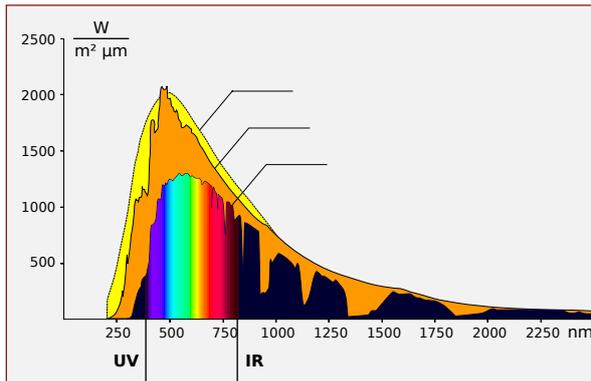
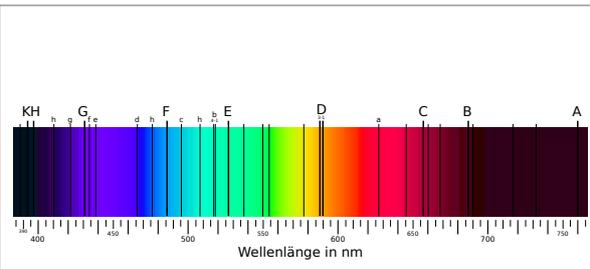

Quantenmechanik und Aufbau der Materie

Lernziele 21.1 Aufbau der Materie

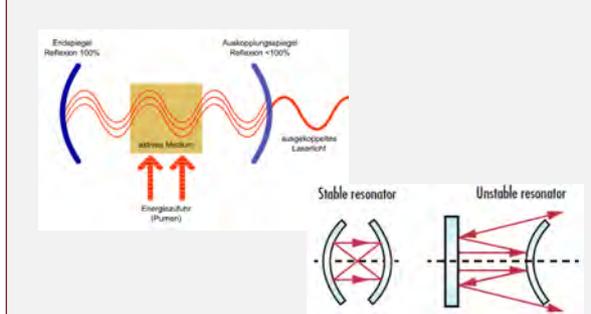
- Die Studierenden kennen das **Funktionsprinzip des Lasers** (Pumpen von Elektronen, Resonator, Stimulierte Emission) und können Laser von anderen Lichtquellen unterscheiden.
- Die Studierenden können das **Doppelspaltexperiment** erklären.
- Die Studierenden können den **Photoeffekt** erklären.
- Die Studierenden kennen verschiedene Phasen von Materie (Gas, Flüssigkeit, Festkörper, Plasma).
- Die Studierenden können chemische Elemente von Atomen und Molekülen unterscheiden.
- Die Studierenden kennen den Aufbau von Atomen (schwerer Atomkern, leichte Atomhülle, Grösse, Masseverteilung, Raumverteilung) und können angeben mit welchen Experimenten die Eigenschaften untersucht wurden.
- Die Studierenden kennen das Atommodell von Niels Bohr und seine Postulate.
- Die Studierenden können für Wasserstoff Wellenlängen des Emissionsspektrums berechnen (Balmer-, Lyman- und Paschen-Serie).
- Die Studierenden kennen das Oktett-Prinzip und die Elektronegativität. Sie können anhand dieser Konzepte die Unterscheidung in Metalle und Nichtmetalle und die Bindungstypen erklären.
- Die Studierenden wissen, dass Teilchen sowohl Wellen und Teilchencharakter aufweisen und kennen die Experimente, mit denen diese Eigenschaften nachgewiesen werden können.



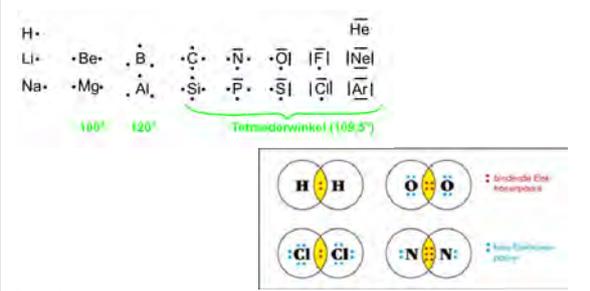
Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenstrahlung>



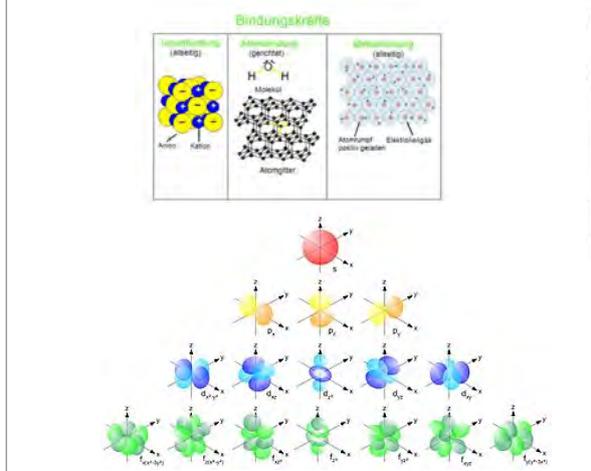
Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Fraunhoferlinie>



