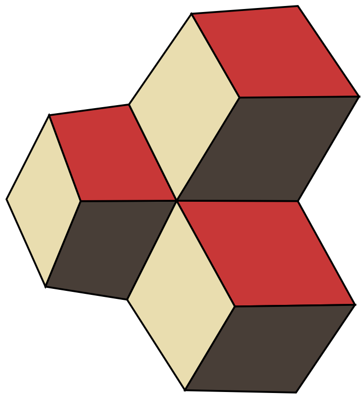
Lineare Algebra 1



Dr. D. Adams

Institut für Mathematik und Naturwissenschaften (IMN)

donat.adams@fhnw.ch

Büro: 5.1C01

Zürich, 16. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vektoren

KAPITEL 1

Eliminationsverfahren I

Lernziele Begriffe Vektoren

- Die Studierenden können die lineare Abhängigkeit von Vektoren in Komponentenform mit dem Gauss-Verfahren bestimmen.
- Sie kennen die Begriffe, 'kollinear', 'komplanar' und 'linear abhängig' und können sie miteinander in Beziehung bringen.
- Sie können ein lineares Gleichungssystem mit dem Gauss-Verfahren in Zeilenstufen-Form bringen.
- Sie können in einem linearen Gleichungsystem in Zeilenstufen-Form durch Einsetzen die Lösung bestimmen.

1.1 Eliminationsverfahren von Gauss I

Definition Linearkombination

Eine **Linearkombination** der Objekte $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ ist die Summe

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$

Die Linearkombination lässt sich auch mit dem Summenzeichen schreiben. Für

N Vektoren schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \vec{a}_i \ .$$

Definition Lineare Abhängigkeit

Die Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ heisst **linear abhängig** genau dann, wenn die Gleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

eine Lösung besitzt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen der Koeffizienten.

[**?**, Bd. 1 II 2.4] [**?**, 3.3.2, p.429]

Beispiel 1.1 Gauss-Eliminationsverfahren **893982**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 30 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

Lösung:

Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{array}{cc|ccc} & & x & y & z \\ \hline \vec{a} & = (& 1 & 5 & 1) \\ \vec{b} & = (& 2 & 8 & 3) \\ \vec{c} & = (& 4 & 30 & -1) \end{array}$$

Die x-, y- und z-Komponenten stehen jetzt jeweils in einer Spalte untereinander. Indem wir nun die x-Komponente bei allen Vektoren eliminieren, entstehen zwei Vektoren, die schon keine x-Komponente haben (und deshalb etwas mehr dem gewünschten Endresultat $\vec{0}$ gleichen):

$$\begin{array}{rl} \vec{a} & = (1 \quad 5 \quad 1) \\ \vec{b}' = \vec{b} - 2\vec{a} & = (0 \quad -2 \quad 1) \\ \vec{c}' = \vec{c} - 4\vec{a} & = (0 \quad 10 \quad -5) \end{array}$$

Mit den neuen Vektoren, führen wir das selbe Verfahren durch, um einen Vektor ohne y-Komponente zu erhalten:

$$\begin{array}{rl} \vec{a} & = (1 \quad 5 \quad 1) \\ \vec{b}' & = (0 \quad -2 \quad 1) \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 5\vec{b}' & = (0 \quad 0 \quad 0) \end{array}$$

D.h. es ist also gelungen $\vec{0}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen. Die Vektoren sind also linear abhängig.
Die Linearkombination ist

$$\vec{c}'' = \vec{c}' + 5\vec{b}' = (\vec{c} - 4\vec{a}) + 5(\vec{b} - 2\vec{a}) = -14\vec{a} + 5\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass beim ersten Schritt, die erste Zeile nicht verändert wird. Beim zweiten Schritt wird die zweite Zeile nicht verändert.

Infobox Vorgehen beim Gaussverfahren

Bei jedem Schritt gilt: Die Zeile, die benutzt wird um in anderen Zeilen zu eliminieren, darf nicht verändert werden.

Beispiel 1.2 Gauss-Eliminationsverfahren **782891**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

Beispiel 1.3 Gauss-Eliminationsverfahren **854654**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

Kollineare und komplanare Vektoren

Definition Kollinear

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **kollinear**, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Sind zwei Vektoren kollinear so gilt auch

$$\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{0}$$

Der Begriff kollinear fasst also die Begriffe **parallel**

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}$$

und **antiparallel**

$$\vec{a} = -\lambda\vec{b}$$

mit $\lambda > 0$ zusammen.

Beispiel 1.4 Spezielle Lage von zwei Vektoren **014841**

Untersuche, ob die Paare von Vektoren kollinear sind durch Addition von Vielfachen der Vektoren.

a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{l} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix}$

Nehmen wir die Gleichung $\vec{c}+\frac{1}{6}\cdot\vec{d}=\vec{0}$, dann gilt z.B. auch $7\cdot\vec{c}+7\cdot\frac{1}{6}\cdot\vec{d}=\vec{0}$ oder allgemein

$$x_1\cdot\vec{c}+x_2\cdot\vec{d}=\vec{0}$$

d.h. wir können *beide* Vektoren mit einer Vorzahl multiplizieren. Erhalten wir so den Null-Vektor, dann sind sie kollinear.

Beispiel 1.5 Spezielle Lage von zwei Vektoren **429102**

Untersuche ob die Paare von Vektoren kollinear sind (durch Addition von Vielfachen der Vektoren).

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$

b) $\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\-15\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$

c) $\vec{e}=\begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-5\end{pmatrix}$

d) $\vec{g}=\begin{pmatrix}4\\-12\\8\end{pmatrix}$, $\vec{h}=\begin{pmatrix}-3\\9\\-6\end{pmatrix}$

Wir betrachten nun die spezielle Lage von drei Vektoren. Wie Fig. 1.1 zeigt, gilt für drei Vektoren, die in einer Ebene liegen

$$x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}=\vec{0}\ .$$

Beachte, dass in Fig. 1.1a) die Linearkombination

$$1\vec{a}+(-1)\vec{b}+1\vec{c}=\vec{0}\ .$$

lautet. D.h. zufällig haben die Vektoren die richtige Länge, und wir müssen sie nur addieren und subtrahieren, damit wir wieder zur Ursprung gelangen.
Sind nun drei Vektoren ganz beliebig in einer Ebene, dann gehen wir so vor:

i) Wir verschieben $\vec{a}$ und $\vec{c}$ in den Endpunkt von $\vec{b}$ (Fig. 1.1 c).

ii) Durch den Endpunkt von $\vec{b}$ legen wir zwei Geraden (rot), die Parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{c}$ liegen. Es entsteht ein Parallelogramm.

~~iii) Wir strecken $\vec{a}$ und $\vec{c}$, so dass sie die Länge der Kanten des Parallelogramms~~ haben Fig. 1.1 c).

$$\vec{a}' = \vec{a} \cdot x_1 \text{ und } \vec{c}' = \vec{a} \cdot x_3$$

iv) Wir haben $\vec{a}' - \vec{b} + \vec{c}' = \vec{0}$ Fig. 1.1 d).

Um also zu untersuchen, ob die Vektoren komplanar sind, wurden im Beispiel eine Linearkombinationen der Vektoren berechnet.

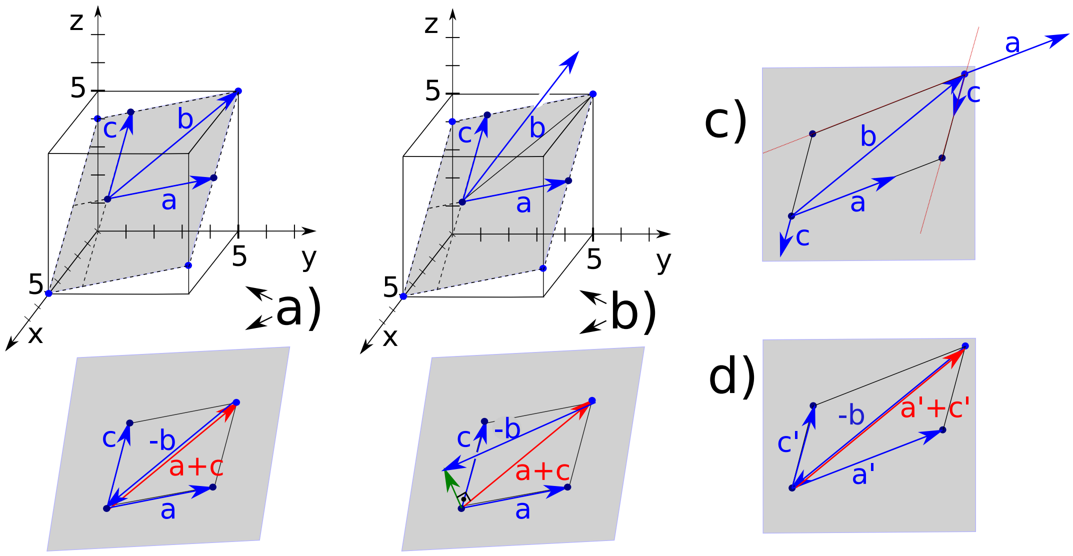


Abbildung 1.1: a) Drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, lassen sich immer so addieren, dass der Nullvektor entsteht. b) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ definieren eine Ebene. Zeigt der Vektor $\vec{b}$ aus dieser Ebene heraus, gibt es keine Linearkombination so dass $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ (abgesehen von der Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

Definition Komplanar

Drei oder mehr Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind komplanar, falls es eine Linearkombination

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

gibt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen der Koeffizienten.

Nebenbei: Liegen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht in einer Ebene, dann ist die einzige Möglichkeit um aus der Summe der Vektoren den Nullvektor zu bekommen wie folgt

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Wir merken uns also folgendes:

- Lineare Abhängigkeit ist die Verallgemeinerung der Begriffe “kollinear” und “komplanar” für beliebig viele Vektoren und beliebig viele Dimensionen.
- Um herauszufinden, ob Vektoren komplanar sind, wenden wir das Gauss-Eliminationsverfahren an.

- Linear abhängige Vektoren haben eine spezielle Lage zueinander. Zwei kollineare Vektoren sind linear abhängig, drei komplanare Vektoren sind linear abhängig.
- Die spezielle Lage erlaubt, dass man wieder zum Ursprung zurück gelang indem man sich strikt nur entlang der Vektoren bewegt.
- In 2 Dimensionen sind *mehr* als 2 Vektoren *immer* linear abhängig. In 3 Dimensionen sind mehr als 3 Vektoren *immer* linear abhängig usw.
- Linear unabhängige Vektoren haben keine spezielle Lage zueinander. Zwei linear unabhängige Vektoren spannen einen Fläche auf, drei linear unabhängige Vektoren spannen ein Volumen auf, vier linear unabhängige Vektoren spannen ein Hyper-Volumen auf.

1.2 Gleichungen lösen mit dem Gauss-Verfahren

Definition Dreiecksform

Ein Gleichungssystem ist in Dreiecksform, falls die Koeffizienten unter der Diagonalen verschwinden (siehe Beispiele 1.6 und 1.7)

Beispiel 1.6 Einsetzen in die Dreiecksform **15951**

Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left|\begin{array}{cccccc} x & +2y & +3z & = & 8 \\ & 2y & +4z & = & 14 \\ & & 5z & = & 10 \end{array}\right|$$

Lösung:

- In der letzten Zeile erhalten wir $z = 2$.
- Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt dies

$$2y + 4 \cdot 2 = 14 \;\Rightarrow\; 2y = 6 \;\Rightarrow\; y = 3$$

- Schliesslich berechnen wir x mit der ersten Zeile:

$$x + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 8 \;\Rightarrow\; x = -4$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir sehen, dass die Dreiecksform eines Gleichungssystems den Vorteil hat, dass man von unten nach oben einsetzen kann. Deshalb ist es nützlich, Gleichungssysteme in diese Form zu bringen. Dies geschieht mit dem Gauss-Verfahren.

Beispiel 1.7 Dreiecksform 712666

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left|\begin{array}{cccc} x & +2y & +3z & = & 8 \\ -3x & -2y & -z & = & 4 \\ 4x & +2y & +5z & = & 0 \end{array}\right|$$

Beispiel 1.8 Einsetzen in die Dreiecksform 25951

Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left|\begin{array}{ccccc} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ & 5y & -z & = & 6 \\ & & 7z & = & 28 \end{array}\right|$$

Beispiel 1.9 Dreiecksform 601555

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren.

Löse dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{vmatrix} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ 4x & -y & +9z & = & 30 \\ 8x & -2y & +25z & = & 88 \end{vmatrix}$$

1.3 Übungen zu linear abhängigen Vektoren

Beispiel 1.10 Kollinear **588716**

Bestimmen Sie x, y und z, so dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.11 Kollinear/Parallel 745674

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme x, so dass $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

b) Bestimme y, so dass $\vec{f} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Beispiel 1.12 Kollinear 036721

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und $\vec{w}$ sollen kollinear sein. Bestimme x und y.

Beispiel 1.13 Kollinear **631401**

Überprüfe, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.4 Übungen Gleichungssysteme lösen

Beispiel 1.14 Lösen von LGS, Reihenfolge Gleichungen vertauschen **FZJIRV**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left[\begin{array}{lcccccc} L_1: & -6x & 8y & 2z & = & 40 \\ L_2: & 12x & -16y & 2z & = & -32 \\ L_3: & 24x & -33y & -3z & = & -120 \end{array}\right]$$

Beispiel 1.15 Gauss-Elimination, Vertauschen von Gleichungen F1NB3C

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{bmatrix} L_1: & -19x & 38y & -3z & = & 114 \\ L_2: & 15x & -22y & 7z & = & -82 \\ L_3: & x & -2y & 2z & = & -6 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1.16 Gauss-Elinination, Vertauschen/Skalieren von Gleichungen H7XS9Z

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{bmatrix} L_1: & 42x & +9y & +35z & = & 205 \\ L_2: & 3x & & -6z & = & -3 \\ L_3: & 14x & +6y & +22z & = & 92 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1.17 Konzepte TZ8EV9

a) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir finden $5\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0}$. Wählen Sie die richtigen Antworten aus:

i) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind parallel
ii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind antiparallel
iii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind komplanar
iv) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig

b) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir finden $3\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$. Wählen Sie die richtigen Antworten aus:

i) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind parallel
ii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind antiparallel
iii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind komplanar
iv) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig

c) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir eliminieren die Komponenten mit dem Gaussverfahren, können aber die $z-$Komponente nicht eliminieren. Also sind die Vektoren

i) linear abhängig
ii) linear unabhängig

KAPITEL 2

Der Vektorraum

Lernziele Begriffe Vektoren

- Die Studierenden kennen die komponentenweise Schreibweise von Vektoren sowie das Vorgehen bei der komponentenweise Addition. Sie können Gegenvektoren bestimmen und Vektoren mit einem Skalar multiplizieren.
- Sie können Ortsvektoren von allgemeinen Vektoren unterscheiden.
- Sie können die Norm (Länge) eines Vektors berechnen und einen Vektor normieren.
- Sie kennen die Definition eines Vektorraums. Sie kennen neben den Vektoren in der Geometrie mindestens zwei weitere Vektorräume.

2.1 Vektoren in der Geometrie

Definition Ortsvektor

Als Ortsvektor eines Punktes bezeichnet man einen Vektor, der vom Ursprung zu diesem Punkt zeigt.

$$\overrightarrow{OA}$$

Für Berechnungen in der Geometrie ist es praktisch die Notation abzukürzen. Wir stellen fest: Die Koordinaten eines Punktes $A(2/4)$ *entsprechen* den Komponenten des Ortsvektors

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in dieser Basis. Wir unterscheiden deshalb nicht zwischen Koordinaten eines Punktes A und Komponenten des Ortsvektors $\overrightarrow{OA}$ dieses Punktes. Um die Komponenten des Ortsvektors eines Punktes anzugeben, führen wir noch folgende Kurzschreibweise ein:

Infobox Ortsvektoren

Wir kürzen den Ortsvektor des Punktes A wie folgt ab:

$$\overrightarrow{OA} =: \vec{A}$$

Wir fassen zusammen: Wir bezeichnen Ortsvektoren mit Grossbuchstaben, z.B. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$ und allgemeine Vektoren mit Kleinbuchstaben z.B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Ortsvektoren sind an den Ursprung gebunden, deshalb können wir sie nicht verschieben. Allgemeine Vektoren hingegen können verschoben werden.

Infobox Verbindungsvektor

In dieser Notation können wir für den Verbindungsvektor von $\vec{A}$ zu $\vec{B}$ schreiben:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

Die Norm eines Vektors schreiben wir immer mit

$$\|\vec{a}\|$$

und seltener als a.

Infobox Gesetze für die Norm

- Die Norm $\|\vec{a}\|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ ist (in einer Orthogonalbasis)

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + \ \ldots \ + (a_N)^2}$$

.

- Die Norm eines Vektor wird in der Geometrie auch 'Länge' oder 'Betrag' genannt. Wir ziehen aber den Ausdruck 'Norm' vor.
- Für die Norm eines Vektor gilt immer

$$\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$$

- Beachte, dass im Ausdruck oben die Striche bei $|\lambda|$ eine andere Bedeutung haben als bei $\|\vec{a}\|$. Stehen die Striche links und rechts von einer *Zahl*, wird der Betrag berechnet z.B. $|-2| = 2$, stehen aber Doppelstricht links und rechts von einem Vektor, wird desssen Länge (Norm) berechnet z.B. $\left\|\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}\right\| \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ sondern $\left\|\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}\right\| = 13$.

Beispiel 2.1 Mittelpunkt I9QK6H

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overrightarrow{PQ}$

b) Erstellen Sie eine Skizze und berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $\vec{M}$ der Strecke $\overline{PQ}$

Beispiel 2.2 Schwerpunkt eines Dreiecks **6JL1WJ**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten das Dreieck ABC.

a) Berechnen Sie den Mittelpunkt $\vec{M}$ der Kante c.

b) Berechnen Sie den Verbidungsvektor $\overrightarrow{CM}$. Was sind die Koordinaten des Schwerpunktes?

c) Geben den Schwerpunkt eines allgemeinen Dreiecks ABC an mit Hilfe der Koodinaten der Eckpunkte $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ (d.h. ohne Koodinaten rechen).

d) Überprüfen Sie Ihren Ausdruck, indem Sie in den allgemeinen Ausdruck die Koordinaten von oben einsetzen und mit dem Resultat aus Teilaufgabe c) vergleichen.

Beispiel 2.3 Quadrat FNI0DZ

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{D} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmeen Sie die Länge der Seiten.

b) Bestimmen Sie die Mittelpunkte der Seiten.

c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Quadrats.

2.2 Komponentenweise Notation Hintergrund

Wie wir später sehen werden, benutzt man in der Anwendungen meist eine komponentenweise Notation, d.h. man betreibt Mathematik mit den Komponenten. Bei dieser Notation sind folgende Regeln wichtig:

Infobox Gesetze für die komponentenweise Notation von Vektoren

Betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

- Die Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert.

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Das neutrale Element der Addition ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Wir nennen diesen Vektor den Nullvektor. Es erfüllt die Eigenschaft $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

- Komponentenweise Multiplikation mit einer Zahl:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_N \end{pmatrix} \text{ z.B. } 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Der Gegenvektor zu $\vec{w}$ ist $-\vec{w}$. Wir berechnen ihn, indem wir alle Komponenten mit (-1) multiplizieren:

$$-\vec{w} = (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Wir benutzen für Vektor die Spaltenform

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

  und seltener die Zeilenform $\vec{a} = (a_1, a_2)$
  [**?**, 11.1,p.204]

- Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. In $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ oder } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

  Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$.
  [**?**, 11.1,p.204]

Traditionell werden in der analytischen Geometrie folgende Begriffe auseinander gehalten:

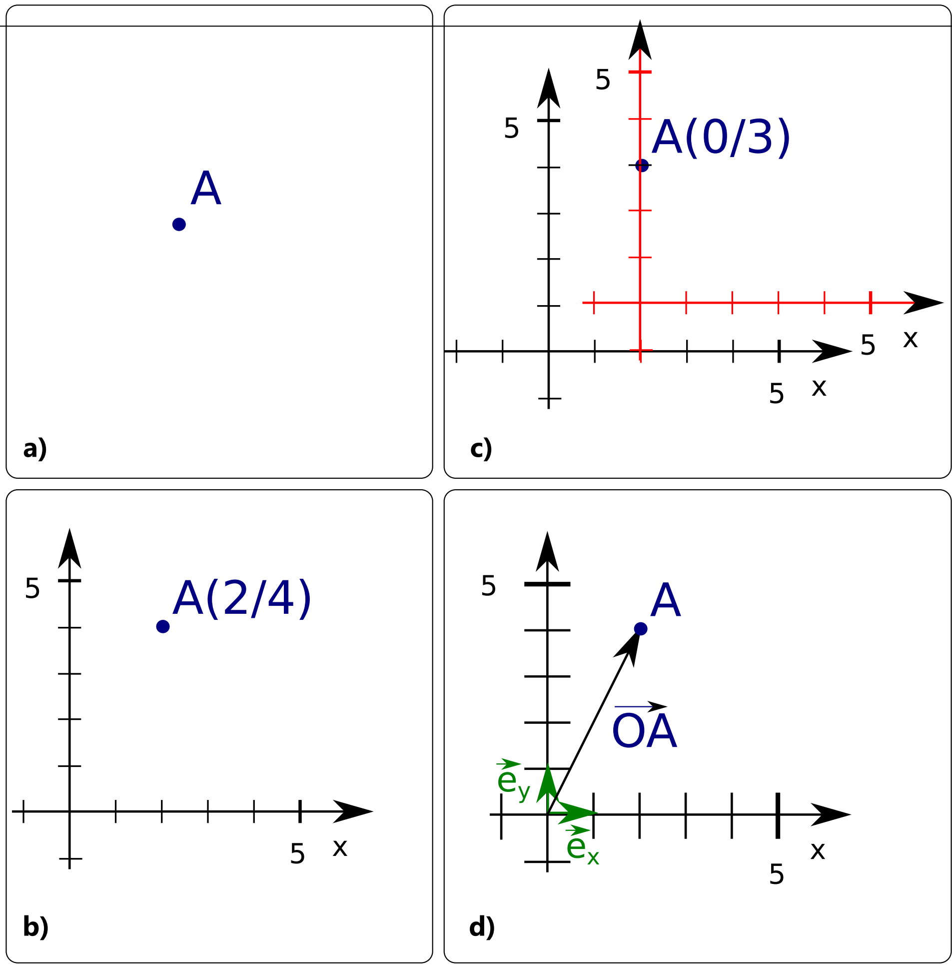


Abbildung 2.1: Traditionelle Darstellung eines Punktes (a) und der Koordinaten des Punktes (b). (c) Die Koordinaten eines Punktes sind nicht eindeutig. Sie hängen von der Wahl des Koodinatensystems ab. (d) Der Ortsvektor ist ein Vektor der vom Ursprung zum Punkt A geht.

- **Punkt**, A.[1] In Abbildung 2.1 a) wird der Punkt mit einer kleinen Scheibe dargestellt, der einen Durchmesser hat, wenn auch einen kleinen. D.h. jede Darstellung eines Punktes (hier die Scheibe), ist selber kein Punkt. Ein Punkt kann nur gedacht werden. Würde man ihn zeichnen, wie er gedacht ist — nämlich unendlich klein — wäre er unsichtbar.

- **Koordinaten eines Punktes**, $A(2/4)$. In Abb. 2.1 b) wird gezeigt, dass wir ein Koordinatensystem einzeichnen können und dann die Koordinaten auslesen können.
  Die Koordinaten eines Punktes sind aber nicht eindeutig. In Abb. 2.1 c) sehen wir, dass die Koodinaten entweder $A(2/4)$ lauten (schwarzes Koordinatensystem), oder $A(0/3)$ (rotes Koordinatensystem).

