Serie 3, Musterlösung

Datum: HS 24

1. Gleichung mit Parametern **51ULFW**

Lösen Sie die Gleichungen nach x für die angegebenen Parameterwerte.

(a) $4ax - x \cdot (a-1) = x - 6a^2$ und $a = \left[-15,\ 0.5,\ 20,\ 1000\right]$

(b) $(c+3) \cdot x - 2c(x+1) + 4c(x-1) = 6$ und $c = \left[-5,\ -99,\ 520,\ 1200\right]$

(c) $(t+1)^2 x - t^2 x = t + 1 - x$ und $t = \left[13,\ -97,\ -9997\right]$

(d) $(p+2)(p-3)x + 9 = p(p-1)x - 6p$ und $p = \left[2.5,\ -1.5,\ 98.5\right]$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
4ax - x(a-1) &= x - 6a^2 \\
4ax - xa + 1x - x + 6a^2 &= 0 \\
3ax + 6a^2 &= 0 \\
a(3x + 6a) &= 0 \\
3x + 6a &= 0 \\
x &= -2a
\end{aligned}$$

also

$$x = \left[30,\ -1,\ -40,\ -2000\right]$$

(b)

$$\begin{aligned}
(c+3)x - 2c(x+1) + 4c(x-1) &= 6 \\
cx + 3x - 2cx - 2c + 4cx - 4c &= 6 \\
(c + 3 - 2c + 4c)x &= 6 + 2c + 4c \\
(3c+3)x &= 6c + 6 \\
x &= \frac{6c+6}{3c+3} \\
x &= 2 \quad (\text{für } c \neq -1)
\end{aligned}$$

und deshalb

$$x = \left[2,\ 2,\ 2,\ 2\right]$$

(c)

$$\begin{aligned}
\left((t+1)^2 - t^2\right) x &= t + 1 - x \\
2xt + 2x - t^2x - t - 1 + x &= 0 \\
2xt + 3x - t^2x - t - 1 &= 0 \\
2xt + 3x - t^2x &= t + 1 \\
x(2t + 3 - t^2) &= t + 1 \\
-x(t^2 - 2t - 3) &= t + 1 \\
-x(t-3) \cdot (t+1) &= t + 1 \\
x &= \frac{1}{3-t}
\end{aligned}$$

und deshalb $x = \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10\,000}\right]$

(d)

$$\begin{aligned}
(p+2)(p-3)x + 9 &= p(p-1)x - 6p \\
(p^2 + 2p - 3p - 6)x + 9 - p^2x + px + 6p &= 0 \\
p^2x + 2px - 3px - 6x + 9 - p^2x + px + 6p &= 0 \\
-6x + 9 + 6p &= 0 \\
x &= (9 + 6p)/6 = \frac{3+2p}{2}
\end{aligned}$$

und damit $x = \left[4, 0, 100\right]$

2. Lineare Gleichungen lösen **R7B3FX**

Löse nach x auf

(a) $x + a = 2$

(b) $x + a = 2 \cdot a - 3 \cdot x$

(c) $g \cdot 2 \cdot x - g \cdot 3 \cdot a = g \cdot x + g \cdot a$

(d) $M + x \cdot m + x \cdot a = x \cdot V$

(e) $g \cdot M + x \cdot g \cdot m + x \cdot g \cdot a = x \cdot g \cdot V \cdot r$

Überprüfe die Lösungen

(f) $x + 2a = 10$ und $x = -2a + 10$

(g) $x + a = 3a - 3x$ und $x = \frac{a}{2}$

(h) $x + g \cdot a = g \cdot 3 \cdot a$ mit $x = 2 \cdot a$

(i) $g \cdot M + x \cdot g \cdot m + x \cdot g \cdot a = 0$ mit $x = -\frac{M}{a+m}$

Lösung:

(a) Wir ändern jeweils die Ausdrücke auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auf die selbe weise. Dadurch bleibt das Gleichheitszeichen erhalten.