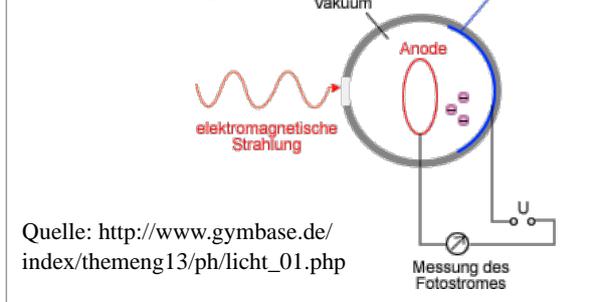
Quelle: https://www.univie.ac.at/mikroskopie/1_grundlagen/mikroskop/licht/4b_opt_resonator.htm



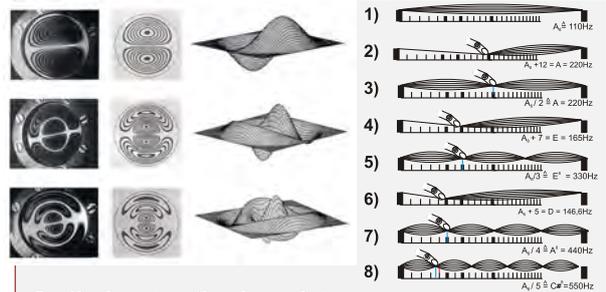
Quellen:
<https://www.chemie.schule/j11/j11te/chembind.htm>
<https://www.w-hoelzel.de/chemie/09-klasse/1-vom-atombau-bis-zmks/2-7-lewis-formeln-fuer-molekuele>



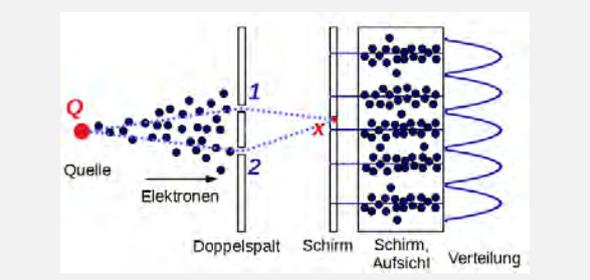
Quelle: <https://www.sofatutor.com/chemie/videos/elektronenkonfiguration>



Quelle: http://www.gymbase.de/index/themeng13/ph/licht_01.php



Quelle: <http://epsilon-lyrae.de/Doppelsterne/61Cygni/Eigenschwingungen.html>
 (Chladnische Klangfiguren)
 Quelle: String Harmonics (Wikipedia, auch Flagolett-Töne)



Quelle: <http://scienceblogs.de/hier-wohnen-drachen/2011/10/13/qft-fur-alle-quantenmechanik-und-das-pfadintegral/>

Definition 21.1 Der Impuls
 Ein Teilchen der Masse m und der Geschwindigkeit v hat den **Impuls** $p = m \cdot v$

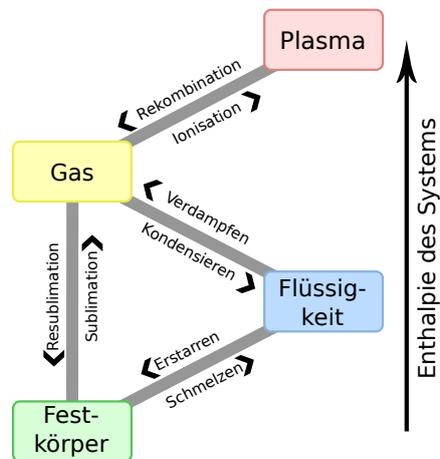
Beispiel 21.1 Impuls, kinetische Energie

JADBDC

Benutzen Sie den Impuls p um die kinetische Energie eines Teilchens der Masse m und der Geschwindigkeit v anzugeben.

21.1 Atommodell

21.1.1 Begriffe



Quelle: Wikipedia

Definition 21.2 Element bis Plasma

- Ein **chemisches Element** ist ein Reinstoff, der mit chemischen Methoden nicht mehr in andere Stoffe zerlegt werden kann. Die Elemente sind die Grundstoffe der chemischen Reaktionen. Die kleinste mögliche Menge eines Elements ist das **Atom**. Alle Atome eines Elements haben dieselbe Anzahl an Protonen im Atomkern (die Ordnungszahl). Daher haben sie den gleichen Aufbau der Elektronenhülle und verhalten sich folglich auch chemisch gleich. Beispiel: Stickstoff (N)
- **Molekül**: zwei- oder mehratomige Teilchen, die durch chemische Bindungen zusammengehalten werden. Beispiel: Methan CH_4 .
- Eine Substanz ist dann ein **Gas**, wenn sich deren Teilchen (Atome, oder Moleküle) in grossem Abstand voneinander frei bewegen und den verfügbaren Raum gleichmässig ausfüllen
- **Flüssigkeit**, Beispiel Wasser bei $20\text{ }^\circ\text{C}$ H_2O
 - Mikroskopische Definition: Stoff, dessen Teilchen sich ständig nicht-periodisch bewegen. Die Teilchen unterliegen einer Nahordnung, d.h. sie richten sich nach den benachbarten Teilchen aus. Es entsteht aber keine Fernordnung. Die mittlere freie Weglänge liegt in der Grössenordnung des Teilchendurchmessers.
 - Makroskopische Definition: Stoff, der einer Formänderung so gut wie keinen, einer Volumenänderung hingegen einen recht grossen Widerstand entgegensetzt (der Stoff ist nahezu inkompressibel).
- **Festkörper**: Stoff, der bei einer Temperatur von $20\text{ }^\circ\text{C}$ einen festen Aggregatzustand aufweist. Bausteinen sind einzelne Atome oder Moleküle. Beispiele: Metalle wie Blei, Stahl; Kristalline Proteine; Kristallzucker, Bergkristall
- **Plasma**: Teilchengemisch auf atomar-molekularer Ebene, dessen Bestandteile teilweise geladene Komponenten, Ionen und Elektronen sind. Beispiele: Kerzenflamme, Plasma in Leuchtstoffröhre, Blitz