[1] Ein Punkt (als Raumpunkt) ist ein grundlegendes Element der Geometrie. Anschaulich stellt man sich darunter ein Objekt ohne jede Ausdehnung vor. Der griechische Mathematiker Euklid bezeichnet um 300 v. Chr. in seinem Werk 'Die Elemente' in der ersten Definition den Punkt als "etwas, das keine Teile hat" und verwendet die Bezeichnung semeion. Nach `https://de.wikipedia.org/wiki/Punkt_(Geometrie)`.

- **Ortsvektor eines Punktes**, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. In Abb. 2.1 d) wird gezeigt, dass damit der Vektor gemeint ist, der vom Ursprung zum Punkt A läuft.
- ein **allgemeiner Vektor** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Anders ausgedrückt: Wir setzen den Vektor mit seinen Komponenten gleich. Das ist sinnvoll, denn oft interessieren wir uns ausschliesslich für die Komponenten eines Vektors.

Alle Vektoren können zerlegt werden in Vektoren, die parallel zu den Basisvektoren des Koordinatensystems stehen $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$. Oft wird folgende Kurzschreibweise benutzt: Da die Basis oft klar ist und sich nicht ändert, wird sie 'dazugedacht'. D.h. statt $\vec{a} = 3 \cdot \vec{e}_x - 5 \cdot \vec{e}_y$ schreiben wird

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

oder

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ für } \vec{A} = 2 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y \; .$$

2.3 Der Vektorraum oder: Was ist überhaupt ein Vektor?

Definition Vektorraum

Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist eine Menge V mit einer Addition $+\colon V \times V \mapsto V$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \mapsto V$. Seien $\vec{v}$, $\vec{w}$ beliebige Elemente aus V und $a, b \in \mathbb{R}$, dann muss gelten:

i) $\vec{v} + \vec{w}$ und $a \cdot \vec{v}$ liegen ebenfalls in V (Abgeschlossenheit).

ii) Es gibt ein Element $\vec{0}$ (das **neutrale Element der Addition**), das folgendes erfüllt:
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

iii) Zu jedem $\vec{v}$ gibt es einen **Gegenvektor**[a] $-\vec{v}$, so dass
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

iv) Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

v) Die skalare Multiplikation ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$

vi) Die skalare Multiplikation ist distributiv: $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ und $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

vii) Das neutrale Element (1) der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist auch in V ein neutrales Element $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

[a] man spricht auch vom Inversen von $\vec{v}$

Infobox Vektorraum Gegenbeweis

- Eine Menge, die $\vec{0}$ nicht enthält, ist kein Vektorraum.
- Wenn wir vermuten, dass V kein Vektorraum ist, suchen wir ein Beispiel wo $\lambda \cdot \vec{v} \notin V$ oder $\vec{v} + \vec{w} \notin V$.

Beispiel 2.4 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ **ACDB18**

Zeige, dass die Punkte auf der Geraden g, ($s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot s$$

einen Vektorraum bildet. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Lösung:

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\begin{pmatrix} 2s \\ -1s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -1t \end{pmatrix} = (s+t) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Koeffizienten $s+t \in \mathbb{R}$ und eine Richtung $(2, -1)$. Deshalb liegt auch jede Summe von zwei Punkten in der Grundmenge, d.h. auf der Geraden.
Abgeschlossenheit mit der Multiplikation :

$$\lambda \begin{pmatrix} 2s \\ -1s \end{pmatrix} = (\lambda \cdot s) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Koeffizienten $\lambda \cdot s \in \mathbb{R}$ eine Richtung $(2, -1)$. Deshalb liegt auch jedes Vielfache eines Punktes in der Grundmenge, d.h. auf der Geraden.
Deshalb ist gegebene Menge ein Vektorraum.

Beispiel 2.5 Ein Punkt in $\mathbb{R}^2$ **234208**

Zeige, dass der Punkt :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

keinen Vektorraum bildet. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Lösung:

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\vec{P} + \vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

oder mit der Multiplikation

$$0 \cdot \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{P}$$

Das sind keine Elemente der Grundmenge. Deshalb ist die gegebene Menge kein Vektorraum. Übrigens: Für den Beweis, dass die Menge nicht abgeschlossen ist genügt eine der beiden Zeilen.

Definition Unterraum

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums nennt man Unterraum, falls für alle $\vec{u} \in U$ und $\vec{u}' \in U$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{u}' &\in U \\ a \cdot \vec{u} &\in U \end{aligned}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Infobox Unterräume in $\mathbb{R}^N$

Typische Unterräume in $\mathbb{R}^N$ sind Geraden und Ebenen, die $\vec{0}$ beinhalten. Sie gehen durch den Ursprung.

Beispiel 2.6 Ausgabenvektor für die Ferien I **3ZEM2R**

$$\text{Anna: } \vec{A} = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \end{pmatrix}, \text{ Bea: } \vec{B} = \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Flug} \\ \text{Hotel} \end{matrix}$$

Anna und Beat machen Urlaub. Ihre Ausgaben erfassen sie in einer Liste. Diese Liste ist ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$. Die erste Koordinaten gibt die Ausgaben (in CHF) für den Flug an, die zweite die Ausgaben für das Hotel. Berechnen Sie den Vektor der angibt

a) wie viel beide zusammen für Flug und Hotel ausgegeben haben.

b) um wie viel Beat für Flug bzw. Hotel mehr ausgegeben hat als Anna.

2.4 Übungen: Komponentenweise Notation

Beispiel 2.7 Gesetze für die Addition **SY0XAE**

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom inversen Element, Gesetz vom neutralen Element, Kommutativgesetz der Addition, Assoziativgesetz der Addition.

a) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

b) $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

c) $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

d) $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

Beispiel 2.8 Gesetze für die Multiplikation **60FTC8**

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom neutralen Element, Distributivgesetz, Assoziativgesetz.

a) $r \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = r \cdot \vec{A} + r \cdot \vec{B}$

b) $(r + s) \cdot \vec{A} = r \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{A}$

c) $(r \cdot s) \cdot \vec{A} = r \cdot (s \cdot \vec{A})$

d) $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$

Beispiel 2.9 Rechnen mit Vektoren I — GD49VQ

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Berechne die Komponenten der folgenden Vektoren:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) $\vec{C} - \vec{B}$

c) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$

d) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}$

e) $2 \cdot \vec{A}$

f) $(-1) \cdot \vec{B}$

g) $7 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B} + 2 \cdot \vec{C}$

h) $\frac{7}{2} \cdot \vec{A} + \frac{1}{3} \cdot \vec{D}$

Beispiel 2.10 Diagonalen in Rechteck — YWC8BB

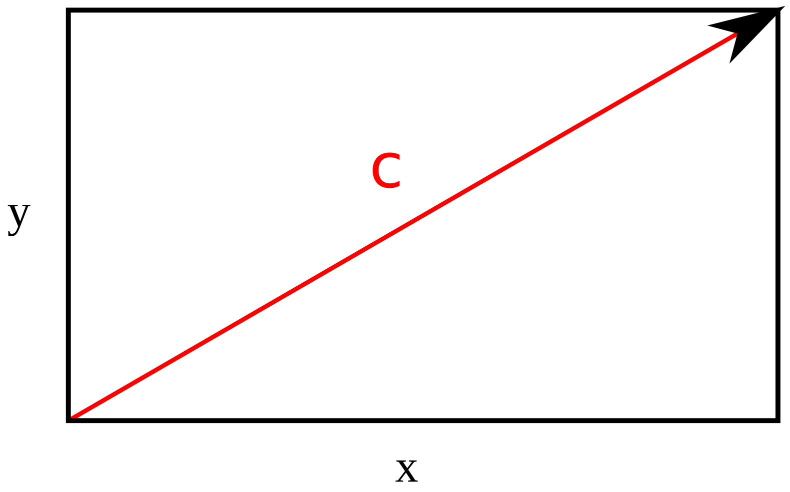
a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen (Seitenlängen $x = 8$ cm und $y = 15$ cm).

b) Berechnen Sie die Länge des Pfeils $\vec{c}$.

c) Wir betrachten nun ein Rechteck mit Seitenlängen $x = 5 \cdot 8$ cm und $y = 5 \cdot 15$ cm. Wie lange ist die Diagonale?

d) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck Seitenlänge x Zentimeter und y Zentimeter?

e) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck der Seitenlänge $\lambda \cdot x$ Zentimeter und $\lambda \cdot y$ Zentimeter?



Beispiel 2.11 Gesetze bei der komponentenweise Notation von Vektoren
490953

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme für die angegebenen Vektoren die Komponenten. Benutze wann immer möglich die oben angegebenen Gesetze.

a) Gib den Nullvektor in $\mathbb{R}^5$ an.

b) $\vec{v}+\vec{w}$

c) $5\vec{v}$, $5\vec{w}$ und $5\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

d) $-\vec{v}$

e) $\|\vec{v}\|$

f) $\|\vec{v}\cdot 5\|$

Beispiel 2.12 Parallelogramm **DDBD9S**

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}2.25\\-1.3\end{pmatrix},\ \vec{D}=\begin{pmatrix}0.25\\2.7\end{pmatrix}$$

Sind die Punkte die aufeinanderfolgenden Ecken eines Parallelogramms ABCD?

a) Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Verbindungsvektoren der Punkte berechnen.

b) Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Seitenlängen berechnen.

Beispiel 2.13 Parallelogramm II LJY3HS

Überprüfen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{D} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.14 Parallelogramm III NI9G3B

Ergänzen Sie die Punkte zu einem Parallelogramm ABCD.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 21 \\ -11 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -75 \\ 199 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.15 Gleichschenklige Dreiecke **5CE2XT**

Handelt es sich bei ABC um gleichschenklige Dreiecke. Wenn ja, berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

a)
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.75 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.16 Rechnen mit Vektoren II **KG5VVR**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{E}$ und $\vec{F} \in \mathbb{R}^2$ sind allgemeine Vektoren.

a) Gegenvektor zu $\vec{A}$?

b) Gegenvektor zu $\vec{B}$?

c) Gegenvektor zu $\vec{E} - 2 \cdot \vec{F}$?

d) Gegenvektor zu $-(\vec{E} - 5 \cdot \vec{F})$?

e) $\vec{A}+\vec{X}=\vec{B}$, $\vec{X}=?$

f) $\vec{B}+\vec{X}=\vec{0}$, $\vec{X}=?$

g) $7\cdot\left(\vec{A}-2\cdot\vec{B}\right)+\vec{X}=\vec{C}$, $\vec{X}=?$

h) $\frac{1}{2}\cdot\vec{X}+\frac{1}{3}\cdot\vec{A}+\vec{D}=\vec{X}$, $\vec{X}=?$

2.5 Übungen: Vektorraum

Beispiel 2.17 Die Ebene $\mathbb{R}^2$ **14841**

Zeige, dass die Tupel in der Menge $V=\left\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

$$\begin{array}{rcl}(x,y)+(p,k) & = & (x+p,y+k)\\ (x,y)\cdot\lambda & = & (x\cdot\lambda,y\cdot\lambda)\end{array}$$

mit $\lambda\in\mathbb{R}$.

Beispiel 2.18 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ **234208**

Zeige, dass die Tupel $V=\left\{a\cdot(1,3)\mid a\in\mathbb{R}\right\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 2.19 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ 2 **234208**

Prüfe, ob die Tupel $V = \{(a+1, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 2.20 Die Ebene $\mathbb{R}^3$ **826816**

Wie wir später sehen werden, liegen die Punkte, die man bilden kann mit dem Gesetz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

und $a, b \in \mathbb{R}$ in einer Ebene. Zeige, dass die Tripel in $V = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 2.21 Ein A4-Blatt **A1D84A**

$$V = \big\{(x,y)|0 < x < 210 \wedge 0 < y < 297\big\}$$

$$\begin{array}{rcl}(x,y)+(p,k) & = & (x+p, y+k) \\ (x,y)\cdot\lambda & = & (x\cdot\lambda, y\cdot\lambda)\end{array}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Bilden die Tupel in V einen Vektorraum? Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

Beispiel 2.22 Ausgabenvektor für die Ferien **IY13LE**

Seit Anna im Urlaub war, ist ein Jahr vergangen. Damals waren ihr Ausgaben

$$\begin{array}{l}\text{Flug}\\ \text{Hotel}\end{array} : \quad \begin{pmatrix}120\\150\end{pmatrix}$$

Inzwischen ist alles um 10% teurer geworden: wie sieht der Ausgaben-Vektor von Anna dieses Jahr aus?

Beispiel 2.23 Verdienst **JHUQUG**

Herr Meyer arbeitet für zwei Arbeitsgebern. $\vec{M} \in \mathbb{R}^2$ gibt die Monatsgehälter bei beiden Arbeitsgebern, $\vec{J} \in \mathbb{R}^2$ seine Jahresgehälter an.

a) Drücke $\vec{J}$ mit $\vec{M}$ aus.

b) Herr Meyer erhält zweimal im Jahr das doppelte Gehalt. Drücke jetzt $\vec{J}$ mit $\vec{M}$ aus.

Beispiel 2.24 Polynome bis Grad 3 **1A73ZA**

$$p(x) = 120 - 15x + 5x^2 - 4x^3, \quad q(x) = 7 + 42x - 6x^2 - 2x^3$$

Wir schreiben die Buchhaltung für die Koeffizienten der beiden Polynome in Listen auf

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 120 \\ -15 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 42 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $a(x) = p(x) + q(x)$

b) Berechne $b(x) = -3p(x) + 2q(x)$

Beispiel 2.25 Trigonometrische Funktionen **847116**

$$p(x) = 15\cos(x) - 4\sin(x), \quad q(x) = -2\cos(x) + 6\sin(x)$$

Wir schreiben die Buchhaltung für die Koeffizienten in Listen auf

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $a(x) = 2p(x) + 15q(x)$

b) Berechne $b(x) = 6p(x) + 4q(x)$

Beispiel 2.26 Polynome bis Grad 4 **625994**

Zeige, dass die Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 \text{ mit } a_i \in \mathbb{R}$$

(Polynom 4. Grades) einen fünfdimensionalen Vektorraum V bilden.

KAPITEL 3

Darstellung der Gerade in $\mathbb{R}^2$

Lernziele Darstellung der Gerade

- Die Studierenden kennen die Geradengleichung in Parameterform.
- Die Studierenden können aus der Koordinatengleichung einer Geraden die Parameterform bestimmen und umgekehrt.
- Die Studierenden können einen Vektor normieren.
- Die Studierenden können überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen.
- In $\mathbb{R}^2$ können die Studierenden zu einem gegebenen Vektor $\vec{v}$ einen zweiten Vektor $\vec{n}$ bestimmen, der senkrecht auf $\vec{v}$ steht.

Eine Gerade kann auf folgende Arten dargestellt werden:

Definition Funktionsgleichung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$

Der Ausdruck
$$y = m \cdot x + d$$
beschreibt eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Dabei ist m die Steigung und d der y-Achsen-Abschnitt

Definition Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$

Alle Punkte, die auf einer Geraden liegen und die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ haben, erfüllen die Bedingung
$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0$$
Dabei ist $n \in \mathbb{R}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ der Normalenvektor der Geraden.

Definition Parameterform der Geraden in $\mathbb{R}^2$

Die Punkte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \vec{v}$$

beschreiben eine Gerade. Dabei sind

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{A} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R}$$

Wir nennen

- $\vec{A}$ den **Aufpunkt**.
- $\vec{u}$ den **Richtungsvektor**.

[**?**, Bd. 1 II 4.1] In R^3 gilt analog

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \vec{u}$$

mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{A} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{R}^3; s \in \mathbb{R}$$

Infobox Darstellung von Geraden in $\mathbb{R}^n$

- In $\mathbb{R}^2$: Für Geraden, die parallel zu y-Achse verlaufen, gibt es eine Koordinatengleichung (z.B. $x = 3$) aber keine Funktionsgleichung.
- In $\mathbb{R}^n$ werden Geraden durch die Parameterform dargestellt. Für die Gerade gibt es in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) keine Funktionsgleichung und keine Koordinatenform.

Grundfertigkeiten beim Wechsel der Darstellung von Geradengleichungen

Beispiel 3.1 Parameterform der Geraden EEZWBD

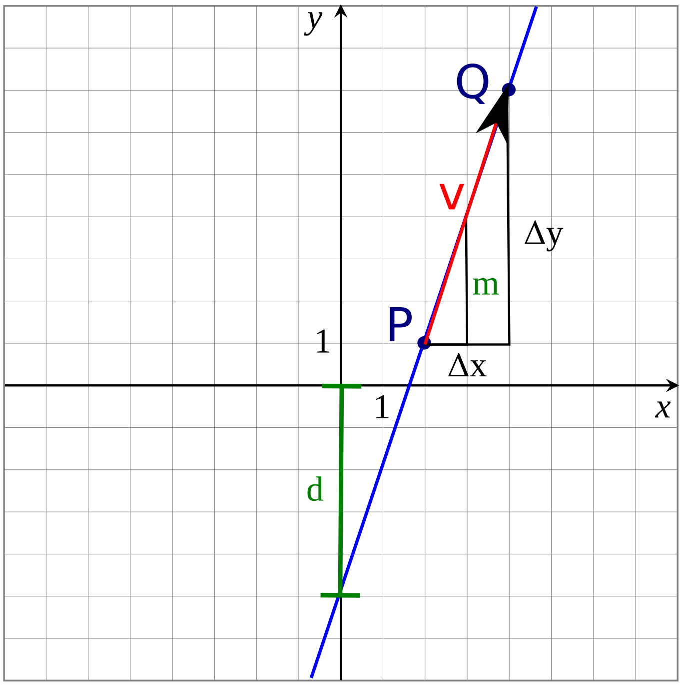
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir kennen den Mittelpunkt der Strecke $\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overrightarrow{PQ}}_{=\vec{v}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie 4 weitere Punkte auf der *Geraden* durch $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ an.

b) Wie können wir *alle* Punkte auf der Geraden darstellen?

Beispiel 3.2 Grundfertigkeiten 1 EPM0VQ



Wir betrachten die Gerade g durch die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Geraden

a) als Funktionsgleichung

b) in Parameterform.

Lösung:

a) Wir bestimmen die Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{4-2} = 3 \; .$$

Der y-Achsenabschnitt muss nun die Gleichung (beim Punkt $\vec{P}$) erfüllen:

$$1 = 3 \cdot 2 + d \; .$$

also $d = -5$. Die Funktionsgleichung lautet also

$$y(x) = -5 + 3x$$

b) Wir berechnen den Verbindungsvektor

$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Parameterform lautet also ($s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{P} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Beispiel 3.3 Grundfertigkeiten 2 **Z0AP3T**

Wir betrachten die Gerade f durch die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Geraden

a) in Parameterform.

b) als Funktionsgleichung.

c) in Koordinatenform

d) zwei weitere Punkte auf der Geraden anhand der Parameterform

e) zwei weitere Punkte auf der Geraden Koordinatengleichung

Beispiel 3.4 Grundfertigkeiten 3 **F1CD8V**

Wir betrachten die Gerade h gegeben durch

$$3 \cdot x + 2 \cdot y + 6 = 0$$

Bestimmen Sie

a) zwei weitere Punkte auf der Geraden.

b) die Parameterform der Geraden h

Wieso funktioniert das?

Beispiel 3.5 Bestimme die Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ **814251**

Gegeben seien die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Berechne zunächst zwei weitere Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Überlege dann, wie man alle Punkte auf der Geraden berechnen kann.

Beispiel 3.6 Punkte einer Geraden **702095**

Die Gerade ist gegeben durch

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liegen die Punkte auf der Geraden g?

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.7 Parameterform einer Geraden **THGS9F**

Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden durch die Punkte

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$

b) $\vec{C} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.8 Senkrechte Vektoren **HGV4AA**

Zeichnen Sie folgende Vektoren in ein Koordinatensystem ein und bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht dazu steht.
Berechnen Sie anschliessend für die beiden Vektoren den Term

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

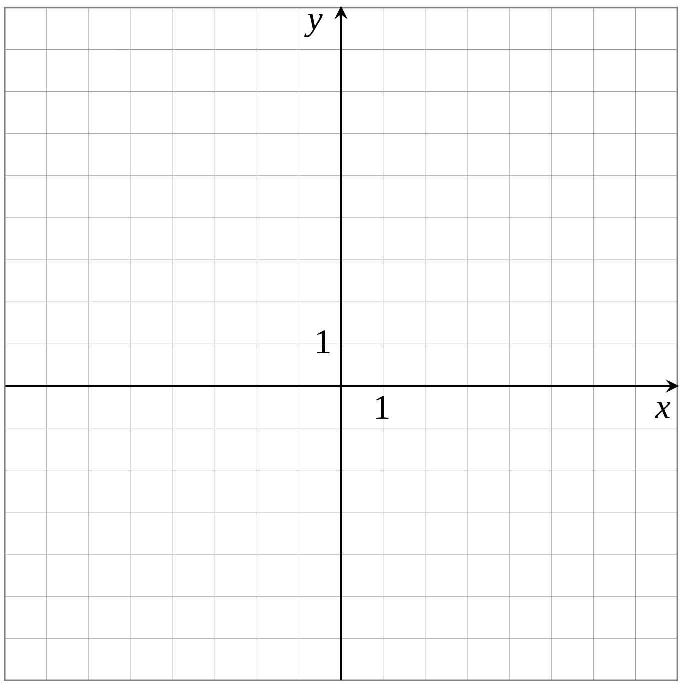
b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ u \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$



Infobox Senkrechte Vektoren

Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

- Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander, falls gilt

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y = 0$$

- Die Summe oben notieren wir auch mit dem Skalarprodukt

$$\vec{v} \odot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

- Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\vec{v}$.
- Diese Technik erlaubt es, aus dem Richtungsvektor einer Geraden $\vec{v}$ einen Vektor $\vec{n}$ zu bestimmen, der senkrecht auf der Geraden steht. Wir nennen dann $\vec{n}$ den **Normalenvektor**.

Beweis, dass $\vec{v}$ senkrecht steht auf $\vec{n}$:

$$\vec{v} \odot \vec{n} = v_x \cdot (-v_y) + v_y \cdot v_x = 0$$

Beispiel 3.9 Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$ **9TQ8VC**

Wir betrachten die Gerade g. Sie lässt sich darstellen in Parameterform

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

Wir bestimmen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und daraus in Koordinatenform

$$5x - y = 4$$

Untersuchen sie die geometrische Lage von $\vec{v}$ und $\vec{n}$.

Beispiel 3.10 Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$ **8SR7RB**

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}$ steht.

b) Wir berechnen einen zweiten Punkt auf der Geraden

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Welchen Winkel schliessen $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n}$ ein? Wie untersuchen Sie das mathematisch?

c) Wir berechnen einen weiteren Punkt, der nicht auf der Geraden liegt

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Welchen Winkel schliessen $\vec{l} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{n}$ ein?

d) Wir betrachten einen weiteren Punkt $\vec{C} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf der Geraden g. Drücken Sie mathematisch aus, dass $\overrightarrow{AC}$ senkrecht zu $\vec{n}$ steht.

e) Multiplizieren Sie den letzten Ausdruck aus und vereinfachen Sie.

Beispiel 3.11 Von der Koordinatenform zur Parameterform der Geraden **V1YY0V**

$$g: \quad 5x + 8y - 16 = 0$$

a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\vec{n}$ der Geraden.

b) Bestimmen Sie den Richtungsvektor $\vec{v}$.

c) Bestimmen Sie einen Punkt $\vec{A}$ auf der Geraden.

d) Geben Sie die Parameterform der Geraden an.

Beispiel 3.12 Konstante bestimmen **0JNWFS**

$$h: \quad (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}}) \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

a) Geben Sie den Normalenvektor an.

b) Bestimmen Sie n_x und n_y in der Koordinatenform

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0$$

c) Der Punkt $\vec{A}$ liegt auf der Geraden. Wie lässt sich mit dieser Überlegung d bestimmen?

d) Geben Sie h in der Koordinatenform an.

