 16 + 48 - 12^2 & = & 0 & \\ y^2 + 8y - 80 & = & 0 & \end{array}$$

Und also $y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 80}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{384}}{2} = 5.79796; -13.798$ Es macht nur die Lösung $y > 0$ Sinn, also $y = 5.79796$.

(d) Zunächst stellen wir fest $a = 200 - 120 = 80$. Daraus ergibt sich

$$x^2 + 80^2 = 100^2 \Rightarrow x = 60$$



4. Muster **LKTIMH**

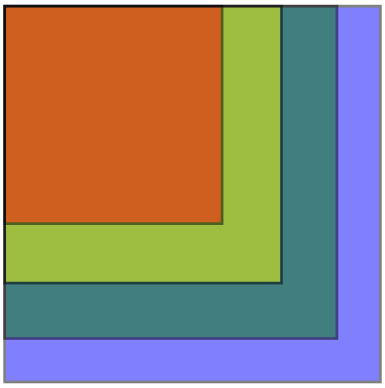
Ein Maler möchte die Muster unten Malen. Die vier Flächen sollen gleich gross sein.

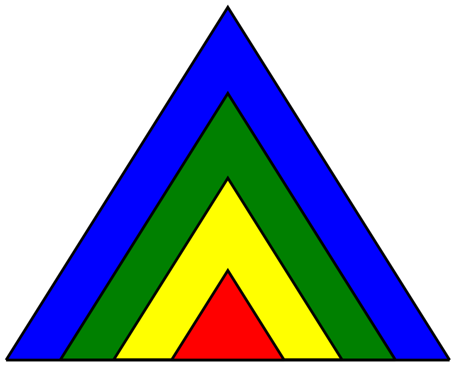
(a) Die Kantenlänge des kleinsten Quadrates soll 1 m sein. Wie gross sind die Seitenlängen der vier Quadrate?

(b) Zeichnen Sie eine solche Figur im Massstab 1:20 in Ihr Heft.

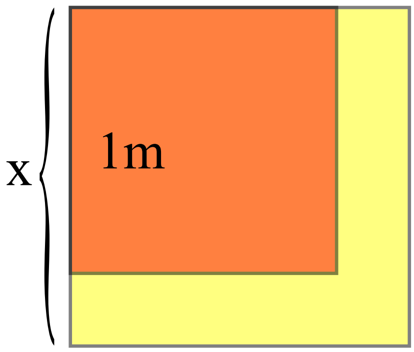
(c) Die Kantenlänge des grössten Dreiecks soll 1 m sein. Wie gross sind die Seitenlängen der anderen Dreiecke?

(d) Zeichnen Sie eine solche Figur im Massstab 1:20 in Ihr Heft.





Lösung:



Grundidee: Die Fläche, die *nicht* durch die kleine Fläche verdeckt wird, ist gleich gross wie die kleine Fläche :

$$\begin{array}{rcll} x^2 - (1\,(\mathrm{m})^2 & = & (1\,(\mathrm{m})^2 & \mid \; +(1\,(\mathrm{m})^2 \\ x^2 & = & 2(1\,(\mathrm{m})^2 & \mid \; \sqrt{\ldots} \\ x & = & \sqrt{2}\mathrm{m} & \end{array}$$

Auf die selbe Art können wir jeweils aus der Länge des nächst kleineren Quadrats die Kantenlänge des grösseren berechnen.
Etwas einfacher ist eine Argumentation mit Hilfe der Flächen. Durch Aufsummieren der Flächen erhalten wir:

Quadrat Nummer:	1	2	3	4
Fläche:	1 m^2	2 m^2	3 m^2	4 m^2

Wir berechnen daraus der Seiten:

	1	2	3	4
exakt:	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
numerisch:	1	1.41421	1.73205	2

Die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a ist

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \ .$$

Also ist hat das grösste Dreieck die Fläche

$$A_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}1^2 \ \mathrm{m}^2 = 0.433013\mathrm{m}^2$$

Wir schreiben A_1 für die Fläche des kleinsten Dreiecks, dann kann die Aufgabenstellung wie folgt gelsen werden:

$$\underbrace{A_4}_{=\frac{\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{m}^2} = 4 \cdot A_1 \ \Rightarrow \ A_1 = \frac{\sqrt{3}}{16} \ \mathrm{m}^2$$

Dann sind die Flächen der Dreiecke also

	A_1	$A_2 = 2A_1$	$A_3 = 3A_1$	$A_4 = 4A_1$
Fläche in m^2:	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

Wir berechnen nun aus den Flächen die Seitenkanten

$$a = \sqrt{A\frac{4}{\sqrt{3}}}$$

und erhalten

	1	2	3	4
a_i exaktin m^2:	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
a_i numerischin m^2:	0.5	0.707107	0.866025	1.

Kontrolle: Die Differenz der Fläche zur nächst Kleineren ist stets $\frac{\sqrt{3}}{16}$, z.B.

$$\Delta A = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

Abgabetermin: Do 22.12.2022 in der Stunde.