Quelle: Wikipedia

Beispiel 21.2 Begriffe

84J2YS

Ordne zu. Zu welcher Kategorie gehören folgende Begriffe. Wir betrachten den Zustand bei Raumtemperatur $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$.

- a) Kohlenstoff
- b) Helium
- c) Amoniak
- d) Graphit
- e) Glas
- f) Aluminium

- g) Wasserstoff
- h) Salicylsäure
- i) Adenin (Baustein der DNA)
- j) Kochsalz
- k) Diamant

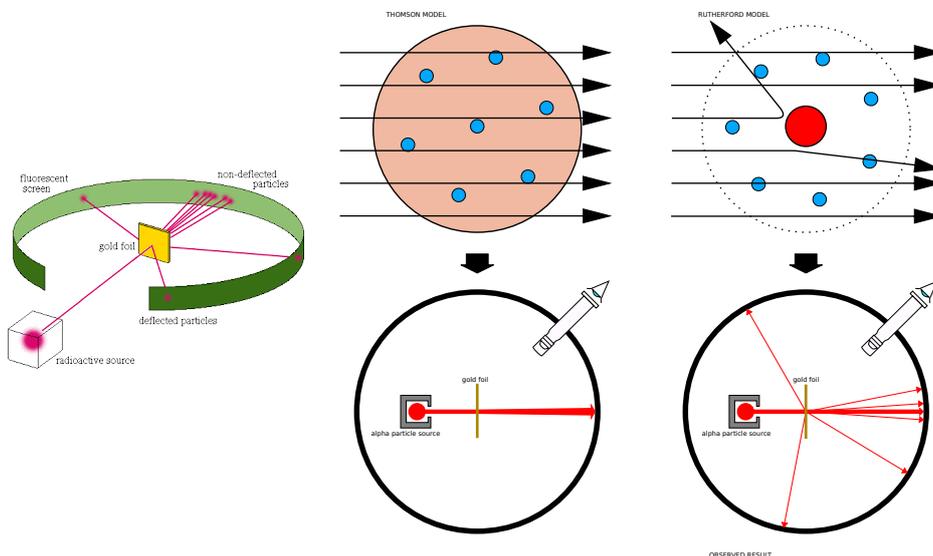
21.1.2 Heutige Vorstellung

Beispiel 21.3 Neutronenstern

Durch Druck können Elektronen auf die Protonen gedrückt werden. Die Teilchen verschmelzen und es entstehen Neutronen (Durchmesser $r_N = 1.65 \cdot 10^{-15} \text{ m}$). Dies passiert bei der Entstehung von Neutronensternen.

Wir approximieren den Menschen mit reinem Kohlenstoff ($r_C = 1.4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$). Die Kohlenstoffatome würden sich auf dem Neutronenstern in 12 Neutronen verwandeln mit einem Durchmesser von ca. $r'_C = 2.3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

- a) Wir modellieren unseren Körper mit einer Kugel mit einem Durchmesser von 0.5 m . Welchen Durchmesser hätte diese Kugel auf dem Protonenstern?
- b) Welche Masse hätten Sie dort?
- c) Auf der Erde sind wir also wesentlich grösser. Womit sind wir 'gefüllt'? Was bewahrt die Materie unseres Körpers vor dem Kollabieren?



Ernest Rutherford schießt 1911 α -Teilchen¹ auf eine Metallfolie. Er beobachtet, dass die meisten unbeeinflusst durch die Folie α -Teilchen gehen. Einige wenige α -Teilchen werden stark umgelenkt. Er interpretiert die Ergebnisse folgendermassen:

Satz 21.1 Ergebnisse der Experimente von Rutherford

- die Folie besteht im Wesentlichen aus leeren Raum.
- die positive Ladung in der Folie ist auf kleinen Raum konzentriert (Atomkern)
- der Atomkern schliesst 99.9% der Masse des Atoms ein
- die Atome haben einen Radius von ca. 10^{-10} m = 1 Å.

Die Vorstellung, dass Materie aus Atomen besteht, wurde 1900 von den meisten Wissenschaftlern akzeptiert. Mit der Entdeckung des Elektrons begannen die Wissenschaftler, den Aufbau der Atome zu erforschen und damit auch die Elektronenzustände in einem Atom.

Beispiel 21.4 Atommodell von Thomson

3XDGE6

Ein typisches Atommodell von J.J. Thomson aus dem Jahre 1897: Das Atom ist eine Kugel mit homogen verteilter positiver Ladung, in der sich kleine, negativ geladene Elektronen befinden — wie Rosinen in einem Kuchen. J.J. Thomson hat es so vorgeschlagen kurz nachdem er das Elektron entdeckt hatte.