Infobox Umwandeln der Darstellungen der Geraden

- 2 Punkte zu Parameterform: Einen Punkt als Aufpunkt wählen, $\vec{v} = \vec{B} - \vec{A}$ ist der Richtungsvektor.
- Parameterform zu Koordinatenform: Aus $\vec{v}$ den Normalenvektor $\vec{n}$ berechnen. Dann Pkt. einsetzen und Konstante bestimmen.
- Parameterform zu Funktionsgleichung: Mit $\vec{v}$ die Steigung berechnen und den Aufpunkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ einsetzen in

$$y = m \cdot (x - A_x) + A_y$$

.

- Koordinatenform zu Parameterform: Normalenvektor $\vec{n}$ auslesen. Der Vektor senkrecht zu $\vec{n}$ ergibt den Richtungsvektor. Ein Punkt (z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$) ist der Aufpunkt.

3.1 Übungen: Geradengleichung

Beispiel 3.13 Gerade als Gleichung: Geradengleichung **48726**

Durch die Gleichung $x_2 = mx_1 + c$ wird eine Gerade im x_1x_2-Koordinatensystem beschrieben. Dabei ist m die Steigung und d der y-Achsenabschnitt. Gib die Parameterdarstellung der Geraden an für

a) $m = 3,\ d = 3$

b) $m = 0,\ d = 2$

c) $x_1 + x_2 = 3$

d) $2x_1 + x_2 = 5$

e) $x_1 = 5$

Beispiel 3.14 Von der Parameterform zur Geradengleichung **94899**

Bestimme die Gleichung $x_2 = m \cdot x_1 + c$ der Geraden g:

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.15 Schnittpunkt von zwei Geraden **339474**

Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes $\vec{S}$ der Geraden g und h:

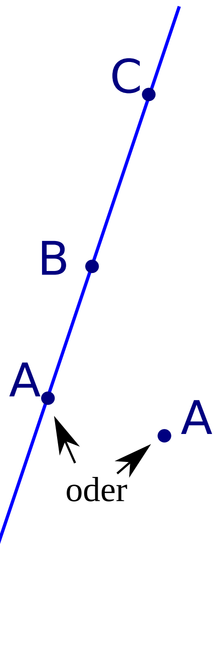
a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.16 Geraden **503523**



Liegt der Punkt $\vec{A}$ auf der Geraden durch die Punkte $\vec{B}$ und $\vec{C}$?

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix}$

KAPITEL 4

Trigonometrie

Lernziele Trigonometrie, Periodische Schwingungen

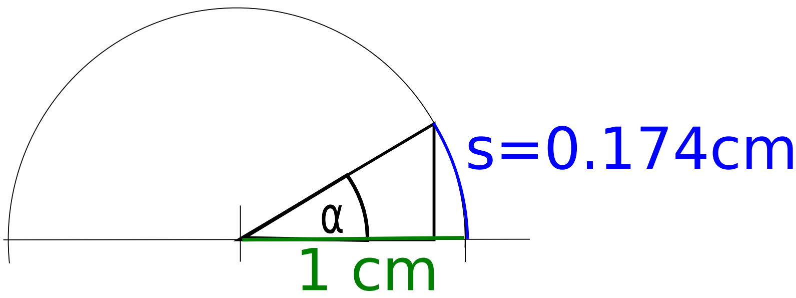
- Die Studierenden können Winkel zwischen Bogenmass und Winkelgrad umrechnen.
- Sie kennen die Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis die Eigenschaften, die sich daraus ergeben (Symmetrie und Periodizität).
- Sie kennen die Graphen der trigonometrischen Funktionen $\cos(t)$ und $\sin(t)$.
- Sie können Funktionen transformieren, d.h. verschieben und strecken entlang der x- und $y-$Achse. Sie können Funktionen an den Koordinatenachsen spiegeln.
- Sie kennen die allgemeine Sinusfunktion und deren charakteristische Grössen, Null, Periode und Amplitude.
- Sie kennen die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen.
- Sie können mit den Arkus-Funktionen aus gegebenen den Komponenten von Vektoren und Dreiecken Winkel berechnen.

- Sie können gleichfrequente Schwingungen zu *einer* Sinusschwingung addieren.
- Sie können eine Sinusschwingung mit Phasenwinkel zerlegen in reine sin- und cos-Schwingungen ohne Nullphasenwinkel

4.1 Das Bogenmass

Beispiel 4.1 Kreisbogen EMSJBG

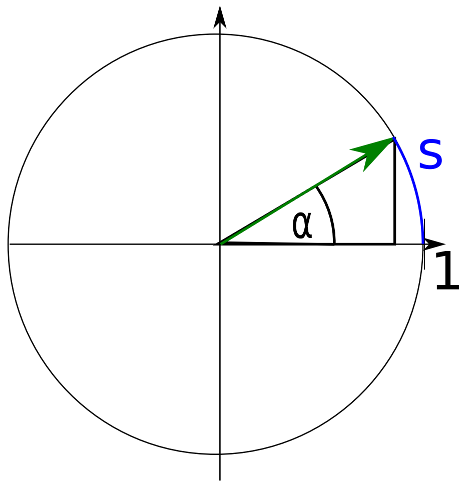
Wir messen auf einem Kreisbogen (Radius 1) einen Kreisbogen vom 0.174533. Wie gross ist der darunterliegende Winkel.



Definition Bogenmass

Unter dem Bogenmass s eines Winkels α (in Grad) verstehen wir die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$



Beispiel 4.2 Rechne die Masseinheit um **245307**

Berechne die Winkel $s = \frac{\pi}{7}$ und $\varphi = 12^\circ$ in beiden Masseinheiten.

Lösung:

Wir beginnen mit der Feststellung, dass ein voller Kreis in den beiden Masseinheiten 2π oder 360° entspricht:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
$\frac{\pi}{7}$	

Danach berechnen wir den Quotienten der dritten und zweiten Zeile ist in allen Winkel-Einheiten gleich, also

$$f = \frac{\frac{\pi}{7}}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} .$$

Also

$$\alpha = \frac{360^\circ}{14} = 25.71^\circ .$$

Gleich verfahren wir bei der Umrechnung von Winkelgrad ins Bogenmass:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
	12°

Der Quotient der dritten und zweiten Zeile ist

$$f = \frac{12^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} .$$

Also

$$x = \frac{2\pi}{30} = 0.209 .$$

Beispiel 4.3 Bogenmass **TC2EE3**

Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass x oder im Winkelmass α.

α	$111°$		$120°$		$-15°$
x		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

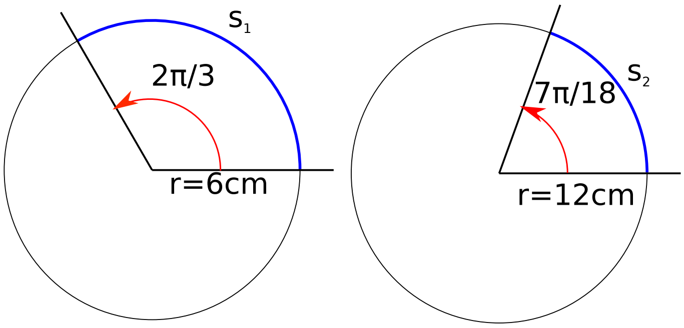
Beispiel 4.4 Bogenmass **978833**

Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass x oder im Winkelmass α.

α	$18°$				$50°$
x		$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	

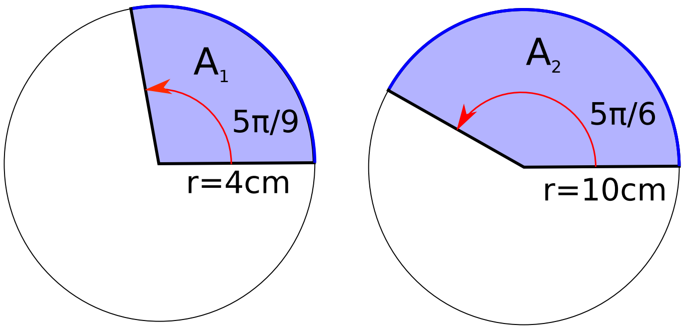
Beispiel 4.5 Bogenmass **335331**

Berechne die Bogenlänge s.



Beispiel 4.6 Bogenmass **845541**

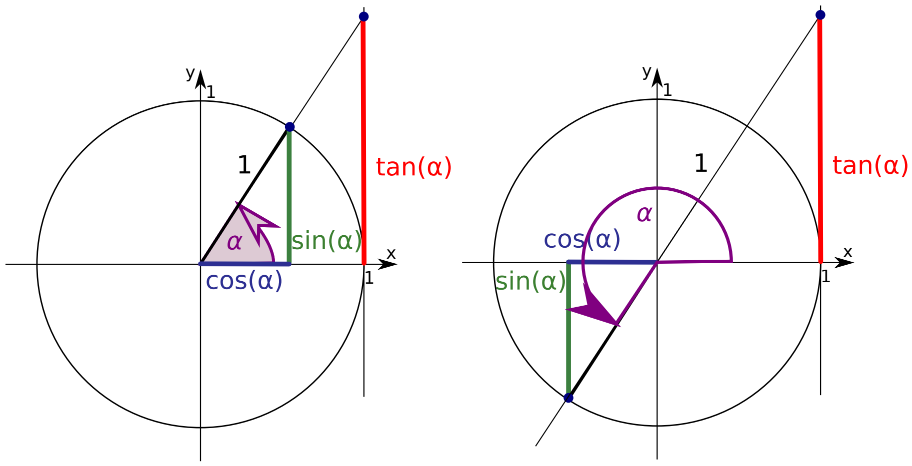
Berechne die Fläche des Kreissektors A.



4.2 Der Einheitskreis

Wir definieren die trigonometrischen Funktionen als Stücke am Einheitkreis.

Definition Winkelfunktionen



Beachten Sie, dass die trigonometrischen Funktionen auch die Richtungen der Pfeile angeben und durch ihr Vorzeichen. Es gilt

- Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $\sin(\alpha) > 0$ und $\cos(\alpha) > 0$
- Für $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$: $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) < 0$

Infobox Winkel haben eine Richtung

In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeigersinn gemessen, d.h. $10°$ ist im Gegenuhrzeigersinn und $-10°$ ist im Uhrzeigersinn.

Für rechtwinklige Dreiecke gelten auch folgende Relationen. Wir werden die Relationen selten gebrauchen, weil wir uns mehr für die Beschreibung von periodischen Schwingungen interessieren.

Infobox Relationen am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H};\ \cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$

Mit den Abkürzungen A für Ankathete, G für Gegenkathete und H für Hypotenuse.

[**?**, Bd. 1 III 9.1]

Beispiel 4.7 Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen **K4PJLD**

Welche Vorzeichen haben $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für die folgenden Winkel? Geben Sie den Quadranten an.

a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Wir strecken den Einheitskreis um den Faktor r. Dadurch erhalten wir einen Kreis mit Radius r.

Satz Polarkoordinaten

Wir betrachten $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 360°$. Der Vektor

$$\vec{w} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat die Länge r und schliesst mit der x-Achse den Winkel φ ein.
Wir nennen (r, φ) die Polarkoordinaten von $\vec{w}$.

Beispiel 4.8 Polarkoodinaten **7SXS1J**

Addiere die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Ihre Polar-Koordinaten sind $(r = 6.5, \varphi = 30°)$ und $(r = 10, \varphi = 50°)$.
Lösung:
Wir berechnen zuerst die Karthesischen Koordinaten

$$\vec{a} = 6.5 \cdot \begin{pmatrix} \cos(30°) \\ \sin(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.62917 \\ 3.25 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = 10 \cdot \begin{pmatrix} \cos(50°) \\ \sin(50°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.42788 \\ 7.66044 \end{pmatrix}$$

Die Summe ist also

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 12.057 \\ 10.91 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.9 Polarkoodinaten UCWJYR

Geben Sie die Vektoren in Karthesischen Koordinaten an.

a) $\vec{a}$: $\|\vec{a}\| = 1$, $\varphi = 45°$

b) $\vec{b}$: $\left\|\vec{b}\right\| = 2$, $\varphi = -225°$

c) $\vec{c}$: $\|\vec{c}\| = 5$, $\varphi = \frac{5\pi}{36}$

d) $\vec{d}$: $\left\|\vec{d}\right\| = 2$, $\varphi = 60°$

e) $\vec{e}$: $\|\vec{e}\| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

f) $\vec{f}$: $\left\|\vec{f}\right\| = 7$, $\varphi = 35°$

g) $\vec{g} = \vec{a} + \vec{b}$

Beispiel 4.10 Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten NNHCXF

Geben Sie die kartesischen Koordinaten der Vektoren an. Verwenden Sie auf dem Taschenrechner den Grad modus (`deg`), falls Winkel in Grad angegeben sind und den Radian-Modus (`rad`), falls die Winkel im Bogenmass angegeben sind.

a) $r = 5$, $\varphi = 216.9°$

b) $r = 13$, $\varphi = -0.4$

c) $r = 37$, $\varphi = 1.24$

d) $r = 85$, $\varphi = 25°$

e) $r = 145$, $\varphi = 4.55$

f) $r = 197$, $\varphi = 98.2°$

Beispiel 4.11 Kompass und Winkel **IJ5I6F**

a) Nicolas läuft 3 m von Punkt O weg. Dabei schliesst er mit der positiven x-Achse einen Winkel von 30° ein. Beschreibe seinen Weg mit einem Pfeil in der Zeichnung und danach mit Zahlen.

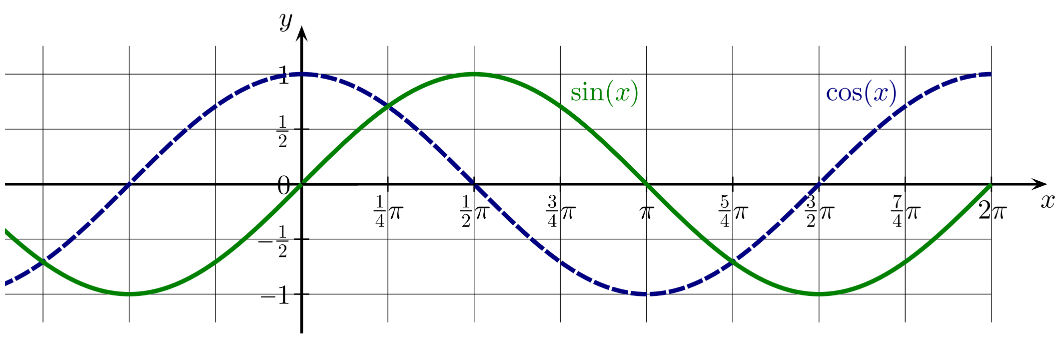
b) Wo landet er, wenn er 7 m läuft und mit der positiven x-Achse einen Winkel von 55° einschliesst?

c) Wo landet er, wenn er beide Wege nacheinander läuft?

4.2.1 Graphen der trigonometrischen Funktionen

Infobox Funktionen

- Die Zuordnung $x \mapsto y = f(x)$ heisst $f(x)$ Funktion. Dabei ist x die freie Variable (Input) und y die abhängige Variable (Output).
- Wir nennen x das **Argument** von f und y den **Funktionswert**.



Definition Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f(t)$ heisst

- periodisch mit **Periode** T, falls $f(t+T)=f(t)$
- **symmetrisch**, falls $f(-t)=f(t)$
- **antisymmetrisch**, falls $f(-t)=-f(t)$

Beispiel 4.12 Symmetrie von Monomen **NUDTZW**

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^3$

Lösung:

a) $f(-x)=(-x)^2=(-1)^2\cdot x^2=x^2$. Also

$$f(-x)=f(x)$$

Die Funktion ist also symmetrisch.

b) $f(-x)=(-x)^3=(-1)^3\cdot x^3=-x^3$. Also

$$f(-x)=-f(x)$$

Die Funktion ist also antisymmetrisch.

Beispiel 4.13 Symmetrie von Monomen **MVESAV**

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x)=1+x^2$

b) $f(x)=x-x^3$

c) $f(x)=x+x^2$

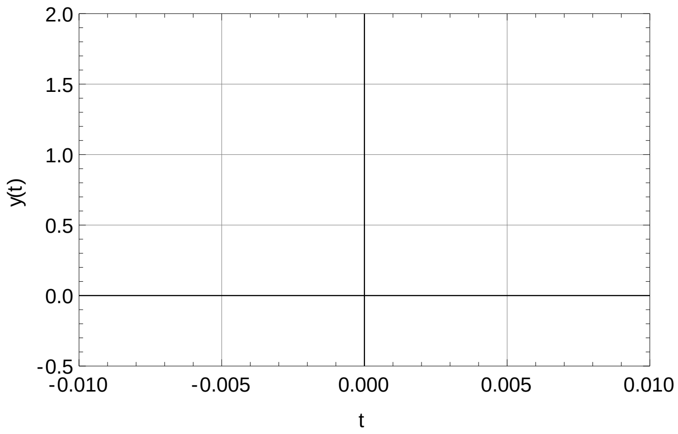
d) $f(x)=x^3+x^4$

Beispiel 4.14 Symmetrie der trigonometrischen Funktionen **U4P0S2**

Benutze den Einheitskreis:

a) Sind die trigonometrischen Funktionen periodisch. Warum? Was ist ihre Periode?

b) Haben die trigonometrischen Funktionen Symmetrien. Welche? Warum? Betrachten (zeichen) Sie dafür $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ in der Umgebung von $\alpha = 0$.



Beispiel 4.15 Symmetrien **MZ2D7Y**

Bestimme die Symmetrien der folgenden Funktionen

a) $f(x) = \sin(-x)$

b) $f(x) = \cos(-x)$

c) $f(x) = \sin(x^2)$

d) $f(x) = \big(\sin(x)\big)^2$

e) $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big)$

f) $f(x) = \cos(x - 6\pi)$

4.3 Transformationen von Funktionen

Satz Transformationen

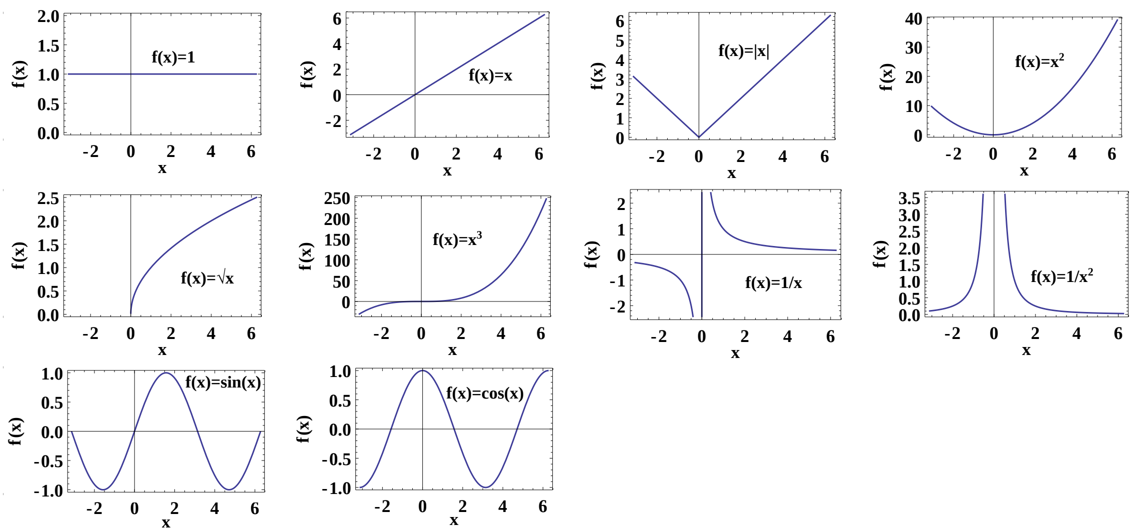
Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kann wie folgt transformiert werden:

- $-f(x)$ Spiegelung an der x-Achse
- $f(-x)$ Spiegelung an der y-Achse
- $f(x) + c$ Verschiebung in Richtung der y-Achse ($c > 0$)
- $f(x - c)$ Verschiebung in Richtung der **positiven** x-Achse ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Stauchung in Richtung der x-Achse ($a > 1$).
- $a \cdot f(x)$ Streckung in Richtung der y-Achse ($a > 1$).

Die Transformationen entlang der y-Achse sind intuitiv, die entlang der x-Achse gehen oft gegen unsere Intuition.

Infobox Folgerungen Transformationen

- $f(x) - c$ Verschiebung der y-Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(x + c)$ Verschiebung der x-Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Streckung in Richtung der x-Achse ($0 < a < 1$).
- $a \cdot f(x)$ Stauchung in Richtung der y-Achse ($0 < a < 1$).



Die zehn Graphen oben zeigen die häufigsten Funktionen in der Algebra. Sie sollten schon mit den Charakteristiken dieser Graphen vertraut sein. Das wird Ihnen

~~helfen, die Graphen der etwas komplizierteren Funktionen, die aus den einfachen~~ Funktionen durch Transformation hervorgehen, besser zu verstehen.

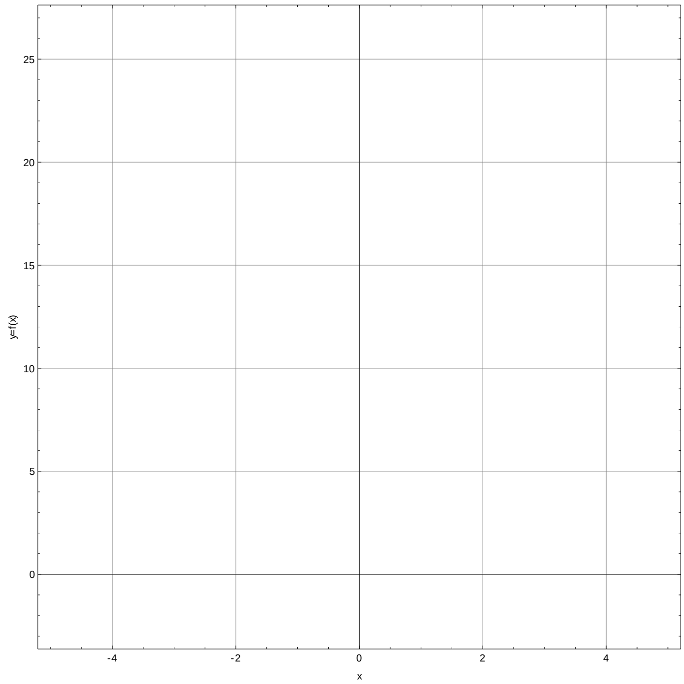
Beispiel 4.16 Vertikale Verschiebung **AEU6T**

a) Ergänzen Sie die Tabelle und skizzieren Sie die Graphen.

b) Was ändert sich zwischen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$? Die Form? Die Position? Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

c) Was ist der vertikale Abstand der Graphen?

d) Wie verschiebt sich also der Graph der Funktion $f(x)$, wenn wir die Transformation $y = f(x) + k$ oder $y = f(x) - k$ mit $k > 0$ anwenden?



Beispiel 4.17 Horizontale Verschiebung: Parabel **2RSKP9**

Wir betrachten die Parabel $f(x) = x^2$. Sie hat bei $(x, y) = (0, 0)$ einen Scheitelpunkt.

a) Ergänzen Sie die Tabelle.

b) Skizzieren Sie unten die Graphen.

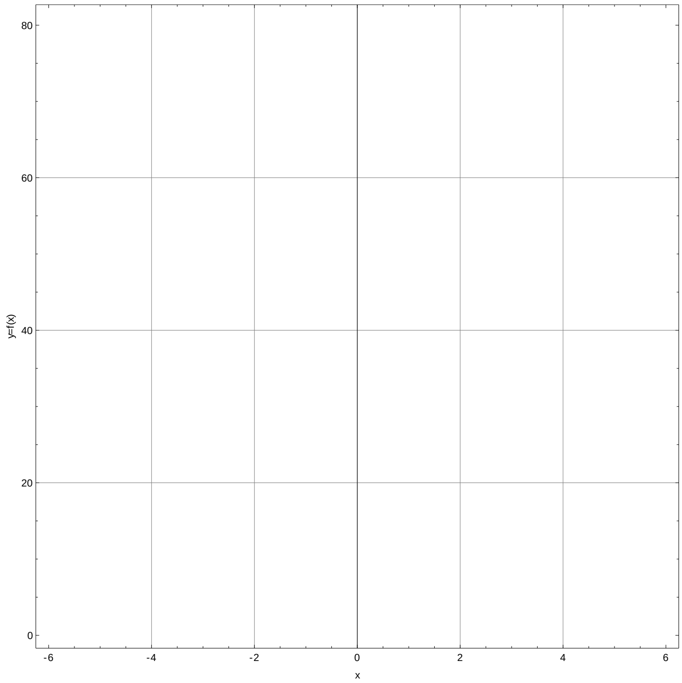
c) Wo befindet sich der Scheitelpunkt bei der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$?

d) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = (x - c)^2$ ihren Scheitelpunkt? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Verschiebung in Richtung ...'.

e) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x + 3)$ für x den Wert -3 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert ... einsetze."
- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x + 3)$ jetzt bei -3 so, wie ursprüngliche Funktion bei ... war."