$$\begin{array}{ccc|c}
x + a & = & 2 & -a \\
x + a - a & = & 2 - a & \\
x & = & 2 - a &
\end{array}$$

(b) Hier ist das erste Zwischen-Ziel, dass man alle Audrücke, die x enthalten nach links bringen und alle anderen Ausdrücke nach rechts

$$\begin{array}{rcl|c} x+a & = & 2\cdot a-3\cdot x & +3x-a \\ x+3x & = & 2a-a & \\ 4x & = & a & :4 \\ x & = & \frac{a}{4} & \end{array}$$

(c) Hier fällt uns auf, dass alle Terme g enthalten als Faktor. Deshalb können wir zuerst durch g teilen:

$$\begin{array}{rcl|c} g\cdot x+g\cdot a & = & g\cdot 2\cdot x-g\cdot 3\cdot a & :g \\ x+a & = & 2\cdot x-3\cdot a & -2x-a \\ x-2x & = & -3\cdot a-a & -2x-a \\ -x & = & -4\cdot a & \cdot(-1) \\ x & = & 4a & \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcl|c} M+x\cdot m+x\cdot a & = & x\cdot V & -M-x\cdot V \\ x\cdot m+x\cdot a-x\cdot V & = & -M & \\ x\cdot\left[m+a-V\right] & = & -M & :[...] \\ x & = & \frac{-M}{m+a-V}=\frac{M}{V-m-a} & \end{array}$$

Sobald mehrere Terme x enthalten und links stehen, können wir x ausklammern. Beim letzten schritt erweitern wir den Bruch mit (-1):

$$\frac{-M\cdot(-1)}{(m+a-V)\cdot(-1)}=\frac{M}{V-m-a}$$

(e)

$$\begin{array}{rcl|c} g\cdot M+x\cdot g\cdot m+x\cdot g\cdot a & = & x\cdot g\cdot V\cdot r & :g \\ M+x\cdot m+x\cdot a & = & x\cdot V\cdot r & -M-x\cdot V\cdot r \\ x\cdot m+x\cdot a-x\cdot V\cdot r & = & -M & \\ x\cdot\left[m+a-V\cdot r\right] & = & -M & :[...] \\ x & = & \frac{-M}{m+a-V\cdot r}=\frac{M}{r\cdot V-m-a} & \end{array}$$

(f) Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{array}{rcl} (-2a+10)+2a & = & 10 \\ -2a+10+2a & = & 10 \\ 10 & = & 10 \end{array}$$

Nach den Vereinfachungen erhalten wir eine wahre Aussagen, also handelt es sich um eine korrekte Lösung.

(g) Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{array}{rcl} \frac{a}{2}+a & = & 3a-3\cdot\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2}+\frac{2a}{2} & = & \frac{6a}{2}-3\cdot\frac{a}{2} \\ \frac{3a}{2} & = & \frac{6a-3a}{2} \\ \frac{3a}{2} & = & \frac{3a}{2} \end{array}$$

Nach den Vereinfachungen erhalten wir eine wahre Aussagen, also handelt es sich um eine korrekte Lösung.

(h)

$$\begin{aligned} 2 \cdot a + g \cdot a &= g \cdot 3 \cdot a \quad | : a \\ 2 + g &= g \cdot 3 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist nicht für alle g korrekt, also handelt es sich bei $x = 2 \cdot a$ nicht um eine Lösung.

(i)

$$\begin{aligned} g \cdot M - \tfrac{M}{a+m} \cdot g \cdot m - \tfrac{M}{a+m} \cdot g \cdot a &= 0 \quad | \quad \cdot (a+m) \\ g \cdot M \cdot (a+m) - M \cdot g \cdot m - M \cdot g \cdot a &= 0 \\ g \cdot M \cdot a + m \cdot g \cdot M - M \cdot g \cdot m - M \cdot g \cdot a &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Nach den Vereinfachungen erhalten wir eine wahre Aussagen, also handelt es sich um eine korrekte Lösung.