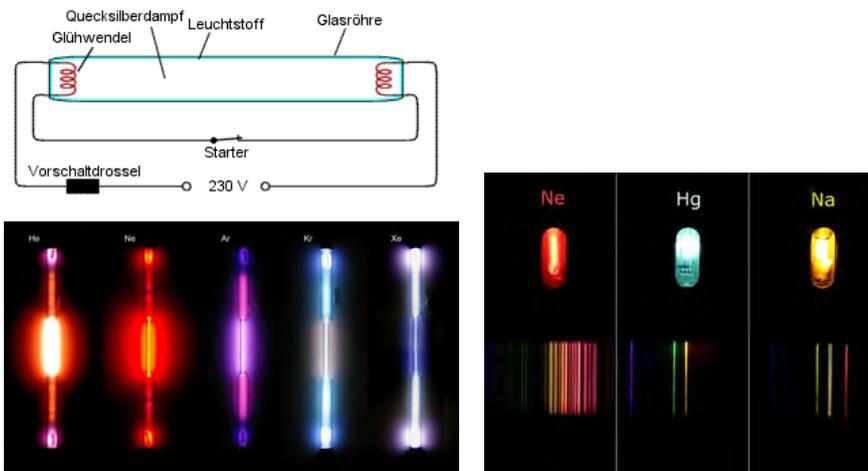
- a) Entwickeln Sie eine Analogie in der makroskopischen Welt: Die α -Teilchen wären dann Geschosse in der Grösse von 1-5 mm. Rutherford schießt auf den abgebildeten Türvorhang? Worauf würde sie Thomson schießen?

Wie würde Rutherfords Experiment ausgehen, wenn das Atommodell von Thomson zutreffen würde?

- a) Wieviele α -Teilchen würden ungehindert durch die Folie gehen?
b) Wieviele α -Teilchen würden etwas abgelenkt?
c) Wieviele α -Teilchen würden reflektiert?

¹Ein α -Teilchen besteht aus 2 Neutronen und 2 Protonen. Es hat die Ladung $+2e$. Es ist der Kern des Helium Atoms.

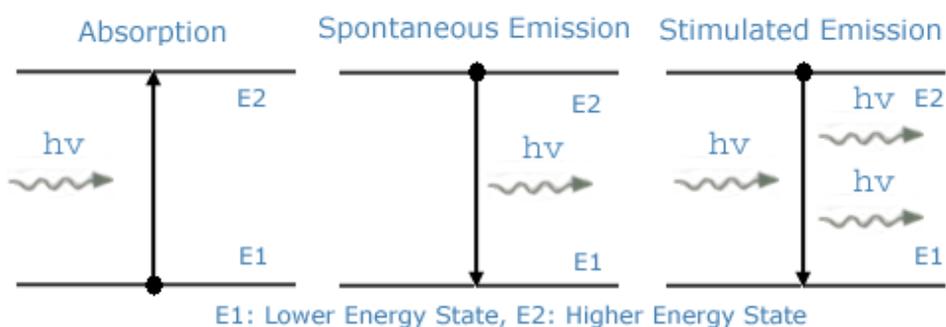
21.2 Spektren



Definition 21.3 Gasentladungsröhre, Lumineszenz

Die Lichtaussendung nach äußerer Anregung wird als **Lumineszenz** bezeichnet, die technische Weiterentwicklung zu Lichtquellen als **Gasentladungsröhre**. Sie eine Anordnung von Kathode und Anode innerhalb einer gasgefüllten Glasröhre, in der es bei Anlegen einer Spannung zu einer Gasentladung mit Aussendung von Licht kommt.

In den Gasen sind die Atom im Mittel so weit voneinander entfernt, dass man annehmen kann, dass das emittierte oder absorbierte Licht von isolierten Atomen stammt.



Satz 21.2 Spektren des Wasserstoff Atoms

J.J. Balmer zeigt 1885, dass die Wellenlänge der vier Linien im sichtbaren Bereich des Wasserstoffspektrums (656.28 nm, 486.13 nm, 434.05 nm, 410.17 nm) die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

mit $n = 3, 4, \dots$ und der Rydberg-Konstante $R = 1.0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Lymann-Serie:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

mit $n = 2, 3, 4 \dots$ Paschen-Serie:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

mit $n = 4, 5, 6 \dots$

21.2.1 Niels Bohrs Atommodell

Satz 21.3 Quantenbedingung (Annahme von Bohr)

Der Drehimpuls $L = m \cdot v \cdot r$ (m Masse, v Geschwindigkeit, r Radius der Kreisbahn) eines Elektrons auf einer Kreisbahn kann nur die diskreten Werte

$$L = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

annehmen, mit $n = 1, 2, 3 \dots$ und h dem Planckschen Wirkungsquantum

$$h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Infobox 21.1 Postulate von Niels Bohr (Auswahl)

- Dem Elektron stehen nicht alle klassisch möglichen Bahnen zur Verfügung, sondern nur eine bestimmte Auswahl. Auf diesen Bahnen erzeugt es keine elektromagnetische Strahlung, sondern behält seine Energie. Dies sind die stationären Zustände des Atoms.
- Das Elektron kann von einem stationären Zustand in einen anderen springen. Dieser als Quantensprung bezeichnete Vorgang liegt ausserhalb des Gültigkeitsbereichs der klassischen Mechanik und der Elektrodynamik.