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = f(x+3) = (x+3)^2$	$h(x) = f(x-2) = (x-2)^2$
-4	16	1	
-3	9	0	
-2	4	1	
-1	1	4	
0	0	9	
1	1	16	
2	4	25	
3	9	36	
4	16	49	



Beispiel 4.18 Streckung und Stauchung **ZC38E4**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$. Sie hat bei $x = \pi \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) Nullstellen, bei $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ Tiefpunkte und bei $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ Hochpunkte.

a) Ergänzen Sie die Tabelle (maximal 3 Stellen). Nutzen Sie auch Symmetrien der Funktionien aus.

b) Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ hat ihre charakteristische Nullstelle bei $x = \pi$. Welches Kriterium muss der Ausdruck im Argument der Sinusfunktion von $g(x) = \sin(2x)$ erfüllen, damit $g(x) = 0$?

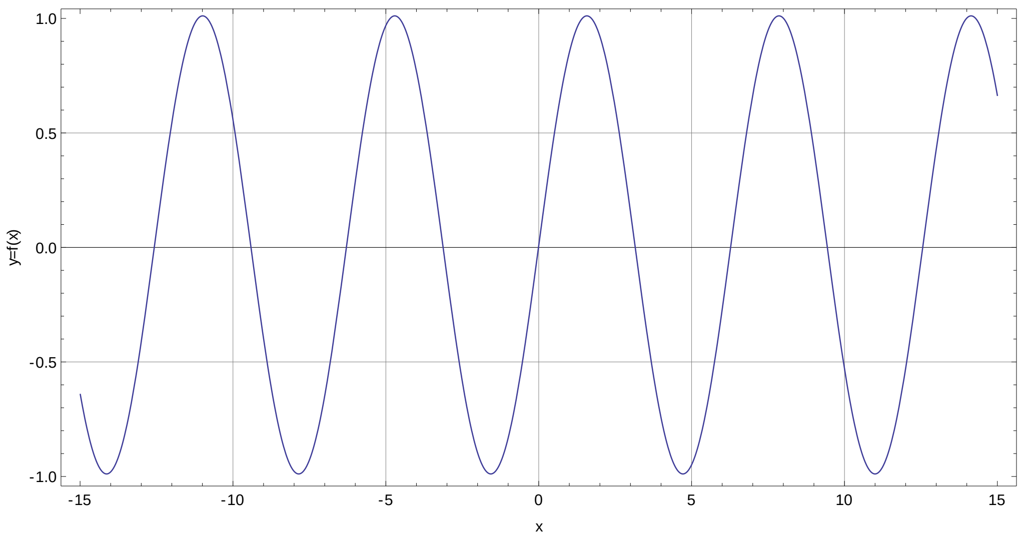
c) Bestimmen Sie die erste Nullstelle $x > 0$ der Funktionen $h(x)$ und $p(x)$. Vergleichen Sie die gefundenen Nullstellen mit der der ursprünglichen Funktion $f(x) = \sin(x)$.

d) Wurden die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ entlang der x-Achse zusammengestaucht oder gestreckt? Argumentieren Sie mit Hilfe der ersten Nullstelle und der Tabelle.

e) Skizzieren Sie nun die Graphen der Funktion $h(x)$, $g(x)$ und $p(x)$.

f) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = \sin(x\omega)$ ihre erste Nullstelle $x > 0$? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Streckung des Graphen in Richtung ...' .

x	$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \sin(2x)$	$h(x) = \sin(\frac{1}{4}x)$	$p(x) = \sin(\frac{2\pi}{5} \cdot x)$
-4π	0	0		
-10	0.544	-0.913		
-2π	0	0		
-5	0.959	0.544		
$-\pi$	0	0		
0	0	0	0	0
π	0	0	0.707107	-0.722
5	-0.959	-0.544		
2π	0	0		0.999
10	-0.544	0.913		
4π	0	0		



4.3.1 Weitere Aufgaben

Beispiel 4.19 Translationen **DG6A5Y**

Wir betrachten die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$. Sie ist definiert, falls das Argument (hier x) im Intervall $[0; \infty[$ liegt.

a) In der Funktion $r(x) = f(x-3) = \sqrt{x-3}$ können wir $x = 3$ einsetzen und erhalten

$$r(3) = f(3-3) = \sqrt{3-3} = \sqrt{0} = 0$$

Also ist $x = 3$ die Stelle, die den Definitionsbereich nach unten begrenzt. Geben Sie die untere Grenze des Definitionsbereichs der folgenden Funktionen an:

$$g(x) = f(x-5) = \sqrt{x-5},\ h(x) = f(x+14) = \sqrt{x+14}$$

$$k(x) = f(x-10)+2 = \sqrt{x-10}+2,\ p(x) = f(x+\frac{1}{4})-3 = \sqrt{x+\frac{1}{4}}-3$$

b) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- “Wenn ich bei $g(x) = f(x-5)$ für x den Wert 5 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert ... einsetze.”
- “Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x-5)$ jetzt bei 5 so, wie ursprüngliche Funktion bei ... war.”

Schreiben Sie die obigen Sätze auch allgemein für die Funktion $f(x-c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ auf.

c) Zeichnen Sie die Graphen von $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $p(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie ebenfalls den Vektor ein um den die Funktion $f(x)$ jeweils verschoben wurde, um $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ oder $p(x)$ zu erhalten.

d) Ergänzen Sie nun folgenden Satz: “Die Transformation $f(x-c)+d$ verschiebt die Funktion $f(x)$ ...”

Beispiel 4.20 Spiegelung 82Q57Q

Wir betrachten die Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$.

a) Ergänzen Sie die Tabelle

b) Geben Sie für alle Funktionen die Stelle an, wo der Ausdruck unter der Wurzel 0 ist. In welche Richtung auf der x-Achse dürfen Sie sich von dieser Stelle aus bewegen, damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv wird?

c) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen an.

d) Beschreiben Sie die Zeilen 3 und 5 in Worten: Was sind ihre Ähnlichkeiten? Worin unterscheiden Sie sich?

e) Erklären Sie nun die Ähnlichkeiten und Unterschiede (Zeilen 3 und 5) aufgrund der Werte in den Zeilen 2 und 4.

f) Plotten Sie nun die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$ mit Matlab oder GeoGebra.

g) Wie verändern sich die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$, falls Sie anstatt $f(x)$ die Funktion $-f(x)$ etc. plotten?

h) Vervollständigen Sie nun folgende Sätze: “Der Graph der Funktion $y = f(-x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$. ”
“Der Graph der Funktion $y = -f(x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$. ”

x	-18	-11	-6	-3	-2	2	3	6	11	18
$x-2$	-20	-13	-8	-5	-4	0	1	4	9	16
$g(x) = \sqrt{x-2}$										
$-x-2$	16	9	4	1	0	-4	-5	-8	-13	-20
$h(x) = \sqrt{-x-2}$										

Beispiel 4.21 Spiegelung 879G1J

Wir betrachten die Funktion $g(x) = 1 - 2x + x^2 + x^3$. Bestimmen Sie

a) die Funktion $h(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der x-Achse ist.

b) die Funktion $p(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der y-Achse ist.

c) Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie alle drei Funktionen in Matlab oder GeoGebra im Bereich $x \in [-2.2; 2.2]$ plotten.

4.4 Die allgemeine Sinusfunktion; Phase und Amplitude

Infobox Eigenschaften der allgemeinen Sinusfunktion

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin\big(\omega \cdot (t + c)\big)$$

hat

- A die Amplitude,
- die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- die charakteristische Nullstelle bei $-c$

Der Nullphasenwinkel ist $\varphi = c \cdot \omega$.
Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin\big(\omega \cdot t + \varphi\big)$$

hat

- die Amplitude A ,
- die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- und den Nullphasenwinkel φ

Die charakteristische Nullstelle liegt bei $-\frac{\varphi}{\omega}$.

Beispiel 4.22 Charakteristische Grössen einer harmonischen Schwingung
IMSGR1

$$f(t) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-\frac{1}{2})\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi t}{5}t-\frac{\pi}{5})\right)$$

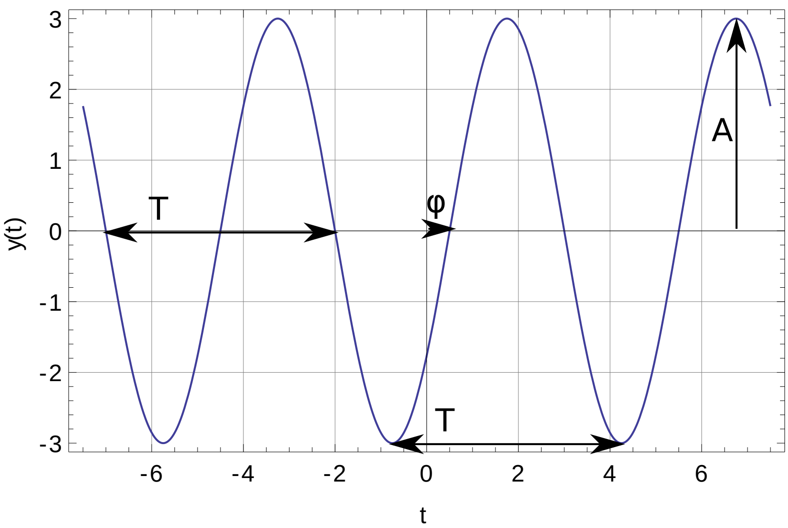
a) Geben Sie für $f(t)$ den Nullphasenwinkel φ, die Amplitude A und die Periode T an.

b) Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der Funktionen.

c) Wo erscheinen die Charakteristischen Grössen im Graphen?

Lösung:

- die Amplitude $A = 3$,
- $\omega = \frac{2\pi}{5}$ und die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 5$,
- die charakteristische Nullstelle bei $\frac{1}{2}$,
- und den Nullphasenwinkel $-\frac{\pi}{5}$).



Beispiel 4.23 Charakteristische Grössen einer harmonischen Schwingung
IMSGR1

$$f(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{3} - \frac{4\pi}{15}\right)$$

a) Geben Sie für $f(t)$ den Nullphasenwinkel φ, die Amplitude A und die Periode T an.

b) Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der Funktionen.

c) Wo erscheinen die Charakteristischen Grössen im Graphen?

Beispiel 4.24 Trigonometrische Funktionen zeichnen — 4HG9L9

Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der folgenden Funktionen. Zeichnen Sie für jeden Graph den Nullphasenwinkel φ, Amplitude A und Periode T ein.

a) $f(x) = 2\sin(x)$

b) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $f(x) = \cos(-x) - 2$

f) $f(x) = \sin(x - \pi/2)$

g) $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$

h) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{4}\right)$

i) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$

j) $f(x) = 5\cos\left(\frac{\pi x}{2} - 2\right)$

k) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{5} + 3\right) - 2$

l) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{3} - 1\right)$

Beispiel 4.25 Additonstheoreme Vorbereitung — ECQ2MU

a) Wie hängen $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ und $\sin(\alpha)$ zusammen?

b) Wie hängen $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ und $\cos(\alpha)$ zusammen?

4.5 Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

Satz Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Es ist eine Kurzschreibweise, wenn wir $\pm$ verwenden. Gemeint ist, dass $\pm$ entweder alle oberen Zeichen ausgelsen werden, oder nur die unteren.

Beispiel 4.26 Additonstheoreme Vorbereitung **EBP1NU**

Argumentieren Sie anhand eines Zeigers am Einheitskreis

a) Berechnen Sie für $\alpha = \frac{\pi}{18}$ die Werte

$$\sin(\alpha),\ \cos(\alpha),\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}),\ \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}),\ \sin(-\alpha),\ \cos(-\alpha)$$

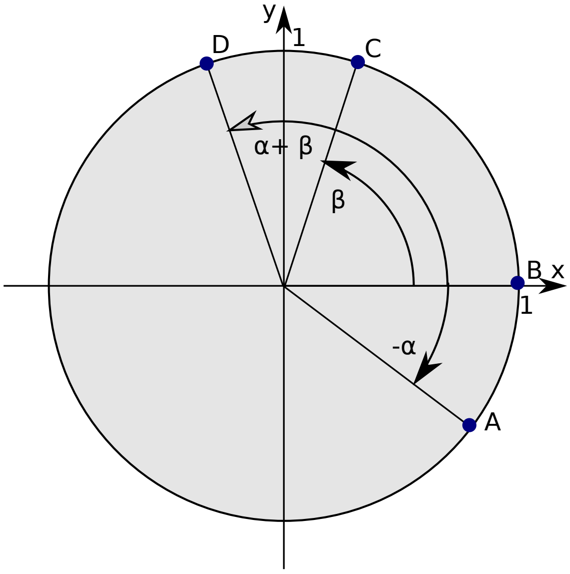
Welche Zusammenhänge erkennen Sie?

b) Wie lässt sich aus $\sin(-\alpha)$ das Vorzeichen aus dem trigonometrischen Ausdruck beseitigen?

c) Wie lässt sich aus $\cos(-\alpha)$ das Vorzeichen aus dem trigonometrischen Ausdruck beseitigen?

d) Vereinfachen Sie $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$

Beispiel 4.27 Herleitung Additionstheorem **IJ65F9**



a) Geben Sie die karthesischen Koordinaten der Punkte $\vec{A}, \ldots, \vec{D}$ an.

b) Verbinden Sie die Punkte in Gedanken miteinander. Zwei der Verbindungen haben die selbe Länge. Welche?

c) Wir benennen die Verbindungen, die die selbe Länge mit $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Berechnen Sie kartesischen Koordinaten dieser Vektoren.

d) Benutzen Sie die Symmetrie der Trigonometrischen Funktionen um negative Winkel in trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

e) Geben Sie nun den folgenden Ausdruck an

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2$$

f) Wir notieren $\big(\sin(x)\big)^2 = \sin^2(x)$. Multiplizieren Sie den Term oben aus.

g) Benutzen Sie $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (3 mal anwenden) um den Ausdruck weiter zu vereinfachen.

h) Lösen Sie nach $\cos(\alpha + \beta)$ auf.

Beispiel 4.28 Ausdruck für $\cos(\alpha - \beta)$ **KNUQTG**

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha)$$

a) Setzen Sie in den Ausdruck den Winkel $\gamma = -\beta$ ein.

b) Benutzen Sie die Symmetrien-Eigenschaften um die negativen Winkel in den einfachen trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

Beispiel 4.29 Additionstheorem $\sin(\alpha+\gamma)$ **8FY7QU**

$$\cos(\alpha+\gamma) = \cos(\gamma)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\gamma)\cdot\sin(\alpha)$$

a) Setzen Sie in den Ausdruck den Winkel $\gamma = \beta + \frac{\pi}{2}$ ein.

b) Benutzen Sie $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ und $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ um die Summen von Winkeln in den einfachen trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

c) Beseitigen Sie Summen von Winkeln in den einfachen trigonometrischen Funktionen.

d) Ersetzen Sie im letzten Ausdruck $\alpha+\beta$ durch $\alpha-\beta$ und beseitigen sie negative Winkel in den einfachen trigonometrischen Ausdrücken.

Beispiel 4.30 Darstellung $\cos^2(\alpha)$ **AT9S8M**

Zeigen Sie, dass gilt

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha)+1\right]$$

Werten Sie dazu

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

für $\beta = \alpha$ aus.

4.6 Arkus-Funktionen

Definition Arkustangens-Funktion

Die Arkustangens-Funktion ordnet den Komponenten x und y den Winkel φ zu.

$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 180° & x < 0 \end{cases}$$

Dabei sind x, $y \in \mathbb{R}$

Wir nennen die Komponenten $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ auch **Kartesische Koordinaten**. Für jeden Vektor können wir daraus Betrag und φ (den Winkel, den $\vec{v}$ mit der x-Achse einschliesst) berechnen. Das Paar v und φ bestimmt einen Vektor eindeutig. Wir nennen dieses Zahlenpaar die **Polar-Koordinaten** des Vektors $\vec{v}$.

Beispiel 4.31 Kartesische- → Polar-Koordinaten **R3601V**

Berechnen Sie die Polarkoordinaten

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7.96956 \\ -0.697246 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Infobox Inverse trigonometrische Funktionen

- Der Zwischenwinkel zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ wird berechnet über
$$\varphi = \arccos(\frac{\vec{v} \odot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|})$$
Dabei erhalten wir korrekterweise einen Winkel $0 \leq \varphi < 180°$ zwischen den Vektoren, und es wird korrekterweise kein Drehsinn berücksichtigt.

Beispiel 4.32 Neigungswinkel **084725**

Berechne den Neigungswinkel für ein Gelände mit 5%, 50%, 100% und 200% Neigung.

4.7 Zerlegung und Überlagerungen von Schwingungen

Kosinus

Satz Zerlegung der Kosinus-Schwingungen

Die Funktion
$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$
kann geschrieben werden als
$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$
mit

- $a = A \cdot \cos(\varphi)$
- $b = -A \cdot \sin(\varphi)$.

Beispiel 4.33 Zerlegung der Cosinus-Schwingungen **NFCHGJ**

Gegeben $f(t) = \sqrt{41} \cdot \cos(1 \cdot t - 0.674741)$ Zerlegen Sie das Signal in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

Beispiel 4.34 Zerlegung der Sinus-Schwingungen **DR61E5**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

a) $f(t) = \sqrt{5} \cdot \cos(4t + 1.10715)$

b) $f(t) = 5 \cdot \cos(5t + \frac{\pi}{2})$

c) $f(t) = \sqrt{74} \cdot \cos(2t + 0.950547)$

Satz Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ Schwingungen zu $\cos$

Für die Überlagerung

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

gilt

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit

- Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder gleichbedeutend, Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Nullphasenwinkel $\varphi = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \begin{cases} \pi & (a < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel 4.35 Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ Schwingungen **IYPB5L**

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t \varphi)$$

an.

$$f(t) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \cos(t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(t)$$

Lösung:

Wir lesen aus $\omega = 1$ ($f = \frac{1}{2\pi}$) und erhalten $A = \sqrt{\frac{75+25}{4}} = 5$ und $\varphi = -\arctan(\frac{5}{5 \cdot \sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$. Also

$$f(t) = \underbrace{5}_{=A} \cdot \cos(\underbrace{1}_{\omega} \cdot t \underbrace{-\frac{\pi}{6}}_{=\varphi})$$

Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude der Superposition.

Beispiel 4.36 Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ Schwingungen **AU8VZS**

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t \varphi)$$

an.

a) $f(t) = 1.76336 \cdot \cos(18t) + 2.42705 \sin(18t)$

b) $f(t) = \cos(10t) + \sqrt{3} \cdot \sin(10t)$

c) $f(t) = 3.36588 \cdot \cos(7t) + 2.16121 \cdot \sin(7t)$

Sinus

Satz Zerlegung der Sinus-Schwingungen

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

kann geschrieben werden als

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

mit

- $a = A \cdot \sin(\varphi)$
- $b = A \cdot \cos(\varphi)$.

Beispiel 4.37 Zerlegung der Sinus-Schwingungen

Gegeben $f(t) = \sqrt{41} \cdot \sin(1 \cdot t - 0.674741)$ Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

Beispiel 4.38 Zerlegung der Sinus-Schwingungen **Z4DX95**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos/\sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)\ .$$

a) $f(t) = \sqrt{5} \cdot \sin(4t + 1.10715)$

b) $f(t) = 5 \cdot \sin(5t + \frac{\pi}{2})$

c) $f(t) = \sqrt{74} \cdot \sin(2t + 0.950547)$

Satz Überlagerung gleichfrequenter $\cos/\sin$ Schwingungen

Für die Überlagerung

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

gilt

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit

- Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder gleichbedeutend, Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Nullphasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \begin{cases} \pi & (b < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel 4.39 Überlagerung gleichfrequenter $\cos/\sin$ Schwingungen

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t\varphi)$$

an.

$$f(t) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \cos(t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(t)$$

Lösung:

Wir lesen aus $\omega = 1$ ($f = \frac{1}{2\pi}$) und erhalten $A = \sqrt{\frac{75+25}{4}} = 5$ und $\varphi = \arctan(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{5}) = \frac{\pi}{3}$. Also

$$f(t) = \underbrace{5}_{A} \cdot \sin(\underbrace{1}_{\omega} \cdot t + \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\varphi})$$

Beispiel 4.40 Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ **Schwingungen** **SXWHB9**

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t\varphi)$$

an.

a) $f(t) = 1.76336 \cdot \cos(18t) + 2.42705 \sin(18t)$

b) $f(t) = \cos(10t) + \sqrt{3} \cdot \sin(10t)$

c) $f(t) = 3.36588 \cdot \cos(7t) + 2.16121 \cdot \sin(7t)$

4.8 Übungen

Beispiel 4.41 Phasenwinkel beim Sinus **QSB28F**

Allgemein gilt

$$A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

a) Für $A = 10$ und $\varphi = 2$ berechne a und b

b) Berechne nun allgemein für A und φ die entsprechenden Amplituden a und b.

Beispiel 4.42 Phasenwinkel beim Cosinus und beim Sinus **R2KFYJ**

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $A\cos(\omega t + \varphi)$

a) $1.36079\cos(t\omega) - 2.67362\sin(t\omega)$

b) $-1.13601\cos(t\omega) - 4.86924\sin(t\omega)$

c) $-9.36457\cos(t\omega) + 3.50783\sin(t\omega)$

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $A\sin(\omega t + \varphi)$

d) $0.850987\sin(t\omega) - 2.87677\cos(t\omega)$

e) $-8.49737\sin(t\omega) - 9.83843\cos(t\omega)$

f) $30.0068\cos(t\omega) - 13.7328\sin(t\omega)$

Beispiel 4.43 Phasenwinkel beim Cosinus und beim Sinus **TEA3WI**

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $a\cos(t\omega) + b\sin(t\omega)$

a) $8.544\cos(\omega t - 1.21203)$

b) $5.83095\cos(\omega t + 5.25281)$

c) $2.82843\cos(\omega t + 5.49779)$

d) $12.0416\cos(\omega t - 0.844154)$

e) $10.6301\sin(\omega t + 5.56436)$

f) $2.82843\sin(\omega t - 0.785398)$

g) $9.21954\sin(\omega t - 0.86217)$

h) $9.43398\sin(\omega t + 5.27099)$

KAPITEL 5

Skalarprodukt

Lernziele Skalarprodukt, Projektion, Spiegelung, Basis

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ Wenn nicht anders deklariert beziehen sich die Lernziele auf eine rechtshändige Orthogonalbasis.

- Die Studierenden können das Skalarprodukt von Vektoren in $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ berechnen.
- Sie wissen, dass das Skarprodukts kommutativ, distributiv und assoziativ ist.
- Sie können Projektion und Lot von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{b}$ berechnen.
- Sie können die Spiegelung von $\vec{a}$ an der Geraden mit Richtungsvektor $\vec{b}$ berechnen.
- Sie kennen die Begriffe ‘Basis’, ‘Komponente in einer Basis’, ‘Orthogonal-Basis’

- Sie können Komponenten eines Vektors in einer Ortogonalbasis berechnen (Basistransformation).

5.1 Berechnung des Skalarprodukt in einer Orthogonalbasis

Definition Skalarprodukt

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel φ einschliessen, ist das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos(\varphi)$$

[**?**, Bd. 1 II 2.3]

Satz Skalarprodukt für Vektoren in Komponenten-Schreibweise einer Orthonormalbasis

Das Skalarprodukt in einer Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^N$ ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_N b_N = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i$$

Wie Abschnitt 5.4 zeigen wird, handelt es sich hier nicht um eine Definition sondern bereits um das Resultat einer Herleitung.

Beispiel 5.1 In einer Orthonormalbasis **6PUK6M**

Berechnen Sie die Skalarprodukte

a) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} \odot \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e} \odot \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{a} \odot \vec{b} = 16$

b) $\vec{c} \odot \vec{d} = -7$

c) $\vec{e} \odot \vec{f} = 0$

Beispiel 5.2 In einer Orthonormalbasis **M6C2WL**

Berechnen Sie die Skalarprodukte

a) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} \odot \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e} \odot \vec{f} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Was können wir anhand dieser Resultate über den Winkel zwischen den Vektoren φ sagen?

Mit dem Satz 5.1 können wir Winkel zwischen Vektoren berechnen. Die Definition des Skalarprodukts aufgelöst nach dem Winkel gibt

$$\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\|a\| \cdot \|b\|} = \cos(\varphi)$$

oder sogar

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\|a\| \cdot \|b\|}\right) .$$

Anderseits wissen wir nun wie wir das Skalarprodukt und die Längen der Vektoren berechnen. Beachte, dass der Ausdruck $\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$ gemäss der Schwarz'schen Ungleichung (Satz 5.4) im Bereich $[-1; 1]$ liegt und dass deshalb der Winkel stets eindeutig definiert ist.

Beispiel 5.3 Berechne das Skalarprodukt und den Zwischenwinkel **600065**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:
$\vec{a} \odot \vec{b} = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$, d.h. $\varphi = 45°$.

Infobox Cos/ArcCos

Bei der Berechnung des Zwischenwinkels mit Hilfe des Skalarprodukts und $\arccos$ entstehen **keine** Probleme. Oder auch:
Wenn wir Zwischenwinkels mit Hilfe des Skalarprodukts und $\arccos$ wird immer ein Winkel $\varphi < 180°$ zwischen den Vektoren berechnet.

Beispiel 5.4 Berechne das Skalarprodukt und den Zwischenwinkel **599954**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Beispiel 5.5 Skalarprodukt, Orthogonalität **891584**

Bestimme die Vektoren in der Liste, die zu $\vec{v}$ *orthogonal* sind.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix}263\\-35\\-44\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-121\\15\\-48\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}71\\5\\-48\end{pmatrix}$$

Beispiel 5.6 Winkel zwischen Vektoren **520784**

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1351 \\ 362 \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.1.1 Norm

5.1.2 Normierung

Definition Normierter Vektor

Der Vektor $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ hat die Länge 1 und heisst deshalb **normiert**.
Achtung: Den Vektor mit $\|\vec{a}\| = 0$ kann man nicht normieren.

Beispiel 5.7 Normierung **503757**

Normiere den Vektor. Zeige dann, dass der normierte Vektor die Länge 1 hat.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$\vec{a}' = \vec{a}\frac{1}{\|\vec{a}\|} = \begin{pmatrix} -9 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{41}$
Das ist die Schreibweise mit der man im Kopf am schnellsten rechnen kann. Wir könnten auch schreiben (das wird aber später umständlicher zum Rechnen):

$$\vec{a}' = \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ 40 \end{pmatrix}}{41} \text{ oder } \vec{a}' = \begin{pmatrix} -9/41 \\ 40/41 \end{pmatrix}$$

Die Länge ist 1:

$$\|\vec{a}'\| = \left\| \frac{1}{41}\,\vec{a} \right\| = \left| \frac{1}{41} \right| \cdot \|\vec{a}\| = \frac{1}{41} \cdot 41 = 1$$

Dabei wurde verwendet, dass $\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot |\, \|\vec{a}\|$ gilt.

Beispiel 5.8 Normierung **492646**

Normiere die Vektoren. Zeige dann, dass der normierte Vektor die Länge 1 hat.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -20 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

~~Die Norm oben heisst in der Fachsprache ‘karthesische Norm’. Es gibt aber an-~~dere Möglichkeiten eine Norm festzulegen — siehe Beispiel 5.10.
Aus der Definition folgt ausserdem

$$\vec{a} \odot \vec{a} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{a}\| \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \|\vec{a}\|^2$$

oder also

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \odot \vec{a}}$$

Alle Normen erfüllt folgende Eigenschaften.

Definition Definition und Eigenschaften der Norm

Die Norm ist für alle Elemente der Grundmenge definiert und es gilt:

- $\left\|\vec{0}\right\| = 0$
- $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Beispiel 5.9 Eigenschaften der Norm **CESMGH**

Wir wollen die Norm des Vektors $\vec{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen. Welches ist ein korrekter Ausdruck für $\|\vec{a}\|$? Mehrere Antworten möglich.

a) $\|\vec{a}\| = \frac{1}{5}$

b) $\|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}$

d) $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$

e) $\|\vec{a}\| = \frac{1}{5} \cdot \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$

f) $\|\vec{a}\| = 5$

Beispiel 5.10 Eine Norm? **SR00VS**

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Funktionen um Normen handelt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Hinweise:
Allgemeine Gesetze für den Betrag der Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\max\{|\lambda \cdot x_1|, |\lambda \cdot x_2|\} = |\lambda| \cdot \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

A) $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$

B) $\|\vec{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

C) $\|\vec{x}\| = x_1$

D) $\|\vec{x}\| = |x_1|$

E) $\|\vec{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$

F) $\|\vec{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 - (x_2)^2}$

G) $\|\vec{x}\| = \min\{|x_1|, |x_2|\}$

Beispiel 5.11 Richtung und Länge **TVJ58M**

Geben sie die kartesischen Koordinten des folgenden Vektors an:
$\vec{a}$ hat Länge 7 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \cdot 7 = \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Beispiel 5.12 Richtung und Länge SWI49N

Geben sie die kartesischen Koordinten der folgenden Vektoren an:

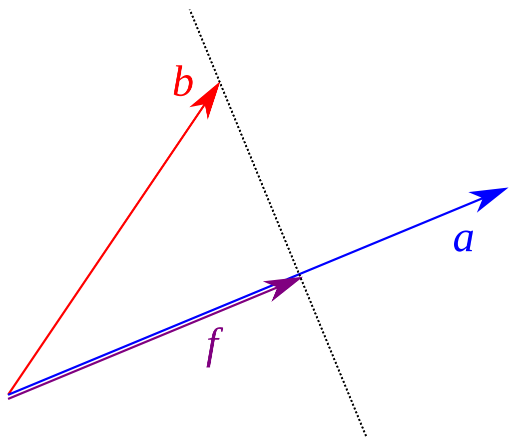
a) $\vec{a}$ hat Länge 10 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 8 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b}$ hat Länge 5 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} -33 \\ 56 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c}$ hat Länge λ und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 9 \\ 40 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d}$ hat Länge ν und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

5.2 Orthogonale Projektion und Lot



Satz Projektion und Lot

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren. Der Vektor $\vec{b}$ lässt sich eindeutig als $\vec{b} = \vec{f} + \vec{h}$ schreiben, wobei $\vec{f}$ parallel zu $\vec{a}$ steht und $\vec{h}$ senkrecht zu $\vec{a}$. Dabei sind $\vec{f}$ und $\vec{h}$ eindeutig festgelegt über:

$$\vec{f} = \left(\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{und} \quad \vec{h} = \vec{b} - \vec{f}$$

Definition Projektion und Lot

$\vec{f}$ heisst die **Projektion** von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{h}$ heisst das **Lot** von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

[**?**, 3.1, p.398]
Die “Logik dahinter” ist, dass wir mit dem Ausdruck $\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ berechnen. Merke, dass die Länge des Schattens nur dann richtig berechnet wird, wenn das Skalarprodukt mit einem Vektor der Länge 1 berechnet wird — hier mit $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ — projiziert wird. Danach wird die Länge des Schattens mit einem Vektor der Länge 1 — auch das ist $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ — multipliziert. Deshalb hat $\vec{f}$ genau die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und liegt auf der Geraden durch $\vec{0}$ und die Spitze von $\vec{a}$. Übrigens projiziert man schneller, wenn man oben Faktoren etwas umordnet:

$$\vec{f} = \frac{\vec{b} \odot \vec{a}}{\vec{a} \odot \vec{a}} \cdot \vec{a} \,.$$

und das Vorzeichen bei der Bestimmung von $\vec{h}$ kann sich durch den Ausdruck $\vec{f} + \vec{h} = \vec{b}$ merken.

Beispiel 5.13 Zerlege $\vec{b}$ in Projektion und Lot bezüglich $\vec{a}$ **251965**

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.14 Schatten, spitzer/stumpfer Zwischenwinkel QHZIHW

Berechnen Sie die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und geben Sie an, ob der Zwischenwinkel $0° < \varphi \leq 90°$ oder $90° < \varphi \leq 180°$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6.84 \\ 5.12 \end{pmatrix}$

Beispiel 5.15 Schatten als Vektor JBARLL

Geben Sie den Schatten von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ als Vektor an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6.84 \\ 5.12 \end{pmatrix}$

Beispiel 5.16 Geometrie am Dreieck 713581

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Berechne für das Dreieck ABC die Koordinaten des Fusspunktes $\vec{F}_C$ und den Höhenvektor h_C. Siehe auch Skizze Abbildung 5.3.

5.3 Spiegelung und Projektionen

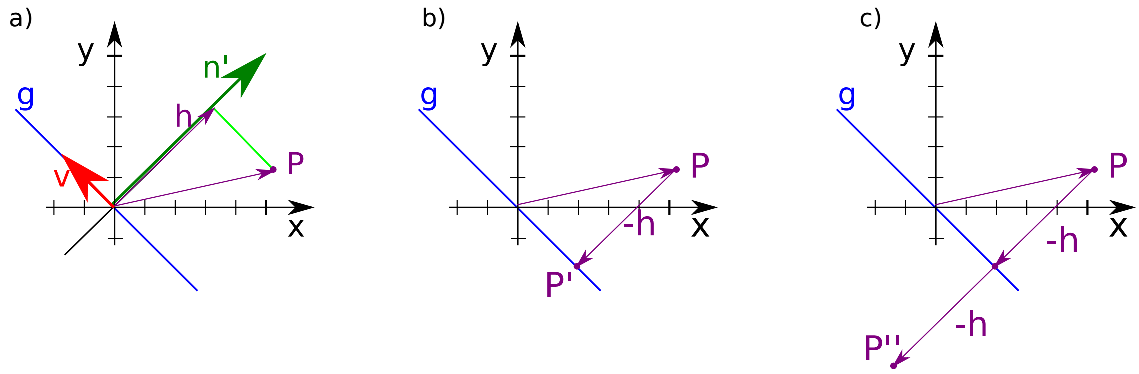


Abbildung 5.1: a) Der Ortsvektor wird auf den Normalvenvektor projeziert b) Projektion: $\vec{P} - \vec{h}$ fällt auf die Gerade c) Spiegelung: $\vec{P} - 2\vec{h}$.

Beachte, dass eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerschneidet. Die Projektion $(\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ zeigt stets in die selbe Halbebene wie $\vec{P}$, egal ob $\vec{n}'$ in der selben Halbebene liegt wie $\vec{P}$. Deshalb bringt $\vec{P} - \vec{h}$ den Punkt zurück auf die Gerade (Fig. 5.1), d.h. wir brauchen uns mit dem Vorzeichen in Gleichung 5.1 nicht zu beschäftigen.

Satz Projektion und Spiegelung an einer Geraden durch $\vec{0}$

Wir projezieren $\vec{P}$ auf den Normalenvektor:

$$\vec{h} = \vec{P} \odot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{P} \odot \vec{n}}{\vec{n} \odot \vec{n}} \cdot \vec{n}$$

Dabei ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Geraden $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
Wir können den Punkt $\vec{P} \in \mathbb{R}^2$ auf g projezieren durch

$$\vec{P'} = \vec{P} - \vec{h} \tag{5.1}$$

oder an g spiegeln durch

$$\vec{P''} = \vec{P} - 2\vec{h}\ .$$

Beispiel 5.17 Spiegelungen und Projektionen in $\mathbb{R}^2$ **5A1XEX**

Spiegeln Sie den Punk $\vec{P}$ an der Geraden g mit dem Richtungsvektor mit $\vec{v}$. Projizieren Sie anschliessend $\vec{P}$ auf g. Die Gerade g verläuft durch den Ursprung.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -21.2 \\ 13.4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir bestimmen zuerst den Normalenvektor

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und projizieren $\vec{P}$ darauf

$$\vec{h} = \frac{\vec{P} \odot \vec{n}'}{\vec{n}' \odot \vec{n}'} \cdot \vec{n}' = \frac{-10}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Spiegelung:

$$\vec{P''} = \vec{P} - 2\vec{h} = \begin{pmatrix} -18.8 \\ 16.6 \end{pmatrix}$$

Projektion:

$$\vec{P'} = \vec{P} - \vec{h} = \begin{pmatrix} -20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.18 Spiegelungen und Projektionen an einer Geraden **IES6DX**

Spiegeln Sie den Punk $\vec{P}$ an der Geraden g mit dem Richtungsvektor mit $\vec{v}$. Projezieren Sie anschliessend $\vec{P}$ auf g. Alle Geraden g verlaufen durch den Ursprung.

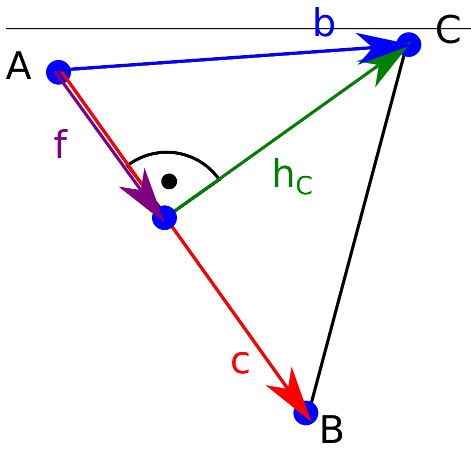


Abbildung 5.2: Zur Aufgabe 5.19

a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 8.4 \\ 6.2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 26.85 \\ -59.23 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$

c) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 16.88 \\ 47.16 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$

d) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 120.56 \\ -33.08 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 24 \\ -7. \end{pmatrix}$

Beispiel 5.19 Geometrie am Dreieck **713581**

Berechne für das Dreieck ABC die Koordinaten des Fusspunktes $\vec{F}_C$ und die Höhe h_C.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Siehe auch Skizze Abbildung 5.3.

Beispiel 5.20 Lot 381963

Fällen Sie das Lot vom Punkt $\vec{C}$ auf die Gerade g und berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ zur Geraden g:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beispiel 5.21 Abstand, effizientes Vorgehen 797792

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ von der Geraden g:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beispiel 5.22 Spiegelung an Geraden durch Ursprung **659289**

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g : \vec{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.23 Spiegelung **109810**

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.4 Wieso funktioniert das?

Gesetze für das Skalarprodukt

Satz Gesetze für das Skalarprodukt

1. $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$
2. $(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r(\vec{b} \odot \vec{a})$
3. $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a}$
4. $\left|\vec{a} \odot \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$

[**?**, Bd. 1 II 3.3] [**?**, 3.1,p.394]

Für die erste Gleichung wurde verwendet, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\varphi) = |b| \cdot |a| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a}$$

Bisher haben wir ausschliesslich die abstrakte Schreibweise für Vektoren benutzt. Im Folgenden werden wir herleiten, wie man das Skalarprodukt für Vektoren in Komponenten-Schreibweise berechnet.

Beispiel 5.24 Gesetze Skalarprodukt **D9YQP1**

$$\vec{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen das Skalarprodukt für die obigen Vektoren berechnen. Welche Ausdrücke sind korrekt? Mehrere Antworten möglich.

a) $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{1}{5}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$

b) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = 2$

d) $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{2}{5}$

e) $\vec{a} \odot \vec{b} = \left|\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \cos(45°)$

f) $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$

Beispiel 5.25 Rechenregeln Skalarprodukt **248034**

Es seien die Skalarprodukte

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{a} \odot \vec{c} = \vec{b} \odot \vec{c} = \frac{1}{2} \text{ und } \|\vec{a}\| = \left\|\vec{b}\right\| = \|\vec{c}\| = 1 \ .$$

Berechne

a) $\vec{b} \odot \vec{a}$

b) $\vec{a} \odot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

c) $\vec{b} \odot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

d) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \odot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

Beispiel 5.26 Herleitung der Parallelprojektion **C1N49E**

Leiten Sie den Ausdruck

$$\vec{f} = \underbrace{\frac{\vec{b} \odot \vec{a}}{\|\vec{a}\|}}_{\text{skalare Komponente}} \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \ .$$

für die Parallelprojektion her. Gehen Sie wie folg vor

a) $\vec{f}$ ist parallel zu $\vec{a}$ für $k \in \mathbb{R}$ und lassen vorerst $k \in \mathbb{R}$ offen. Wir schreiben also $\vec{f} = k \cdot \vec{a}$. Berechnen Sie
$$(\vec{b} - \vec{f}) \odot \vec{a}$$

b) Kombinieren Sie die beiden Ausdrücke und lösen sie nach k auf.

c) Benutzen Sie die Resultate aus a) und b) und schreiben Sie $\vec{f}$ aus.

d) Benutzen Sie
$$\vec{a} \odot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\|$$

und geben Sie die skalare Komponente von $\vec{b}$ bezüglich $\vec{a}$ an.

5.4.1 Basis, Komponenten

Definition Basis

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ heissen Basis des Vektorraums V, falls

- sie linear unabhängig sind
- und jeder Vektor in V als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ geschrieben werden kann.

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ heissen **Basisvektoren**.

[**?**, 3.12,p.433]

Definition Dimension

Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums V heisst **Dimension** von V

Definition Koordinate (Komponente)

Seien die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis eines Vektorraums und

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ \ldots \ + v_n\vec{e}_n \ ,$$

dann nennen wir $(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)$ die **Koordinaten** von $\vec{v}$ (oder auch die **Komponenten** von $\vec{v}$).

Wir werden später zeigen, dass sich jeder Vektor in Komponenten zerlegen lässt, auch bezüglich einer Basis, die weder aus senkrechten noch normierten Basisvektoren besteht.

Beispiel 5.27 Vektor vs. Komponente 785039

Schreiben Sie die Vektoren mit den Komponenten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der Basis 1, t, t^2 oder in der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t$, $\vec{e}_3 = t^2$

b) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t^2 - 1$, $\vec{e}_3 = t^2 - t$

d) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = \cos(t)$, $\vec{e}_3 = \sin(t)$

Beispiel 5.28 Vektorkomponenten **128857**

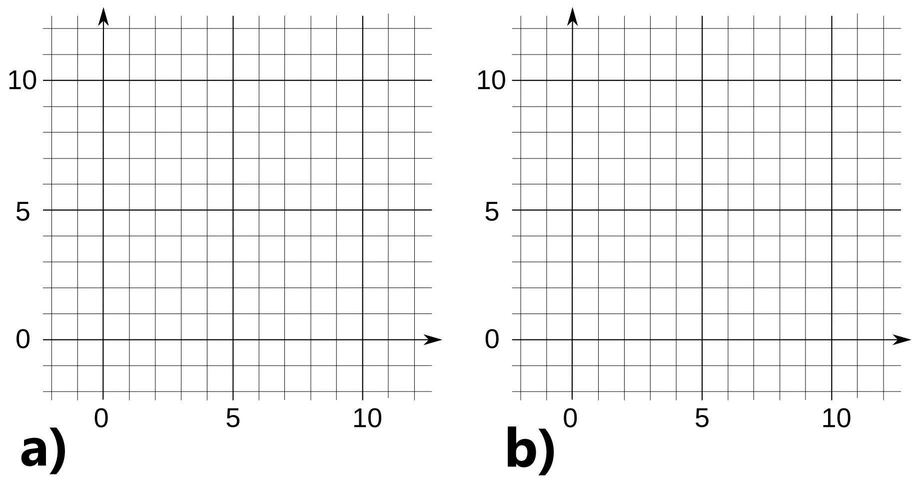
Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{U}$, $\vec{V}$ und $\vec{W}$. Die Basis-Vektoren sind

a) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Komponenten der Vektoren sind in jeder Basis

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Definition Orthogonal-Basis

Eine Basis $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_n$ heisst **orthogonal**, wenn die Basisvektoren rechtwinklig zu einander stehen.

Definition Normierte Basis

Eine Basis heisst **normiert**, wenn die Basisvektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_n$ die Länge 1 haben.

Definition Orthonormalbasis

Ist die Basis sowohl orthogonal wie auch normiert, heisst sie **Orthonormalbasis**.

5.4.2 Was ist eine Basis?

Infobox Basis von $\mathbb{R}^3$

Jeder Satz von 3 Vektoren (die nicht in einer Ebene liegen) ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

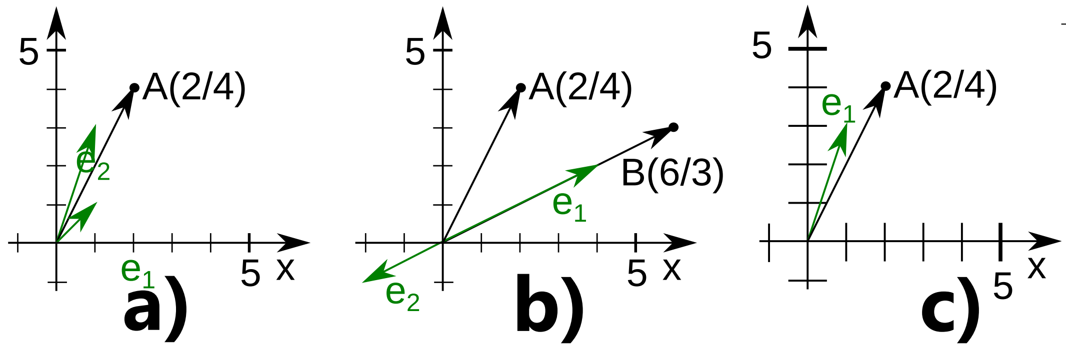


Abbildung 5.3: Die Darstellung eines Punktes in der Ebene als Summe von (zwei) Vektoren.

Wir haben gesehen, dass sich jeder Punkt in der Ebene schreiben lässt als die Summe von zwei Vektoren. Wir wollen kurz analysieren, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dies möglich ist. Wählen wir $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wie in Abb. 5.3 a), ist die Zerlegung immer möglich. Im Beispiel ist $\vec{A} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Wählen wir $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wie in Abb. 5.3 b), ist die Zerlegung des Vektors $\vec{B}$ möglich — es gibt sogar mehrere Möglichkeiten für die Zerlegung. Der Vektor $\vec{A}$ hingegen kann nicht dargestellt werden! $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ liegen auf einer Geraden — sie sind kollinear — und mit einer Addition dieser Vektoren ist es nicht möglich, von dieser Geraden wegzukommen. In Abb. 5.3 c) hingegen ist nur der Vektor $\vec{e}_2$ gegeben. Er reicht nicht um die Ebene abzudecken und um den Vektor $\vec{A}$ als Linearkombination darzustellen.

Mit den Fachbegriffen ausgedrückt bedeutet dies: Für alle Situationen in Abb. 5.3 gilt, dass wir uns in der Ebene $\mathbb{R}^2$ bewegen. Sie hat zwei Dimensionen, also brauchen wir mindestens zwei Basisvektoren. Deshalb ist der Vektor in Abb. 5.3 c) keine Basis. In Abb. 5.3 b) sind die Basisvektoren linear abhängig. Deshalb bilden sie keine Basis. Nur in Abb. 5.3 a) handelt es sich um eine Basis: Wir haben zwei Basisvektoren die linear unabhängig sind.

Beispiel 5.29 Basis von $\mathbb{R}^3$ **279728**

Welches ist eine Orthogonal-Basis, welches eine Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$?