Bohr berechnet unter diesen Annahmen die Radien der Elektronen-Orbitale in Atomen. Er benutzt dafür die klassische Physik d.h. Coulomb Gesetz²

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(Ze) \cdot e}{r^2}$$

Newtons Axiom

$$F = m \cdot a$$

²Mäder schreibt das Coulomb Gesetz als $F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ mit der Coulomb-Konstante $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

und die Zentrifugalbeschleunigung

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Aus der Quantelung des Drehimpulses erhält man ausserdem $v = \frac{n \cdot h}{2\pi \cdot m r}$.

Beispiel 21.5 Bohr-Radius

Der Bohrradius beträgt

$$a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi e^2 \cdot m} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

dabei sind

- $m = 9.10938188 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ die Masse des Elektrons
- $e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ die Elementarladung
- $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ die elektrische Feldkonstante im Vakuum
- $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ Plancksche Konstante.

a_0 ist Radius des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms ($Z = 1$ und $n = 1$). Leiten Sie a_0 anhand der Überlegungen von Bohr her.

Satz 21.4 Atommodell von Niels Bohr

- Bohrradius $a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
- Grundzustand (Energie) des Wasserstoffatoms

$$E_1 = -13.6057 \text{ eV}$$

mit $1 \text{ eV} = 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

- Energieniveaus von Atomen mit Kernladung Z

$$E_n = - \left(\frac{Z^2 \cdot e^4 \cdot m}{8(\epsilon_0)^2 h^2} \right) \cdot \frac{1}{n^2}$$

$n = 1, 2, 3 \dots$ und ausgewertet für Wasserstoff: $\frac{1^2 \cdot e^4 \cdot m_e}{8(\epsilon_0)^2 h^2} = 1 \text{ Ry} = 13.6057 \text{ eV}$

- Radien der Wasserstoffzustände

$$r_n = n^2 \cdot a_0$$

Beispiel 21.6 Atommodell von Bohr und die Balmer Serie

E13RR8

Für das Wasserstoff-Atom ergeben sich die Energien der Atom-Schalen zu

$$E_n = -\frac{13.6057}{n^2} \text{ eV}$$

Berechnen Sie für den Übergang $E_3 \rightarrow E_2$

- die Energie des emittierten Photons (in eV und in J)
- die Frequenz des Photons $E = h \cdot \nu$
- die Wellenlänge des Photons
- Vergleichen Sie mit der Balmer-Serie $E_3 \rightarrow E_2$

Beispiel 21.7 Schwächen und Widersprüche des Atommodells von Bohr **SHAQHQ**

Die folgenden Fragen weisen auf die Schwierigkeiten des Atommodells von Bohr hin:

- Welche Form hat ein Atom gemäss Bohr, eine Kugel, ein Ellipsoid, eine Scheibe, andere?
- Berechnen Sie die längste Wellenlänge der Paschen-Serie $n = 4$.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

- Vergleichen Sie diese Wellenlänge mit der wichtigen 21-cm-Linie des Wasserstoffs aus der Radioastronomie. Was stellen Sie fest?
- Ein beschleunigtes Elektron und damit auch ein rotierendes Elektron im Atom strahlt Energie ab. Wie geht Bohr mit diesem Problem um?
- Welche Aussagen können mit Hilfe des Atommodells von Bohr für Atome mit mehreren Elektronen und für Bindungen in Molekülen und Festkörpern gemacht werden.
- Bewegt sich das Elektron auf einer definierten oder auf einer ungeordneten Bahn? Wird dabei die Unschärferelation von Heisenberg berücksichtigt oder nicht?

21.2.2 Laser

Beispiel 21.8 Leseauftrag Licht und Laser

84J2YS

Lesen Sie den Text zur Emission von Licht (17.5). Beantworten Sie dann folgende Fragen.

- Wie werden die Elektronen in einer Glühbirne auf hohe Energieniveaus angeregt? Wie geschieht die Anregung in einem Laser?
- Wie entsteht Emission von Photonen in einer Glühbirne? Wie geschieht sie in einem Laser?
- Was ist die Bedingung an die Länge eines Resonators eines Rubinlasers, d.h. wie lang kann er sein?
- Gehen Sie die Anwendungen durch und überlegen Sie, auf welcher der Laser-Eigenschaften die Anwendung basiert: Kohärenz, Frequenz (monochromatisch), Bündelung, Kürze der Laser-Impulse

21.2.3 Oktettregel, Elektronegativität, Metalle und Nichtmetalle

Infobox 21.2 Schalenstruktur der Atome

Übersicht Quantenzahlen (QZ)

Quantenzahl	Zeichen	Wertebereich	Bezeichnung	Beispiele
Haupt-QZ	n	$1, 2, 3, \dots$	K,L,M, \dots	3
Neben-QZ	l	$0, \dots, n-1$	s,p,d	0,1,2
Drehimpuls-QZ	m_l	$-l, \dots, +l$	$s, p_{x,y,z}, d_{yz,xz,xy,z^2,x^2-y^2}$	-2, -1, 0, 1, 2
Spin-QZ	m_s	$-1/2, 1/2$	\uparrow, \downarrow	-1/2, 1/2

- Jeder Schale (entspricht einem E_n im Atommodell von Bohr) kann maximal $z = 2 \cdot n^2$ Elektronen aufnehmen, d.h.
 - $n = 1, z = 2 \cdot 1^2 = 2$ Elektronen
 - $n = 2, z = 2 \cdot 2^2 = 8$ Elektronen
 - $n = 3, z = 2 \cdot 3^2 = 18$ Elektronen
- Wir nennen n die Hauptquantenzahl.
- Jede Schale besitzt eine Unterstruktur, sie wird mit der Nebenquantenzahl l beschrieben. Für jede Schale gibt es mögliche Zustände $l = 0, \dots, n-1$.