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Beispiel 5.30 Basis von $\mathbb{R}^3$ **133855**

Welches ist eine Orthogonal-Basis, welches eine Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$?

a) $\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

5.5 Geometrische Deutung der Gesetze für das Skalarprodukt

Wir wollen hier darüber nachdenken, ob die Gesetzte 5.4 für das Skalarprodukt geometrisch nachvollziehbar sind. Dieser Abschnitt und die drei folgenden sind ein schönes Beispiel für die axiomatische Arbeitsweise der modernen Mathematik. Am Anfang steht eine gescheite Definition 5.1 . Daraus werden nacheinander Eigenschaften abgeleitet. Zuerst stellen wir fest, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$$

denn

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a} \; .$$

Danach finden wir

$$(\lambda \, \vec{a}) \odot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b})$$

Um dies zu zeigen müssen wir den folgenden Ausdruck anschauen:

$$(\lambda \, \vec{a}) \odot \vec{b} = |\lambda \, \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \; .$$

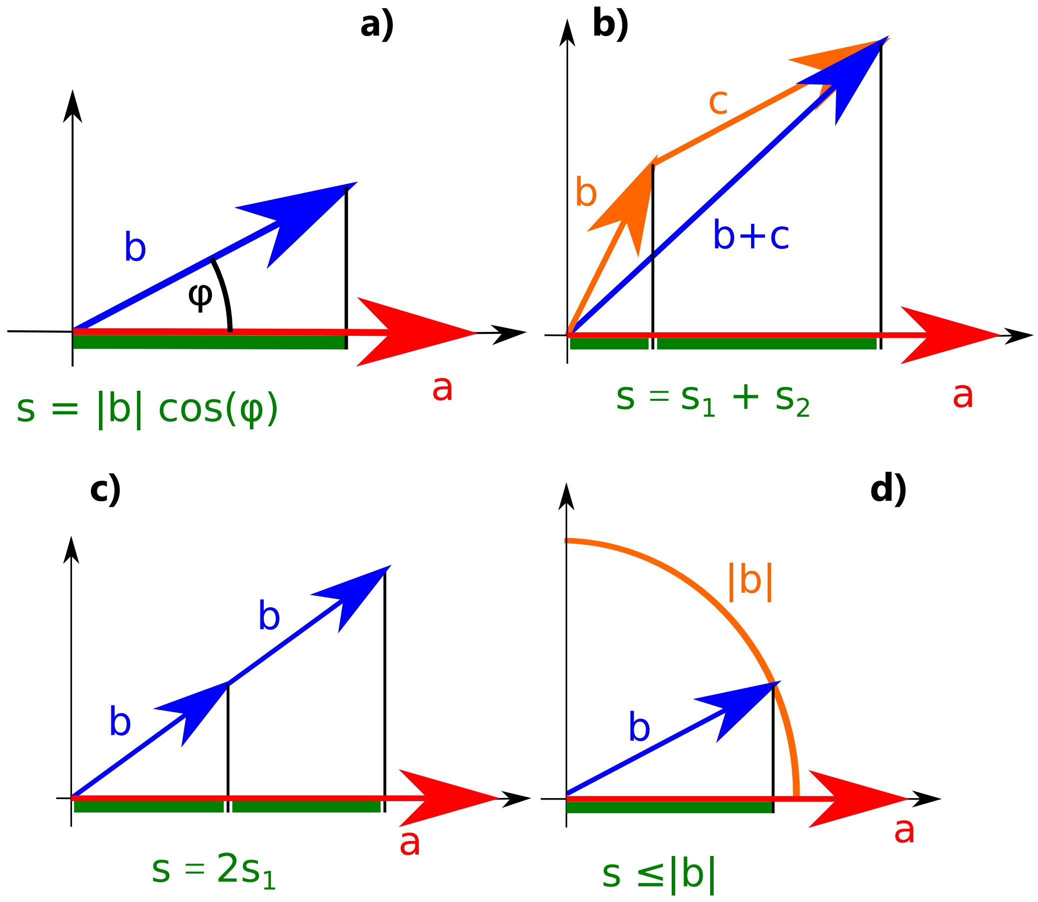


Abbildung 5.4: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Skalarprodukt folgen direkt aus geometrischen Betrachtungen.

~~Ist $\lambda > 0$ dann wird der Zwischenwinkel bei der Multiplikation mit $\vec{a}$ nicht verändert,~~ also gilt

$$|\lambda\,\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b}) \; .$$

Ist $\lambda < 0$ dann wird durch die Multiplikation der Zwischenwinkel verändert: $\varphi \to \varphi'$, aber es gilt $\cos(\varphi') = -\cos(\varphi)$. Also

$$|\lambda\,\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot [-\cos(\varphi)] = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b}) \; .$$

Wir finden also, dass das Skalarprodukt alle (für positive und negative) Faktoren λ assoziativ ist. Der Spezialfall $|a| = 1$ ist nun besonders anschaulich:

5.6 Spezialfall $|a| = 1$

Gemäss der Definition 5.1 ist hier $\vec{a} \odot \vec{b} = |b| \cdot \cos(\varphi)$. Aus der Skizze in Abb. 5.4 a) ist aber ersichtlich, dass $|b| \cdot \cos(\varphi)$ genau die Länge des Schattens (grün) von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ ist. Das merken wir uns. Wir wollen nun $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a}$ berechnen, d.h. den Schatten von $(\vec{b} + \vec{c})$ auf $\vec{a}$. Gemäss Abb. 5.4 b) ist dieser Schatten gleich der Summe der Schatten von $\vec{b}$ und von $\vec{c}$. Also gilt

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a} \; . \tag{5.2}$$

Jetzt interessieren wir uns für den Schatten von $r \cdot \vec{b}$ auf $\vec{a}$, d.h. der Schatten des Vektors $\vec{b}$, der um den Faktor r gedehnt wurde. Gemäss Abb. 5.4 c) muss dieser Schatten um den selben Faktor gedehnt sein:

$$(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r \cdot (\vec{b} \odot \vec{a}) \; . \tag{5.3}$$

Wie Abb. 5.4 c) zeigt, müssen wir auch zulassen, dass ein Schatten eine "negative Länge" hat, sollte λ mal negativ ausfallen. Schliesslich stellen wir noch fest, dass der Schatten (bei einem rechtwinkligen Lichteinfall) nie länger als das reale Objekt sein kann

$$\left|\vec{b} \odot \vec{a}\right| \leq \left|\vec{b}\right| \; . \tag{5.4}$$

5.7 Allgemeiner Fall

Wir wollen nun die Gleichungen 5.2 bis 5.4 benutzen um Gesetze für den allgemeinen Fall $\|a\| \neq 1$ zu finden. Zuerst stellen wir fest, dass aus der Definition des Skalarprodukts folgt

$$\vec{v} \odot \vec{v} = \|v\| \cdot \|v\| \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=1} = \|v\|^2$$

Dann stellen wir fest, dass jeder Vektor[1] $\vec{v}$ auf die Länge 1 gebracht werden kann, indem wir ihn durch seine Länge dividieren:

$$\vec{v}' = \frac{1}{\|v\|}\vec{v} \; .$$

Nun ist Eqn. 5.2 nur gültig, wenn $\vec{a}$ die Länge 1 hat. Deshalb müssen wir darin $\vec{a}$ jeweils mit $\frac{\vec{a}}{\|a\|}$ ersetzen:

[1] Um genau zu sein, jeder Vektor mit Ausnahme von $\vec{0}$

$$(\vec{b}+\vec{c})\odot\frac{\vec{a}}{\|a\|}=\vec{b}\odot\frac{\vec{a}}{\|a\|}+\vec{c}\odot\frac{\vec{a}}{\|a\|}\ . \tag{5.5}$$

Diese Gleichung kann auf beiden Seiten mit $|a|$ multipliziert werden. Wir benutzen die Assoziativität aus Satz 5.4 und die Distributivität der Addition und erhalten

$$(\vec{b}+\vec{c})\odot\vec{a}=\vec{b}\odot\vec{a}+\vec{c}\odot\vec{a}$$

Damit haben wir alle Gesetze aus Satz 5.4 nacheinander bewiesen. Bei jedem Schritt haben wir nur Eigenschaften verwendet, die aus den vorherigen Schritten schon bekannt waren.

5.8 Komponenten-Schreibweise in Orthonormalbasis

Wenn wir $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Komponenten-Schreibweise als

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\ \text{und}\ \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\ ,$$

angeben, wie berechnen wir dann das Skalarprodukt $\vec{a}\odot\vec{b}$? Die meisten werden wohl antworten

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\,b_1+a_2\,b_2\ ,$$

was zwar richtig ist, solange man mit einer Orthonormalbasis arbeitet. Für jede andere Basis ist diese Antwort aber *falsch*. Z.B. nehmen wir die Basis

$$\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_E,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_E\right\}\ .$$

Mit dem Index E drücken wir aus, dass die Vektoren in der Standardbasis $\mathbf{E}=\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ gegeben sind. Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Die Basisvektoren geschrieben in dieser Basis sind

$$\vec{f}_1=1\cdot\vec{f}_1+0\cdot\vec{f}_2+0\cdot\vec{f}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F,\ \vec{f}_2=1\cdot\vec{f}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_F,\ \vec{f}_3=1\cdot\vec{f}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_F$$

Wenn wir hier naiv die Komponentenschreibweise für das Skalarprodukt benutzen, dann erhielten wir

$$\vec{f}_1\odot\vec{f}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F\odot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_F=1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0=0$$

Das würde ja bedeuten, dass $\vec{f}_1$ senkrecht auf $\vec{f}_2$ steht, aber das ist eben falsch. Die Basisvektoren stehen gerade nicht senkrecht aufeinander.
Wir werden deshalb hier die Berechnung des Skalarprodukts für Vektoren in Komponenten-schreibweise einer Orthonormalbasis herleiten. Für andere Basen kann das Skalarprodukt auf gleiche Weise hergeleitet werden.

Beispiel 5.31 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ für die Basisvektoren **195709**

Berechnen Sie das Skalarprodukt der Basisvektoren der Orthonormalbasis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$. Betrachten Sie dazu den Schatten von $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_2$, von $\vec{e}_2$ auf $\vec{e}_1$, von $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_1$, von $\vec{e}_2$ auf $\vec{e}_2$.

Beispiel 5.32 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ für beliebige Vektoren **536234**

Berechne das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Schreibe dafür die Vektoren als Summe der Basisvektoren der Orthonormalbasis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ und wende dann die Gesetze für das Skalarprodukt (Satz 5.4) an.

5.9 Skalarprodukt in nicht orthogonaler Basis*

Wir betrachten das Beispiel der Basis

$$\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E\}$$

Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Um das Skalarprodukt von zwei allgemeinen Vektoren in dieser Basis zu berechnen, berechnen wir zuerst das

~~Skalarprodukt zwischen den Basisvektoren. Dafür verwenden wir die Schreibweise~~ der Basisvektoren in der Orthonormalbasis

$$\vec{f}_1 \odot \vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E \odot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E = 1 \qquad \vec{f}_1 \odot \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E \odot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_E = \frac{1}{2}$$

$$\vec{f}_1 \odot \vec{f}_3 = \frac{1}{2} \qquad \vec{f}_2 \odot \vec{f}_2 = 1$$

$$\vec{f}_2 \odot \vec{f}_3 = \frac{1}{2} \qquad \vec{f}_3 \odot \vec{f}_3 = 1$$

Nun berechnen wir das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}_F$ und $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}_F$ in dieser Basis und wenden dann die Gesetze für das Skalarprodukt (Satz 5.4) an:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}_F &= \left(a_1\vec{f}_1 + a_2\vec{f}_2 + a_3\vec{f}_3\right) \odot \left(b_1\vec{f}_1 + b_2\vec{f}_2 + b_3\vec{f}_3\right)\\
&= (a_1\vec{f}_1) \odot (b_1\vec{f}_1) + (a_1\vec{f}_1) \odot (b_2\vec{f}_2) + (a_1\vec{f}_1) \odot (b_3\vec{f}_3)\\
&\quad +(a_2\vec{f}_2) \odot (b_1\vec{f}_1) + (a_2\vec{f}_2) \odot (b_2\vec{f}_2) + (a_2\vec{f}_2) \odot (b_3\vec{f}_3)\\
&\quad +(a_3\vec{f}_3) \odot (b_1\vec{f}_1) + (a_3\vec{f}_3) \odot (b_2\vec{f}_2) + (a_3\vec{f}_3) \odot (b_3\vec{f}_3)\\
&= a_1b_1 + \frac{1}{2}a_1b_2 + \frac{1}{2}a_1b_3 + \frac{1}{2}a_2b_1 + a_2b_2 + \frac{1}{2}a_2b_3 + \frac{1}{2}a_3b_1 + \frac{1}{2}a_3b_2 + a_3b_3\\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1
\end{aligned}$$

Als Kontrolle berechnen wir das Skalarprodukt zwischen den orthogonal Vektoren $\vec{a} = \vec{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F$ und dem Vektor $\vec{b} = \vec{f}_2 + \vec{f}_3 - \vec{f}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}_F$.

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}_F = 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0$$

Tatsächlich ergibt die Rechnung, dass die Vektoren orthogonal aufeinander stehen.

5.10 Basiswechsel zwischen Orthogonalbasen

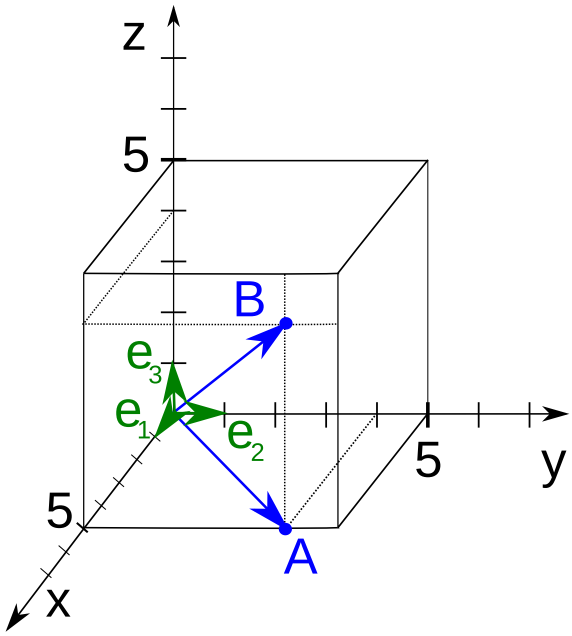
Wir schreiben die Komponenten meist in eine vertikale Liste

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$$

Beachte, dass diese Liste noch kein geometrischer Vektor ist! Um den Vektor $\vec{v}$ zu erhalten müssen die Komponenten mit den Basisvektoren multipliziert und dann addiert werden.

5.10.1 Komponenten in einer Basis

Beispiel 5.33 Drücke $\vec{A}$ und $\vec{B}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_3$ aus
158844



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition Standard-Basis

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ heissen **Standard-Basis** (auch kartesische Basis, kartesisanisches Koordinatensystem)

Was wir also bis jetzt indutitiv[2] gemacht haben, ist die Zerlegung von Vektoren in Komponenten entlang der Standardbasis. Diese Komponenten werden dann in

[2] d.h. ohne viel nachzudenken

Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ untereinander notiert.

Beispiel 5.34 Basis-Wechsel (orthonormal) **585056**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ in der Basis $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\} = \{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}\}$$

Satz Komponenten in einer Orthonormal-Basis

Bei der Basis-Transformation von der Standard-Basis in die Orthonormal-Basis $\mathbf{F} = \left\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots\right\}$ sind die Komponenten gegeben durch:

$$B_{j,F} = \vec{B} \odot \vec{f_j}$$

Beispiel 5.35 Basis-Wechsel (orthogonal) **304231**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ in der Basis $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\} = \{\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\begin{pmatrix} -60 \\ -80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}\}$$

Satz Komponenten in einer Orthogonal-Basis

Bei der Basis-Transformation von der Standard-Basis in die Orthogonal-Basis $\mathbf{F} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots\right\}$ sind die Komponenten gegeben durch:

$$B_{j,F} = \frac{\vec{B} \odot \vec{f}_j}{|\vec{f}_j|^2}$$

Beispiel 5.36 Basis-Wechsel (orthonormal) **101909**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ in der Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\} = \{\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\10\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix}\}$$

Beispiel 5.37 Basis-Wechsel (orthogonal) **723703**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ in der Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\} = \{ \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix} \}$$

Der Basis-Wechsel für nicht orthogonale Basen ist rechnerisch aufwendig. Wir werden dies später betrachten.

KAPITEL 6

Vektorprodukt

Lernziele Vektorprodukt

Wenn nicht anders deklariert beziehen sich die Lernziele auf eine rechtshändige Orthogonalbasis.

- Die Studierenden können das Vektorprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^3$ berechnen.
- Sie wissen, dass das Vektorprodukt antikommutativ, distrubutiv und assoziativ ist.
- Sie können das Spatprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^3$ berechnen.
- Sie können das Vektorprodukt benutzen um Abstände von Punkten zu einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ zu berechnen.

Beispiel 6.1 Leseauftrag Vektorprodukt **57DXTK**

Lesen Sie im Buch “Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1” von Papula den Abschnitt 3.4. zum Vektorprodukt, d.h. die Seiten 90-96). Beantworten Sie dann folgende Fragen.

a) Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt?

b) Wie berechnet man das Vektorprodukt in einer rechtshändigen Orthonormalbasis?

Die Online-Resource zum Buch finden Sie hier
Google: E-Medien FHNW
wähle: E-Books
wähle: Springer
wähle: Technik-Informatik
suche: Papula

wähle: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1

6.1 Berechnung Vektorprodukt

Definition Vektorprodukt

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$, die den Winkel φ einschliessen, ist das **Vektorprodukt** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, mit den Eigenschaften:

- $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin(\varphi)$
- $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

[**?**, Bd. 1 II 3.4], [**?**, p.401]

Wir merken uns auch: Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Infobox Praktische Berechnung des Vektorprodukts

Das Vektorprodukt von zwei Vektoren kann wie folgt berechnet werden:

- Wir schreiben die Produktvektoren auf
- Wir erstellen ein Skelett aus Minuszeichen (–) und zusätzlich einem Ausdruck $-()$ in der zweiten Zeile
- Wir füllen jede Zeile im Skelett, indem wir die selbe Zeile in den Produktvektoren abdecken und das Kreuz der verbleibenden Einträge ins Skelett einfüllen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} - \\ -(\,-\,) \\ - \end{pmatrix}}_{\text{Skelett}} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.2 Vektorprodukt **306988**

Berechne das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

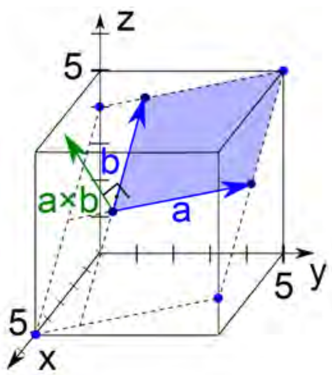
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.3 Berechne die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **519844**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Lösung:
Wir berechnen zuerst das Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ -25 \\ 8 \end{pmatrix} =: \vec{c}$$

Danach benutzen wir, dass der Betrag des Vektorprodukts gleich der Fläche des aufgespannten Parallelogramms ist:

$$\|\vec{c}\| = 33$$

Infobox "Vektorprodukt" für $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}^2$ lässt sich ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ steht schnell finden:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \ .$$

Beispiel 6.4 Vektorprodukt in Orthonormalbasis **BT8J1D**

Berechnen Sie die Vektorprodukte

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{g} \times \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\vec{k} \times \vec{l} = (1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_3) \times (2 \cdot \vec{e}_3)$

f) $\vec{p} \times \vec{q} = (8 \cdot \vec{e}_1 + 9 \cdot \vec{e}_2 + 4 \cdot \vec{e}_3) \times (2 \cdot \vec{e}_2)$

Beispiel 6.5 Fläche und Vektorprodukt **68EML3**

Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = 19\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$.

e) $\vec{a} = 10\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 + 19\vec{e}_3,\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Beispiel 6.6 Fläche Dreieck **62FVCH**

Berechne die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $\vec{A}, \vec{B}$ und $\vec{C}$.

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 25 \\ 12 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 36 \end{pmatrix}$

d) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Satz Gesetze für das Vektorprodukt

i) Betrag des Vektorprodukts: Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

iii) $\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

iv) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

v) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$

6.2 Herleitungen

Auch hier gehen wir axiomatisch vor, genau so wie wir es bereits beim Skalarprodukt getan haben. Welche allgmeinen Gesetzte gelten für das Vektorprodukt? Gilt das Assoziativ-Gesetz, gilt das Kommutativgesetz? Wir definieren dafür zuerst, welche Eigenschaften wir für das Vektorprodukt wünschen. Erst später kümmern wir uns darum, wie man das Vektorprodukt in einer gegebenen Basis berechnet.

Wie Abb.6.1 a) zeigt, ist der Betrag des Vektorprodukts gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Mit $|b|\sin(\varphi)$ wird die Komponente (rot) von $\vec{b}$ berechnet, die senkrecht auf $\vec{a}$ steht. Wie Abb.6.1 b) zeigt, kann die Fläche des grossen blauen Parallelogramms auf zwei Arten berechnet werden: entweder direkt als $|\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})|$ oder als Summe der kleinen roten Rechtecke, die sich zu $|\vec{a} \times \vec{b}|$ und $|\vec{a} \times \vec{c}|$ berechnen. Also muss gelten

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Abb.6.1 c) zeigt, dass eine Streckung um den Faktor Zwei, auch zur Verdoppelung des blauen Parallelogramms — d.h. des Skalarprodukts — führt. Dies muss für alle Streckungsfaktoren gelten also folgt

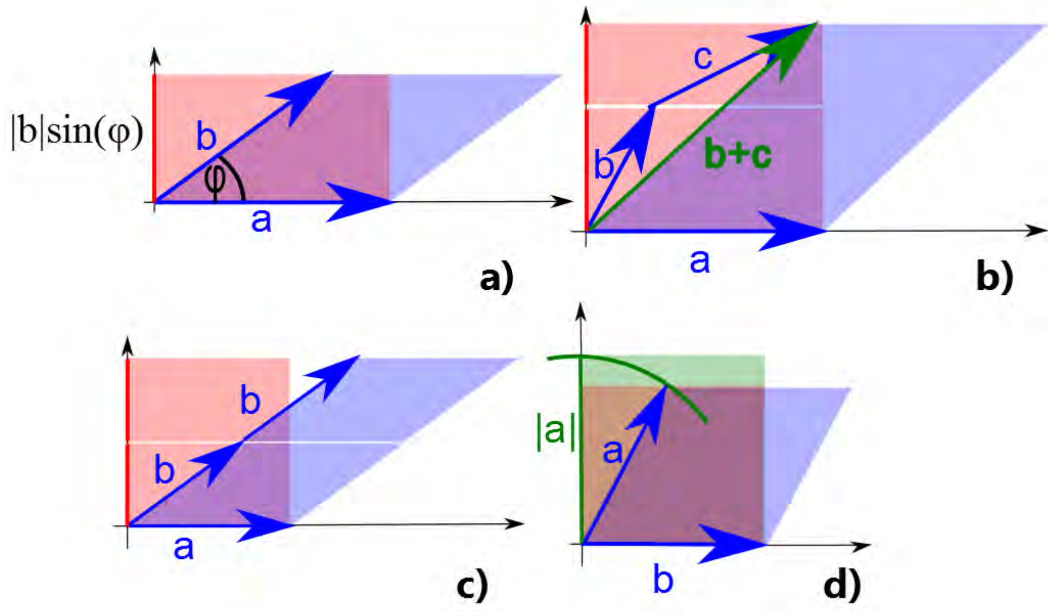


Abbildung 6.1: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Vektorprodukt folgen direkt aus geometrischen betrachtungen.

$$\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \; .$$

Schliesslich zeigt Abb.6.1 d), dass die Fläche des blauen Parallelogramms meistens kleiner — höchstens aber gleich gross — ist, als die des Rechtecks mit dem Seitenlängen $|a|$ und $|b|$. Deshalb gilt für das Vektorprodukt

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \; .$$

Das letzte Gesetz in 6.1 lässt sich nachvollziehen, indem Sie zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ festlegen, z.B. $\vec{a}$ nach rechts und $\vec{b}$ nach vorne. Dann zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ mit der Rechten-Hand-Regel nach oben und $\vec{b} \times \vec{a}$ nach unten.