Dies ergibt sich aus der Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoff Atom.

Beispiel 21.9 Elektronegativität

P1XQ8T

- a) Wie verhält sich die Energie des Grundzustandes in einem Atom, wenn die Kernladungszahl Z erhöht wird. Betrachten Sie dazu das Atommodell von Bohr.
- b) Welche Voraussagen können Sie für Atome mit 3 Elektronen machen?

Die Endergebnis aus den gegenläufigen Trends von Absenkung der Energie-Niveaus bei höherer Kernladungszahl Z und Anhebung der Energie Elektronenzustandes durch die gegenseitige Abstossung der Elektronen kann kaum abgeschätzt werden.

Wir stellen empirisch fest, dass die Energie des höchsten besetzten Zustandes bei den Elementen verschieden ist und unterscheiden:

Definition 21.4 Metalle und Nicht-Metalle

- **Metalle:** Haben eine Tendenz Elektronen abzugeben (weil die höchsten besetzten Zustände energetisch hoch liegen)
- **Nicht-Metalle:** Haben eine Tendenz Elektronen aufzunehmen (weil die höchsten besetzten Zustände energetisch tief liegen, und noch energetisch tief liegende Niveaus frei sind)

Je nach Bindungspartner entstehen verschiedene Konfigurationen:

Definition 21.5 Bindungstypen

- Metall-Nicht-Metall: **Ionische Bindung (Salze)**. Elektronen gehen vom Metall zu Nicht-Metall über. Dadurch entsteht ein negativ geladenes Ion (Anion) und ein positiv geladene Ion (Kation), die sich durch elektrostatische Kräfte anziehen.
- Metall-Metall: **Metallische Bindung**. Da beide Partner Elektronen eher abgeben wollen, besteht die Bindung aus Elektronen, die über das ganze Volumen verschmiert sind.
- Nicht-Metall-Nicht-Metall: **Kovalente Bindung**. Die Partner nähern sich, so dass sich ihre äussersten Elektronen in einem gemeinsamen Orbital zwischen den Kernen aufhalten können. (gerichtete Bindungen)

Infobox 21.3 Austauschwechselwirkung

Die oben beschriebenen Bindungen werden nur empirisch unterschieden. Die physikalischen Grundlagen sind bei allen gleich. Sie ergeben sie aus der Berechnung der Energiezustände, die typischerweise folgende Beiträge hat:

$$H_{\text{tot}} = H_{\text{at}} + J + K + E_c$$

- H_{at} Energie des isolierten Atoms (Beinhaltet die Wechselwirkung mit dem Atomkern)
- J : Coulomb-Energie, elektrostatische Abstossung der Elektronen
- K : Austauschwechselwirkung (exchange-energy) ist eine künstlich eingeführte Grösse, die sicherstellt, das Pauli-Prinzip eingehalten wird
- E_c : 'correlation-energy' resultiert aus der Dynamik von vielen Elektronen. In einer homogenen Verteilung (z.B. einem Metall) bilden die Elektronen stehende Dichtewellen, wodurch die Coulomb-Abstossung etwas reduziert werden kann.

In *ab initio* Programmen in der physikalischen Chemie und in der Festkörperphysik sind diese Beiträge implementiert und es können alle drei Bindungstypen beschrieben werden, sei es in unendlich ausgedehnten Festkörpern oder in endlichen Molekülen.

In kovalenten Bindungen ist folgende Grösse wichtig:

Definition 21.6 Elektronegativität

Die Elektronegativität ist ein relatives Mass für die Fähigkeit eines Atoms, in einer chemischen Bindung Elektronenpaare an sich zu ziehen.

Die Elektronegativität wird von der Kernladungszahl Z und dem Atomradius bestimmt. Sie führt dazu, dass Moleküle **polar** sind. Je höher der Unterschied in der Elektronegativität der gebundenen Elemente, desto polarer ist die Bindung. Bei grossem Unterschieden der Elektronegativität kann spricht man sogar von 'Ionenbindungscharakter'.

Woher wissen wir, dass die Materie aus positiv geladenen Atomkernen und negativ geladenen Elektronen besteht?

21.2.4 Molekülschwingungen, Phononen und Infrarotspektren

Durch Infrarot-Licht werden Molekülschwingungen angeregt. Die Schwingungsfrequenz ist dabei abhängig von den schwingenden Massen und der Bindungsstärke. Über die Lage der Absorptionsbanden erhält man so eine Information über den Aufbau des Moleküls oder des Festkörpers.

Der klassische Ausdruck für die Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

mit k der Federkonstante in N/m und m der Masse des schwingenden Objekts ist dabei hilfreich.

21.3 Quantenmechanik

Wir haben gesehen, dass Niels Bohr die Quantisierung des Drehimpulses einfach annehmen muss. Dies ist nicht so elegant, weil man in der Physik möglichst wenig annehmen möchte. Es gibt zwar Platz für einige Prinzipien, aber diese sollen möglichst wenige sein. Alle Phänomene sollen aus diesen Phänomenen ableitbar sein. Ein Beispiel für so ein Prinzip ist das 2. Gesetz von Newton: Die Voraussagen daraus, stimmt überein mit vielen Experimenten, das Gesetz $F = \frac{d^2}{dt^2}[x \cdot m]$ lässt sich aber aus nichts herleiten.

Herleitung des Quantisierung

Definition 21.7 Wellen- und Teilchencharakter

- Wellencharakter: Eine Welle ist ausgedehnt (im Prinzip unendlich ausgedehnt). Es zeigt Interferenz, konstruktive und destruktive.
- Teilchencharakter: Ein Objekt hat eine begrenzte Grösse. Es macht keine Interferenz.
- Quantisierung: Eine Grösse (z.B. Energie) tritt diskret auf.

Wie oben erklärt, stört es die Physiker, dass Bohr die Quantisierung des Drehimpulses *annehmen* musste. Wie könnte man eine Quantisierung also herleiten? Folgendes ist die Grundidee: Stehende Wellen haben eine Quantisierung. Zum Beispiel sind auf eingespannten Seilen (Gitarrensaite) oder in Höhlkörpern nur bestimmte stehende Wellen möglich. Sie haben eine charakteristische Wellenlänge. Wenn es also möglich ist zu zeigen, dass Elementarteilchen wie Elektronen (aber auch Protonen, Neutronen, etc) einen Wellencharakter haben, dann liegt es auf der Hand, dass ihre Frequenz und damit auch ihre Energie quantisiert ist.

Im Folgenden zeigen wir den Teilchencharakter von Wellen (Photoeffekt) und danach den Wellencharakter von Teilchen (Doppelspaltexperiment).

Das Resultat der Diskussion wird folgende Gleichung sein:

Satz 21.5 Schrödingergleichung

$$i \cdot \hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \cdot \psi(x, t)$$

Mehr zur Schrödingergleichung hier.

Die Ähnlichkeit zu einer Wellengleichung der klassischen Mechanik ist offensichtlich. Für ein freies Teilchen, d.h. mit $V(x, t) = 0$ haben wir

$$\begin{aligned} \text{Schrödinger-Gleichung:} & \quad -\frac{i \cdot \hbar \cdot m}{\hbar^2} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \\ \text{Wellen-Gleichung:} & \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Es gibt einige berühmte analytisch lösbare Probleme:

- Das freie Teilchen $V = 0$
- Das Teilchen im Potentialtopf ($V = 0$ und feste Randbedingungen)
- Quantenmechanischer Oszillator

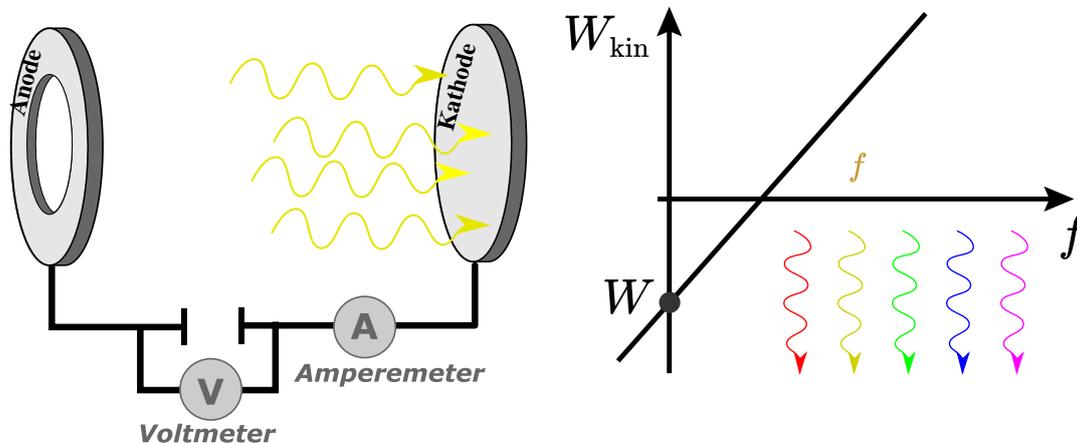
Erwin Schrödinger hat die Gleichung für das Wasserstoff-Atom in drei Dimensionen gelöst. Er erklärt damit auch die Unterstruktur der Schalen in den schwereren Atomen. Das ergibt die Struktur wie in Infobox 21.2 angegeben.

21.3.1 Photoeffekt

Beispiel 21.10 Photoeffekt

7NKWLE

Betrachten Sie das folgende Video und Lesen Sie den Text zum Photoeffekt (Mäder 17.6., S. 271). Video Experiment: <https://www.youtube.com/watch?v=ZnRX0SmTTt0> Im Experiment wird gezeigt, dass die Glasplatte das hochfrequente Licht UV-Licht herausgefiltert, d.h. das verbleibende Licht enthält nur noch tiefe Frequenzen (z.B. rotes Licht), d.h. Licht mit wenig Energie.