6.3 Das Vektorprodukt in einer rechtshändigen Orthonormalbasis

Beispiel 6.7 Vektorprodukt für Basisvektoren **745623**

Berechne das Vektorprodukt zwischen *allen* Basisvektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis. Benutze dazu nur die Definition 6.1 des Vektorprodukts.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = ? \; \ldots$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = ? \; \ldots$$

Beispiel 6.8 Vektorprodukt für allgemeine Vektoren **936044**

Berechne das Vektorprodukt zwischen zwei allgemeinen Vektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis. Benutze dafür auch die Sätze 6.1. Drücke dazu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Basisvektoren aus:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Berechne dann das Vektorprodukt für die allgemeinen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
Übrigens gilt auch $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$

Der Ausdruck, der am Ende in Beispiel 6.1 entsteht lässt sich nur schwer merken. Die Infobox 6.1 zeigt ein Verfahren, wie der Ausdruck von Beispiel 6.1 ohne Auswendiglernen sondern mit einem einfachen Verfahren hingeschrieben werden kann.

Beispiel 6.9 Rechenregeln Vektorprodukt **020196**

Berechne für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die Teilresultate der ersten Teilaufgaben für die Berechnung der letzteren.

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{a} \times \vec{c}$

c) $\vec{b} \times \vec{c}$

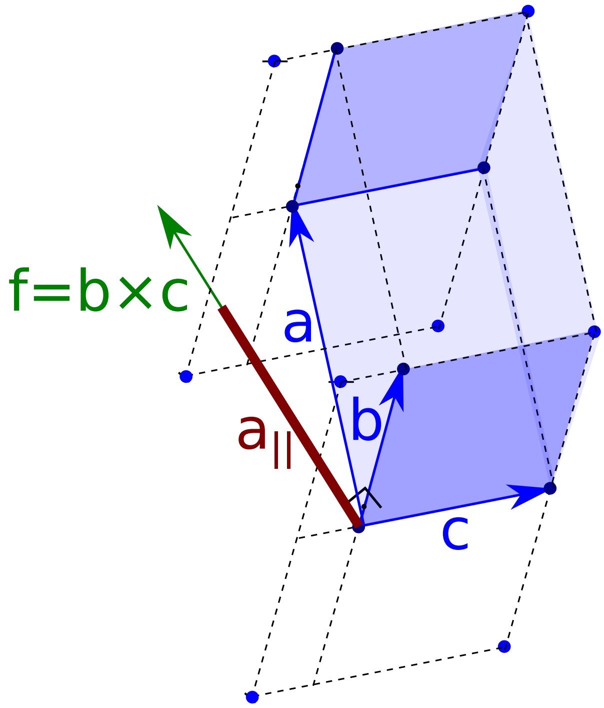
d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

e) $\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

f) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

g) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$

6.4 Spatprodukt



Im Folgenden betrachten wir drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und den Ausdruck

$$\vec{a} \odot \underbrace{\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}_{=:\vec{f}} .$$

Wir stellen fest, dass das Vektorprodukt $\vec{f} = \vec{b} \times \vec{c}$ senkrecht auf dem Parallelogramm aufgespannt durch $\vec{b} \times \vec{c}$ steht und dass $|\vec{f}|$ gleich der Fläche des Parallelogramm aufgespannt durch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist. Durch das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{f} = \underbrace{\cos(\varphi) \cdot |\vec{a}|}_{=:a_{\|}} \cdot |\vec{f}|$$

wird der Schatten $a_{\|}$ von $\vec{a}$ auf $\vec{f}$ berechnet. Dies ist genau die Höhe des Körpers aufgespannt durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Diese Höhe wird noch mit der Grundfläche $|\vec{f}|$ multipliziert. Zusammenfassend haben wir also
$\vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) =$ Grundfläche $\cdot$ Höhe= Volumen.

Definition Spatprodukt

Das Parallelepiped aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nennen wir **Spat**. Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ heisst die Zahl

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] := \vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

das **Spatprodukt**.
Der Betrag des Spatprodukts ist gleich dem Volumen des Spats.

[**?**, p.403] [**?**, Bd. 1 II 3.5]

Satz Gesetze für das Spatprodukt

- Paarweise Vertauschung :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$$

- Zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

Wir merken uns also: Das Volumen des Spats ist unabhängig von der Reihenfolge in der $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufzählet werden. Nur das Vorzeichen kann eventuell ändern, wenn die Reihenfolge vertauscht wird.

Beispiel 6.10 Berechne das Volumen des Spats aufgespannt durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ **340107**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Zuerst berechnen wir das Vektorprodukt

$$\vec{f} := \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dann berechnen wir das Skalarprodukt

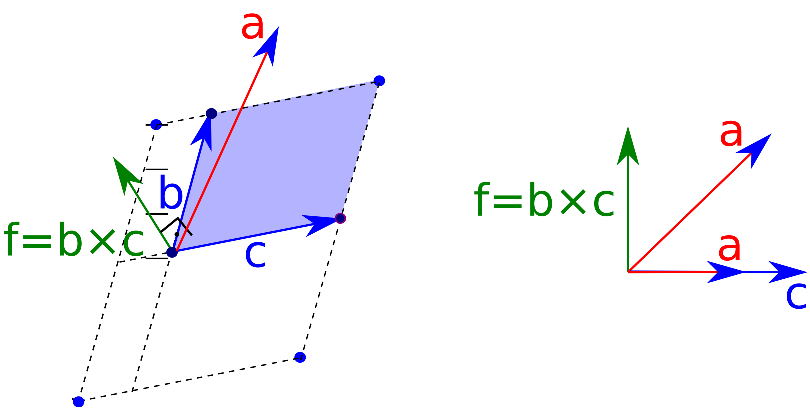
$$\vec{a} \odot \vec{f} = -7$$

Also ist das Volumen $|\vec{a} \odot \vec{f}| = V = 7$.

Beispiel 6.11 Bestimme, ob die Vektoren linear abhängig sind **451218**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Benutze dazu das Spatprodukt.



Beispiel 6.12 Spatprodukt **5AHNL8**

Berechne das Volumen des Parallelepipeds aufgespannt durch die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Gibt jeweils an, ob die Vektoren linear abhängig sind.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

6.5 Abstand Punkt-Gerade

Satz Abstand Punkt Gerade

Der Abstand eines Punktes $\vec{B}$ von der Geraden $g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ ist $h = \frac{|\vec{u}\times(\vec{B}-\vec{A})|}{|\vec{u}|}$

[**?**, Bd. 1 II 4.1.3]

Beispiel 6.13 Abstand Punkt-Gerade **DK2JYA**

Wir betrachten die Gerade $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v}$ und den Punkt $\vec{B}$ ($\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{X} \in \mathbb{R}^3$; $\lambda \in \mathbb{R}$). Wie gross ist ihr Abstand? Berechnen Sie dazu zuerst die Fläche aufgespannt durch $\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$ und $\vec{v}$.

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Fläche aufgespannt durch $\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$ und $\vec{v}$.

$$\vec{n}' = \vec{v} \times (\vec{B} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Also $F = |\vec{n}'| = 20$. Danach fällt uns auf, dass sich die Fläche des Parallelogramms auch ausdrücken lässt durch die Höhe im Parallelogramm h

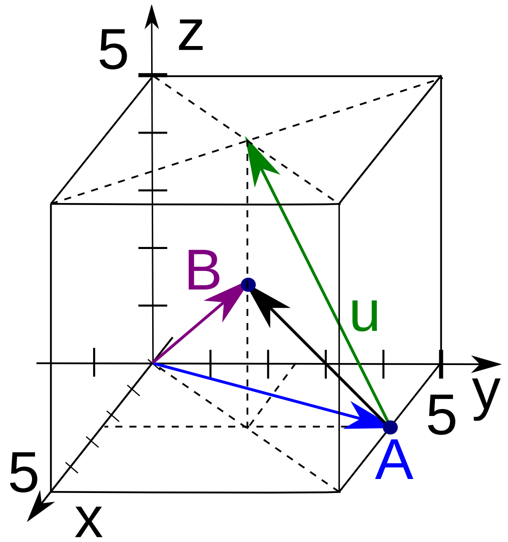
$$F = h \cdot |\vec{v}|$$

Die Höhe ist auch gleichzeitig der Abstand der Geraden zum Punkt. Also lösen wir auf nach h

$$h = \frac{F}{|\vec{v}|} = \frac{\left|\vec{v} \times (\vec{B} - \vec{A})\right|}{|\vec{v}|} = \frac{20}{2} = 10$$

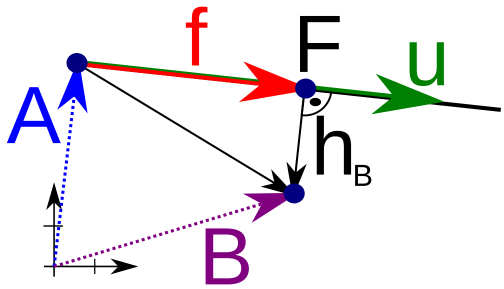
Beispiel 6.14 Abstand Punkt-Gerade im Raum **292982**

Wie gross ist der Abstand zum Raum-Mittelpunkt des Würfels $5 \times 5 \times 5$?



Achtung, der Satz ist eine Eigenheit von $\mathbb{R}^3$. Er basiert darauf, dass in $\mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt existiert. In $\mathbb{R}^N$ mit $N > 3$ gibt es keine Vektorprodukt. Deshalb muss dort der Abstand zwischen dem Punkt $\vec{B}$ und der Geraden $g : \vec{A} + \lambda\vec{u}$ über den Fusspunkt $\vec{F} = \vec{A} + \vec{f}$ und das Lot $\vec{h}_B = \vec{B} - \vec{F}$ berechnet werden.

Beispiel 6.15 Bestimme den Fusspunkt von $\vec{B}$ auf g **14259**

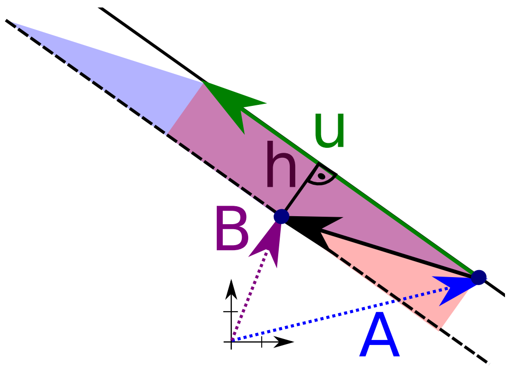


Zerlege dazu $\vec{B} - \vec{A}$ in eine Komponente $\vec{f}$ parallel ($\|$) und in eine Komponente $\vec{h}_B$ senkrecht ($\perp$) zu $\vec{u}$. Zur Kontrolle kann die Länge des Verbindungsvektors von Fusspunkt zu $\vec{B}$. Sie sollte gleich lang sein, wie der Abstand, der in der vorherigen Aufgabe berechnet wurde.

6.6 Wieso funktioniert das? (Herleitung)

Beispiel 6.16 Abstand Punkt-Gerade im Raum **094524**

Berechne den Abstand eines Punktes $\vec{B}$ zur Gerade gegeben durch $g : \vec{A} + \lambda\vec{u}$.



Drücke dazu die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{u}$ und $\vec{B} - \vec{A}$ einmal mit Hilfe des Vektorprodukts aus und einmal mit Hilfe des Abstands aus

Beispiel 6.17 Abstand Punkt-Gerade **CJ1IXZ**

Wir betrachten die Gerade $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v}$ und den Punkt $\vec{B}$ ($\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{X} \in \mathbb{R}^3;\ \lambda \in \mathbb{R}$). Wie gross ist ihr Abstand? Berechnen Sie dazu zuerst die Fläche aufgespannt durch $\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$ und $\vec{v}$.

a) $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

KAPITEL 7

Ebenen in $\mathbb{R}^3$

Lernziele Darstellung von Ebenen in $\mathbb{R}^3$

- Die Studierenden können den Abstand eines Punktes zu einer Ebene berechnen.
- Sie können eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ darstellen in
  - Parameterform
  - Normalenform
  - Koordinatenform
- Sie können die Darstellungen ineinander überführen.
- Sie können aus den drei Darstellungen die Hessesche Normalenform berechnen.
- Sie können aus der Hesseschen Normalenform den Abstand eines Punktes zur Ebene berechnen.
- Sie können die Koeffizienten der Koordinatenform der Ebene als Normalenvektor interpretieren und kennen den Zusammenhang der Konstanten mit dem Abstand zum Ursprung des Koodinatensystems.

7.1 Abstand Punkt Ebene

Durch einen festen Punkt (den Aufpunkt) und eine gegebene Richtung (den Richtungsvektor) erhält man eine Gerade. Nimmt man einen zweiten Richtunsvektor hinzu, dann entsteht eine Ebene.

Definition Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$

Die Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

- $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ heisst **Aufpunkt** (oder Stützpfeil)
- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ heissen **Richtungsvektoren**
- $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ sind freie Parameter

Die Richtungsvektoren müssen nicht unbedingt senkrecht aufeinander stehen. Sie dürfen aber *nicht kollinear* sein.

Beispiel 7.1 Parameterdarstellung der Ebene **898246**

Die Ebene E geht durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme Parameterdarstellung der Ebene.

b) Welche Freiheiten haben wir bei dieser Darstellung?

Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \vec{A} + \lambda\left(\vec{B} - \vec{A}\right) + \nu\left(\vec{C} - \vec{A}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}} + \nu \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}} \end{aligned}$$

mit $\lambda, \ \nu \in \mathbb{R}$.
Freiheiten bei der Wahl: Wir können $\vec{A}$, $\vec{B}$ oder $\vec{C}$ als Aufpunkt wählen. Wir können Reichungsvektoren strecken oder durch eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ersetzen.

Beispiel 7.2 Parameterdarstellung Ebene 787135

Die Ebene E geht durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

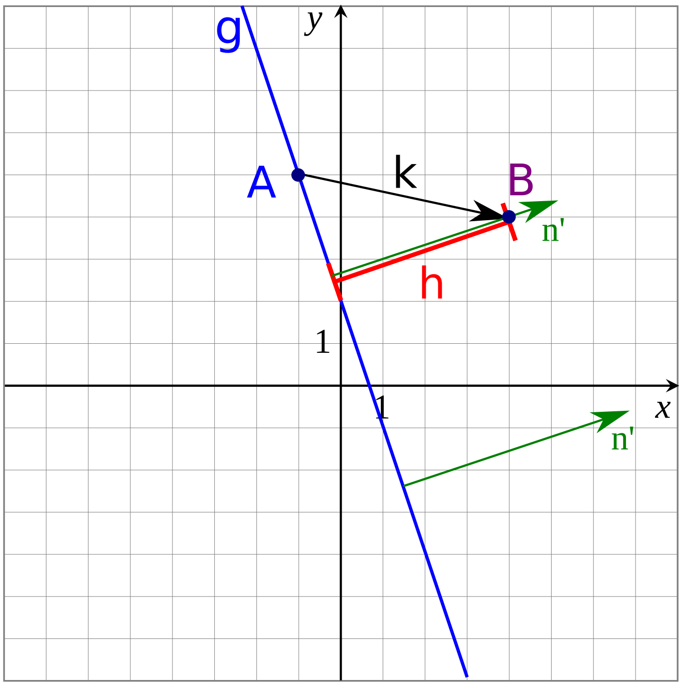
Bestimme die Parameterdarstellung der Ebene.

Beispiel 7.3 Liegen die Punkte in der Ebene E? 642893

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -22 \\ 28 \\ -22 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \vec{S} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Beispiel 7.4 Abstand Punkt Gerade in $\mathbb{R}^2$

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{B}$ von der Geraden g



Beispiel 7.5 Abstand Punkt Gerade in $\mathbb{R}^2$ **ZIZIX3**

Die Gerade g lautet $y = -0.1 \cdot x + 5$. Wir wollen den Abstand zu Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ berechnen (ohne Vektorprodukt). Gehen Sie dafür wie folgt vor:

a) Machen Sie eine Skizze der Situation in der x-y-Ebene.

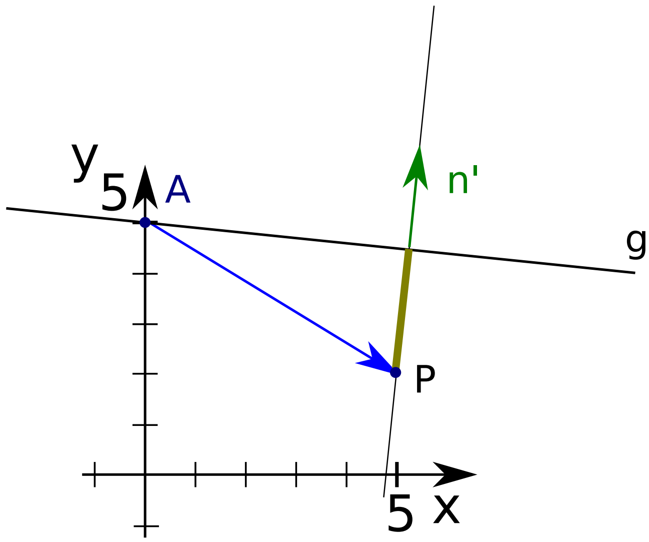
b) Geben Sie die Gerade in Parameterform an.

c) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{n}'$, der senkrecht zu g steht. Zeichnen Sie diesen Vektor ein.

d) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{w}$, der $\vec{P}$ mit der Geraden verbindet. Zeichnen Sie diesen Vektor ein.

e) Berechnen Sie die Länge des Schattens von $\vec{w}$ auf $\vec{n}'$.

f) Wie kann man nun den Abstand von $\vec{P}$ zu g berechen?.



Beispiel 7.6 Abstand Punkt Gerade in $\mathbb{R}^2$ **UE9YTP**

Berechnen Sie den Abstand der folgenden Geraden vom angegebenen Punkt.

a) $g:\ y = 0.1 \cdot x + 3$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $h:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) i verläuft durch die Punkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist der Abstand zu $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) k: $2x - y = 24$ und $\vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 7.7 Gerade in Parameterdarstellung in $\mathbb{R}^2$ **1PGCCB**

Geben Sie die Parameterform der Geraden an.
Berechnen Sie den Abstand zu einem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Ebene.
Lesen Sie dann den Normalenvektor und den Abstand zum Ursprung aus.

a) f: $y(x) = 4 - 2 \cdot x$

b) g: $y(x) = -8 + x$

c) h: $y(x) = \frac{9-x}{3}$

d) i: $y(x) = \frac{3x+8}{2}$

e) j: $2x - y = 14$

f) k: $2x = 26$

Beispiel 7.8 Gerade in Koordinatenform in $\mathbb{R}^2$ UPMT9H

Geben Sie die Koordinatenform der Geraden an. Berechnen Sie den Abstand zu einem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Ebene.
Lesen Sie dann den Normalenvektor und den Abstand zum Ursprung aus. Berechnen Sie schliesslich den Abstand zum Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) f: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 59 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) h: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) i: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) j: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

f) k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3.22 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 11 \end{pmatrix}$

Beispiel 7.9 Abstand Punkt Ebene in $\mathbb{R}^3$ 1R9P4G

Die Ebene lautet $E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sie wollen ihren Abstand zu Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

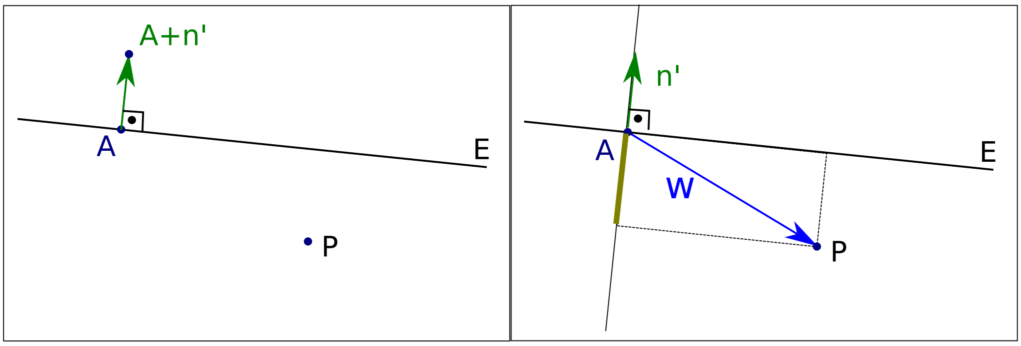
a) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{n}'$, der senkrecht zu E steht.

b) Machen Sie eine Skizze der Situation in der Ebene, in der die folgenden Punkte liegen: Aufpunkt $\vec{A}$ von E, $\vec{P}$, $\vec{A} + \vec{n}'$ und die Ebene E selber.
Zeichnen Sie den Normalenvektor $\vec{n}'$ und die Ebene E ein.

c) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{w}$, der $\vec{P}$ mit der Ebene verbindet. Zeichnen Sie diesen Vektor in der Skizze ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Schattens von $\vec{w}$ auf $\vec{n}'$.

e) Wie kann der Abstand von $\vec{P}$ zu E nun berechnet werden?



Beispiel 7.10 Abstand Punkt Ebene **2MZJ54**

Berechnen Sie den Abstand zwischen E und $\vec{P}$ ($\mu, \nu \in \mathbb{R}$)

a) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \\ 105 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 117 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 35 \\ 129 \end{pmatrix}$ liegen in E und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt ausserhalb

d) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 56 \\ 13 \\ 135 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 146 \\ 18 \\ 79 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 101 \\ 8 \\ 107 \end{pmatrix}$ liegen in E und $\vec{P} = \begin{pmatrix} -28 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt ausserhalb

Beispiel 7.11 Normaleneinheitsvektor **014259**

Bestimme für die Ebene $\vec{A} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v}$ einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht und der normiert ist.

Definition Normaleneinheitsvektor

Für die Ebene $\vec{A} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir den Normaleneinheitsvektor

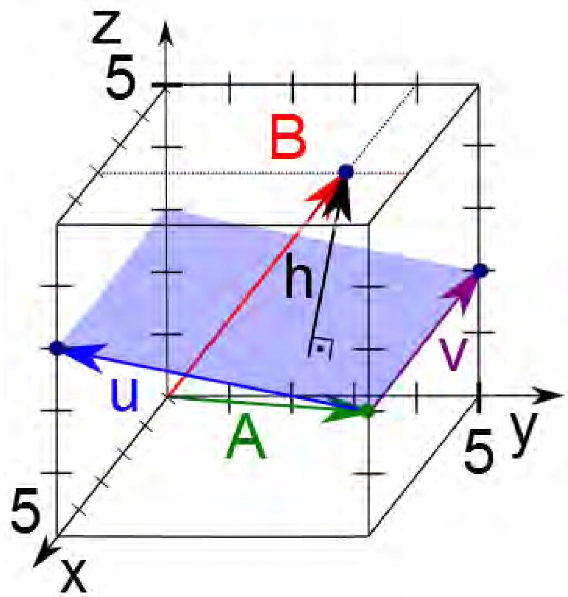
$$\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \,.$$

Im Folgenden werden wir die Notation beibehalten, dass $\vec{n}$ stets normiert ist, während $\vec{n}'$ zwar senkrecht auf der Ebene steht, jedoch keine definierte Länge hat, wie im vorhergehenden Beispiel. Wir nennen $\vec{n}'$ den Normalenvektor.

- ~~Der **Normalenvektor** $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$ steht senkrecht auf Ebene~~

- Der **Normaleneinheitsvektor** $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene *und* hat Länge 1, d.h. er ist normiert.

Beispiel 7.12 Abstand Punkt-Ebene im Raum **026648**



Lesen Sie die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ und die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ aus der Grafik aus. Projizieren Sie dann den Verbindungsvektor $\vec{B} - \vec{A}$ auf den Normaleneinheitsvektor der Ebene. Berechnen Sie daraus den Abstand von $\vec{B}$ zur Ebene E.