- Wieso bedeutet $E = h \cdot f$, dass die Energie nicht in beliebig kleinen Portionen auftritt?
- Was ist eine Ringanode, was ist eine Kathode aus Alkalimetall?
- Wieso steigt der Strom nicht weiter an, wenn man die Spannung erhöht?
- Erläutern Sie die Einstein-Gleichung

$$\underbrace{e \cdot U_0}_{= \frac{1}{2}mv^2} = h \cdot \nu - W_A$$

- Woher bekommen die Elektronen ihre kinetische Energie?
- Welche anderen Faktoren können die Energie der Elektronen beeinflussen (wenn schon nicht die Intensität)?
- Wieso benötigt es überhaupt Energie, ein Elektron aus der Metalloberfläche zu lösen?
- Wie kann mit Hilfe der Einstein-Gleichung das Plancksche Wirkungsquantum h bestimmt werden?
- Erläutern Sie zu den Punkten oben: Was steht im Widerspruch zur klassischen Physik?

Infobox 21.4 Photoeffekt

Der Photoeffekt zeigt, dass eine Überlagerung von elektromagnetischen Wellen zwar die Intensität erhöht, nicht aber die Energie der Welle. Elektromagnetische Wellen bestehen also aus Teilchen (γ -Quanten), die eine unveränderbare Energie übertragen.

$$E = h \cdot f$$

21.3.2 Doppelspalt-Experiment

Definition 21.8 De-Broglie-Wellenlänge

Ein Materieteilchen mit dem Impuls $p = m \cdot v$ hat die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Nach Louis de Broglie. Siehe auch Materiewelle.

Beispiel 21.11 Doppelspalt-Experiment

R7B3FX

Lesen Sie den Text zum Doppelspalt-Experiment (Mäder 17.6., "Dualismus Welle-Teilchen") und beantworten Sie dann folgende Fragen

- Warum ist das Elektron mehr als eine Billardkugel?
- Wie verhält sich ein einzelnes Elektronen an einem Doppelspalt?
- Wie gross ist die de Broglie-Wellenlänge eines Elektrons, das mit $U_B = 2.50 \text{ kV}$ beschleunigt wird? Benutze u.a. $E = \frac{p^2}{2m}$
- Was ist der Welle-Teilchen-Dualismus?
- Wie könnte das Experiment technisch verwertet werden?

Infobox 21.5 Doppelspalt-Experiment

Der Doppelspalt-Experiment zeigt, dass sich auch Teilchen (Elektronen) überlagern können und Interferenzen ausbilden können. Es wird sogar gezeigt, dass sie dies einzeln tun können: Auch wenn Elektron einzeln durch den Spalt gehen, entsteht das selbe Interferenz-Muster, wie wenn man mehrere Elektronen gleichzeitig durch den Doppelspalt durchgehen lässt.

Das Doppelspalt Experiment kann auch so gedeutet werden: Wir betrachten nur die Richtung x senkrecht zur Flugrichtung der Elektronen. Wir interpretieren den

Abstand der Spalte d als die Genauigkeit $d = \Delta x$ mit der die Position der Elektronen beim Experiment gemessen wird.

Wir beobachten, dass das Beugungsmuster breiter wird, wenn d verkleinert wird. Für den Beugungswinkel α des ersten Maximums gilt $\alpha \propto \frac{1}{d}$. Dies bedeutet, dass die Elektronen eine grössere Geschwindigkeit in x -Richtung erhalten, wenn der Spalt schmal ist. Nur so können sie stark abgelenkt werden und ein breites Beugungsmuster erzeugen. Diese Geschwindigkeit in x -Richtung interpretieren wir als Genauigkeit Δp , mit der der Impuls der Elektronen (in x -Richtung) gemessen wird

$$\alpha \approx C_1 \frac{1}{d} \Rightarrow \Delta p = C_2 \frac{1}{\Delta x}$$

oder etwas umgestellt mit der korrekten Konstante $C_2 = \frac{h}{2 \cdot 2\pi}$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2 \cdot 2\pi}$$

d.h. die Genauigkeit bei der Ortsmessung mal die Genauigkeit bei der Impulsmessung sind grösser als eine Konstante. Dies bedeutet, dass Ort und Geschwindigkeit eines Objekts nicht gleichzeitig exakt gemessen werden können. Wäre entweder Δx oder Δp gleich 0, dann hätten wir ja $\Delta x \cdot \Delta p = 0 < \frac{h}{2 \cdot 2\pi}$

Werner Heisenberg [Heisenberg, 1979] hat ein allgemein verständliches Buch publiziert über die philosophischen Konsequenzen aus dem Doppelspalt-Experiment, doch dauert die Diskussion über die Interpretation der Quantenmechanik an. Siehe dazu

- Wigner Friend's
- Hardy's paradox
- ETH Interpretation von Daniela Frauchiger, Renato Renner und anderen.

Literaturverzeichnis

Schulen eduhi. <http://schulen.eduhi.at>. Accessed: 2019-03-25.

Werner Heisenberg. *Quantentheorie und Philosophie*. Reclam, Stuttgart, 1979.

Ruben Mäder and David Kamber. *Physik für die Berufsmaturität*. Hep verlag ag, Bern, 2020.