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Satz Abstand Punkt-Ebene im Raum, Hesse-Normalenform

Der Abstand eines Punktes $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene $E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist $|h|$ und berechnet sich aus

$$h(\vec{P}) = \left(\vec{P} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}' = \left(\vec{P} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}$$

Dabei benutzen wir den Normalenvektor

$$\vec{n}' = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \text{ oder den Normalen-Einheitsvektor } \vec{n} = \frac{\vec{n}'}{\|\vec{n}'\|}$$

[**?**, Bd. 1 II 4.2.4]

Damit kann man zwei Dinge tun:

- Wir können $h(\vec{P})$ benutzen um Abstände von Punkten $\vec{P}$ von der Ebene E zu berechnen.
- Wir können mit $\left(\vec{P} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = 0$ implizit alle Punkte in einer Ebene definieren. Oder umgekehrt: Alle Vektoren $\vec{P}$, die $\left(\vec{P} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = 0$ erfüllen liegen in der Ebene.

Beispiel 7.13 Abstand Punkt-Ebene im Raum **007592**

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{R}$ von den Ebenen.

a) $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 13.8 \\ 20.9 \\ 0 \end{pmatrix}$

7.2 Wie kann man eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ darstellen?

Definition Normalenform der Ebene im Raum

Ebene E ist definiert durch den Normalenvektor $\vec{n}'$ und den Ortsvektor des Aufpunktes $\vec{A}$. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene gilt

$$E: \; (\vec{x} - \vec{A}) \odot \vec{n}' = 0$$

Die Normalenform kann man lesen entweder als

- Für einen Vektor $\vec{x}$ in der Ebene gilt, dass $(\vec{x} - \vec{A})$ senkrecht auf $\vec{n}'$ steht.
- Ein Vektor $\vec{x}$ in der Ebene $(\vec{x} - \vec{A})$ hat den Abstand 0 zur Ebene.

Die zweite Interpretation erhält man indem man in der Normalenform auf beiden Seiten durch $|\vec{n}'|$ dividiert, das ergibt dann $(\vec{x} - \vec{A}) \odot \vec{n} = 0$. Dies ist die Hessesche-Normalenform, auf die wir noch zurückkommen.

Beispiel 7.14 Gleichungen der Ebene im Raum **510881**

$$E: \; \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

a) Berechne den Normalenvektor der Ebene E.

b) Bestimme die Normalenform von E.

c) Führe dann das Skalarprodukt aus und ordne die Terme (Koordinatenform).

Lösung:

a) Der Normalenvektor ist

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \\ 210 \end{pmatrix}$$

Der Normaleneinheitsvektor:

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}'}{290} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix}$$

b) Normalenform durch Einsetzen von $(\vec{x} - \vec{A})$:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \\ 210 \end{pmatrix} = 0$$

c) Skalarprodukt ausführen

$$-200x + 210z + 1630 = 0$$

Beispiel 7.15 Gleichungen der Ebene im Raum **409770**

Bestimme die Normalenform der Ebene E

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechne dazu den Normalenvektor. Vereinfache soweit, dass keine Vektoren mehr in der Normalenform auftreten.

Definition Koordinatenform der Ebene im Raum

Eine Ebene ist definiert durch die vier Parameter n_1', n_2', n_3' und d'. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x}$ in der Ebene gilt $E:\ n_1' \cdot x + n_2' \cdot y + n_3' \cdot z + d' = 0$

Die Koordinatenform ergibt sich z.B. durch das Auswerten der Normalenform. Die Koeffizienten n_1', n_2', n_3' sind die Komponenten des Normalenvektors.

Beispiel 7.16 Gleichungen der Ebene im Raum **173961**

Bestimme für die Ebene E

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

den Normalenvektor. Drücke dann mathematisch aus, dass der Verbindungsvektor von einem Punkt $\vec{x}$ *in der Ebene* zum Aufpunkt den Abstand Null zur Ebene hat.

Beispiel 7.17 Normalenform und Koordinatenform der Ebene **UE9YTP**

Gibt die Normalenform und die Koordinatenform der folgenden Ebenen an.

a) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \\ 105 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 117 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 35 \\ 129 \end{pmatrix}$ liegen in E

c) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 56 \\ 13 \\ 135 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 146 \\ 18 \\ 79 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 101 \\ 8 \\ 107 \end{pmatrix}$ liegen in E

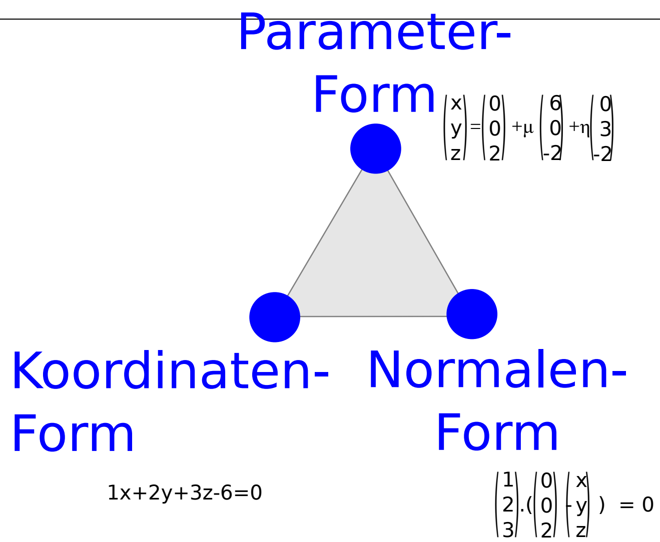


Abbildung 7.1: Die verschiedenen mathematischen Darstellungen der Ebene in $\mathbb{R}^3$.

7.3 Wie man die Darstellungen der Ebene ineinander überführt

Wir kennen drei unterschiedliche Darstellungen der Ebene im Raum. Es sind dies die Parameter-Form, die Normalen-Form und die Koordinaten-Form.

Jede Form kann in die beiden anderen überführt werden. Wie dies am effizientesten gemacht wird, wird hier besprochen.

7.3.1 Von der Koordinaten-Form $1x + 2y + 3z - 6 = 0$ zu ...

Infobox Koordinaten-Form zur Parameter-Form

Es können drei Punkte erzeugt werden. Meist gelingt dies am schnellsten mit den Punkten

$$\vec{P} = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix},\ \vec{R} = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$$

Nun kann $\vec{P}$ als Aufpunkt gewählt werden und

$$\vec{u} = \vec{Q} - \vec{P} \text{ und } \vec{v} = \vec{R} - \vec{P}$$

als Richtungsvektoren. Die Ebenengleichung ist dann

$$E : \vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Es kann vorkommen, dass die Ebene parallel zu einer Koordinaten-Achse liegt. Dann müssen die Punkte $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ anders gewählt werden. Ist die Ebene z.B. parallel zur z-Achse, dann könnten dies z.B. die folgenden Punkte sein

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 7.18 Von der Koordinaten-Form zur Parameterform **467643**

Berechnen Sie eine Parameterform der Ebene gegeben durch

$$E : 1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Infobox Koordinaten-Form zur Normalen-Form

Es kann ein Punkt erzeugt werden, z.B.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Die Normale kann aus der Koordinatenform abgelesen werden. Sie besteht aus den Koeffizienten

$$E : n_1' \, x + n_2' \, y + n_3' \, z - d = 0$$

Die Normalenform ist dann

$$E : \begin{pmatrix} n_1' \\ n_2' \\ n_3' \end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{P} \right) = 0$$

Beispiel 7.19 Von der Koordinaten-Form zur Normalen-Form **211568**

Berechnen Sie eine Normalen-Form der Ebene gegeben durch

$$E : 1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Beispiel 7.20 Punkte in Ebene erzeugen 7EQKL7

Geben Sie drei Punkte der Ebenen an, wenn möglich die folgenden

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_z \end{pmatrix}$$

Lesen Sie dann den Normalenvektor und Abstand zum Ursprung aus und geben Sie die Normalenform der Ebenen an.

a) E: $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

b) E: $x - y - z + 1 = 0$

c) E: $5y = 0$

d) E: $6x - 3y - 2z + 30 = 0$

e) E: $7x = 3$

f) E: $-4x + 2y - z + 8 = 0$

7.3.2 Von der Parameter-Form ...

Infobox Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form

Mit dem Vektorprodukt kann aus dem Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Normalenvektor berechnet werden.

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$$

Die Ebene schreibt sich nun als

$$n'_1\,x + n'_2\,y + n'_3\,z + d = 0$$

wobei d die Konstante durch Einsetzen der Koordinaten des Aufpunktes bestimmt wird.

Beispiel 7.21 Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form **211568**

Berechnen Sie die Koordinaten-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Infobox Von der Parameter-Form zur Normalen-Form

Mit dem Vektorprodukt kann aus dem Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Normalenvektor berechnet werden.

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$$

Der Aufpunkt und die Normale kann dann direkt in die Normalen-Form eingesetzt werden.

Beispiel 7.22 Von der Parameter-Form zur Normalen-Form **995397**

Berechnen Sie die Normalen-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

7.3.3 Von der Normalen-Form ...

Der Weg von der Normalen-Form zur Koordinaten-Form besteht aus dem Ausmultiplizieren.

Beispiel 7.23 Von der Normalen-Form zur Koordinaten-Form **849600**

Berechnen Sie die Koordinaten-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Infobox Von der Normalen-Form zur Parameter-Form

Durch Ausmultiplizieren berechnen wir zuerst die Koordinatenform

$$n'_1\,x + n'_2\,y + n'_3\,z + d = 0$$

wobei sowohl die Koeffizienten wie auch die Konstante bekannt sind. Wir erzeugen dann drei Punkte z.B.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen $\vec{P}$ als Aufpunkt und bestimmen die Richtungsvektoren

$$\vec{u} = \vec{Q} - \vec{P} \text{ und } \vec{v} = \vec{R} - \vec{P}$$

Die Ebenengleichung ist dann

$$E : \vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Beispiel 7.24 Von der Normalen-Form zur Parameter-Form **763463**

Berechnen Sie die Parameter-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

7.4 Hesse-Normalenform

Definition Hesse-Normalenform der Ebene im Raum

$$E: \ \vec{n} \odot (\vec{x} - \vec{A}) = 0$$

mit $\vec{n}$ Normalen-Einheitsvektor, $\vec{A}$ Aufpunkt und $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

~~[?, p.418] [?, Bd. 1 II 4.2.3] In der Literatur findet sich wohl die Definition der Hesse-~~ Normalform, doch hat diese in der Praxis für die implizite Definition einer Ebene kaum Bedeutung. Wieso soll man den Normalen-Einheitsvektor $\vec{n} = \frac{\vec{n}'}{\|\vec{n}'\|}$ benuten in $\vec{n} \odot (\vec{x} - \vec{A}) = 0$, wenn der Ausdruck einfach auch mit dem Normalenvektor $\vec{n}'$ geschrieben werden kann

$$\vec{n}' \odot (\vec{x} - \vec{A}) = 0\,?$$

Einzig bei der Abstandbestimmung ist die Normierung nützlich.

Infobox Hesse-Normalenform: Abstand Punkt-Ebene

- Die Hesse'sche Normalenform wird benutzt um Abstände zu einer Ebene zu berechnen. Wir schreiben dafür die Funktion

$$h(\vec{x}) = \vec{n} \odot (\vec{x} - \vec{A}) = \frac{\vec{n}'}{\|\vec{n}'\|} \odot (\vec{x} - \vec{A})$$

- Liegt die Ebene in der Koordinatenform vor $a\,x + b\,y + d = 0$, so erfolgt die Abstandsmessung über

$$h(x, y, z) = \frac{a\,x + b\,y + c\,z + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Die Hesse'sche Normalenform in Koordinatenform ist besonders ökonomisch, wenn man den Abstand von E zu vielen verschiedenen Punkten berechnen will.

Um beispielsweise die Abstände von der Ebene $12x - 5y - 78 = 0$ zu bestimmen, benutzen wir die Funktion

$$h(x, y, z) = \frac{12x - 5y - 78}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{12x - 5y - 78}{13}$$

Beispiel 7.25 Hesse-Normalenform **6ZXEAL**

$$E: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

a) Berechnen Sie den Abstand von E zum Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$.

b) Geben Sie den Abstand zum allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene an (Hessesche Normalenform).

c) Multiplizieren Sie im Ausdruck das Skalarprodukt aus.

d) Charakterisieren Sie dann die Ebene durch die Koordinatenform, Normalenvektor und Abstand zum Ursprung.

Lösung:
Der Normalenvektor ist

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ mit } \left\|\vec{n}'\right\| = 5$$

Der Abstand ist $|h|$.

a) Abstand zu $\vec{P}$

$$h(\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}) = \frac{(\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{5} = 10$$

b) Der Ausdruck berechnet auch den Abstand zum allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \frac{(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{5}$$

c) Ausmultiplizieren:

$$h(x, y, z) = \frac{4x}{5} - \frac{3z}{5} - \frac{26}{5}$$

d) Koordinatenform

$$4x - 3z - 26 = 0$$

Normalenvektor, Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Abstand zur Ebene zum Ursprung

$$h(0, 0, 0) = -\frac{26}{5} = -5.2$$

Also $|h| = 5.2$.

Wir stellen fest:

Infobox Rolle der Konstante in der Ebenengleichung

Der Abstand zum Ursprung ist entweder die Konstante in der Hesseschen Normalenform, oder die Konstante der Koordinatenform geteilt durch die Länge des Normalenvektors.

Beispiel 7.26 Hesse-Normalenform **5YWDZK**

Geben Sie den Abstand zum allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene an (Hesse-Normalenform).
Charakterisieren Sie dann die Ebene durch die Koordinatenform, Normalenvektor und Abstand zum Ursprung.

Berechnen Sie schliesslich den Abstand zum Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) $E: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 65 \end{pmatrix} = 0$

b) E Aufpunkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $E: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

d) E Aufpunkt $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} 0$

Beispiel 7.27 Hesse-Normalenform **854087**

Wie gross ist der Abstand der Ebene E vom Ursprung?

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

Werte dann $\left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}$ für $\vec{x} = \vec{0}$ aus. Beachte, dass hier der Normaleneinheitsvektor und nicht der Normalenvektor verwendet wird. Betrachte die Resultate und formuliere eine Vermutung.

7.4.1 Achsenabschnitts-Form

Beispiel 7.28 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen **440325**

Berechne die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen

$$E:\ 21x + 70y + 15z - 105 = 0$$

Teile dann die Koordinatenform durch 105. Dadurch wir die Konstante auf -1 gesetzt. Vergleiche nun die Koordinatenform mit den Schnittpunkten und formuliere deine Vermutung.

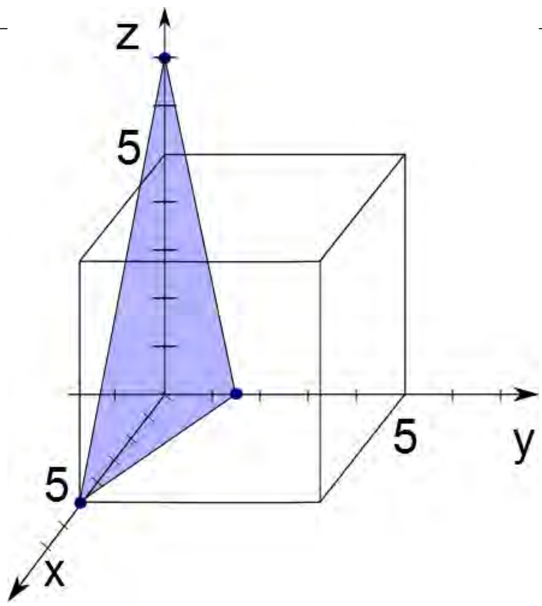


Abbildung 7.2: In der Achsenabschnittsform lassen sich die Schnittpunkte mit den jeweiligen Koordinatenachsen direkt ablesen.

Definition Achsenabschnitts-Form

$E: \ c_1x + c_2y + c_3z - 1 = 0$

Die Achsenabschnittsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Konstante den Wert -1 hat. Die Schnittpunkte mit den jeweiligen Koordinatenachsen können direkt abgelesen werden und sind bei $1/c_1, 1/c_2, 1/c_3$ wie Abb. 7.2 zeigt.

7.5 Wie kann man die Koeffizienten der Koordinatenform interpretieren?

Infobox Koeffizienten und Konstante der Koordinatenform

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot y + c_3 \cdot z = d$$

- Die Koeffeffizienten c_1, c_2 und c_3 sind die Koordinaten des Normalenvektors $\vec{n}'$.
- Der Betrag von $\frac{d}{|\vec{n}'|}$ gibt den Abstand zum Urpsrung an.
- Für $d > 0$: Verändern wir $\vec{n}'$ nicht, sondern vergrössern wir nur d, so wächst der Abstand der Ebene zum Urpsrung.

Beispiel 7.29 Unterscheidung nach Schnittmenge, 2 Ebenen QWHA5Z

Betrachten Sie die Schnittmengen von zwei Ebenen in Abbildung 7.3.

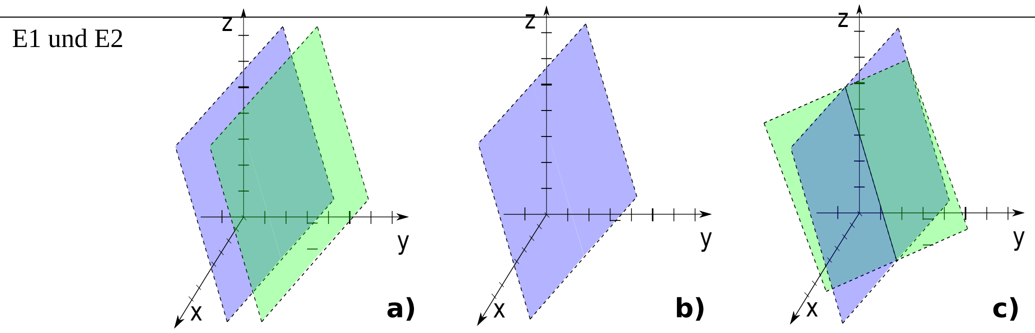


Abbildung 7.3: Mögliche Schnittmengen von zwei Ebenen

a) Welche Schnittmengen gibt es? Beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

b) Wie können Sie die Fälle unterscheiden anhand der Normalenvektoren oder der Konstanten.

c) Für ein homogene lineares Gleichungssystem, d.h. die Konstanten aller Ebenen sind 0: Welche der oben besprochenen Fälle können jetzt noch auftreten?

Beispiel 7.30 Schnittmengen qualitativ **FK36P5**

Betrachten Sie die Schnittmengen in Abbildung 7.4. Unten finden Sie die Gleichungen der Ebenen E_1, E_2 und E_3 — vor und nach der Gauss-Elimination. Welche gegenseitige Lage haben E_1, E_2 und E_3. Wie sieht die Schnittmenge aus? Antworten Sie ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

a)

$$\left|\begin{array}{lcccc} E_1: & 0 & +9y & +8z & = 0 \\ E_2: & 8x & +9y & +6z & = 0 \\ E_3: & 10x & +0 & +6z & = 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 2x & +0 & +8z & = 0 \\ 0 & +9y & +8z & = 0 \\ 0 & +0 & +34z & = 0 \end{array}\right|$$

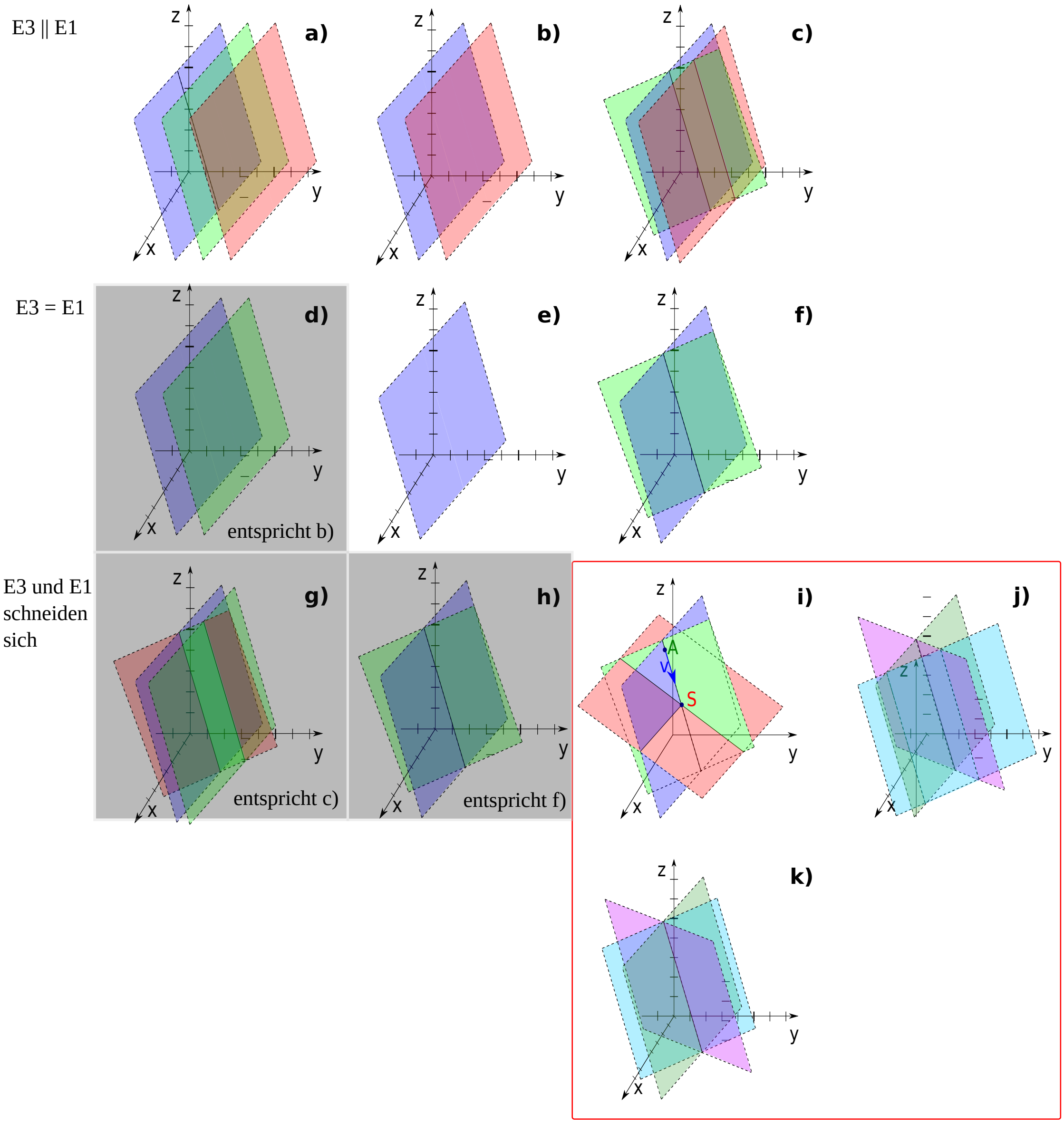


Abbildung 7.4: Mögliche Schnittmengen von drei Ebenen: die Ebenen E_1 und E_2 aus Abbildung 7.3 (parallele, identische und sich schneidende Ebenen) werden mit einer dritten Ebenen E_3 (rot) kombiniert.

b)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 2x & +y & -2z & = & -1 \\ E_2: & x & +8y & -4z & = & 10 \\ E_3: & 6x & -y & +18z & = & 81 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{lrrcr} x & +0 & +44z & = & 178 \\ 0 & +y & +246z & = & 987 \\ 0 & +0 & +336z & = & 1344 \end{array}\right|$$

c)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 2x & +y & -2z & = & 7 \\ E_2: & x & +8y & -4z & = & 20 \\ E_3: & -3x & +6y & +0 & = & 6 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{lrrcr} x & +8y & -4z & = & 20 \\ 0 & +15y & -6z & = & 33 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right|$$