3. Gleichung formal lösen **CAAJFL**

Lösen Sie die Gleichungen ohne Diskussion der Spezialfälle.

(a) $2 + a \cdot x^2 = 4a$, löse nach x auf.

(b) $6a \cdot \sqrt{x} = 2a^2 - 1$, löse nach x auf.

(c) $7 + 3a \cdot \sqrt[6]{x} = 21a$, löse nach x auf.

(d) $2 + a \cdot x^2 = 4a \cdot x$, löse nach x auf.

(e) $\frac{t^4}{a+2b+3c} = 1$, löse nach t auf.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} 2 + a \cdot x^2 &= 4a \quad | \quad -2 \\ a \cdot x^2 &= 4a - 2 \quad | \quad : a \\ x^2 &= \tfrac{4a-2}{a} \quad | \quad \sqrt{\dots} \\ \underbrace{\sqrt{x^2}}_{=x} &= \pm \tfrac{4a-2}{a} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 6a \cdot \sqrt{x} &= 2a^2 - 1 \quad | \quad : 6a \\ \sqrt{x} &= 2a^2 - 1 \quad | \quad : (\dots)^2 \\ \underbrace{(\sqrt{x})^2}_{=x} &= (2a^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 7 + 3a \cdot \sqrt[6]{x} &= 21a \quad | \quad -7 \\ 3a \cdot \sqrt[6]{x} &= 21a - 7 \quad | \quad : 3a \\ \sqrt[6]{x} &= \tfrac{21a-7}{3a} \quad | \quad (\dots)^6 \\ x &= \left(\tfrac{21a-7}{3a}\right)^6 \end{aligned}$$

(d) $2 + a \cdot x^2 = 4a \cdot x$ ist eine quadratische Gleichung. Sie lässt sich in Normalform bringen

$$a \cdot x^2 - 4a \cdot x + 2 = 0$$

und dann mit den bekannten Methoden (z.B. Mitternachformel oder Faktorisieren) lösen.

$$x_{1;2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 2a}}{a}$$

(e) $t = \sqrt[4]{a + 2b + 3c}$.

4. Diskussion Sonderfälle **K8ULWU**

Löse nach x auf. Welche Umformungsschritte können problematisch sein. Diskutieren Sie die Sonderfälle.

(a) $8 + 4a \cdot x = 4a^2 \cdot x$

(b) $6a \cdot x = 2a^2 - 1 \cdot x$

(c) $7 - 5a \cdot x = a^2 \cdot x$

Lösung:

(a) Wir lösen auf

$$\begin{array}{rcll} 8 + 4a \cdot x &=& 4a^2 \cdot x & \mid \quad -4a \cdot x \\ 8 &=& 4a^2 \cdot x - 4a \cdot x & \\ 8 &=& x \cdot (4a^2 - 4a) & \mid \; : (4a^2 - 4a) \\ \frac{8}{4a \cdot (a-1)} &=& x & \end{array}$$

Die kritische Operation ist $: (4a^2 - 4a)$. Wann ist die Klammer Null?

$$4a^2 - 4a \quad = \quad 0$$

mit den Lösungen $a = 0$ und $a = 1$. Wir setzen die beiden Fälle in die urspüngliche Gleichung ein $a = 0$:

$$8 + 0 = 0$$

das ist eine falsche Aussage, und wir erhalten in diesem Fall keine Lösung. Dann setzen wir $a = 1$ in die urspüngliche Gleichung ein

$$8 + 4 \cdot x = 4 \cdot x \quad \Rightarrow \quad 8 = 0$$

das ist wieder eine falsche Aussage, und wir erhalten in diesem Fall keine Lösung. Deshalb ist die Lösungsmenge

$$x = \frac{2}{4a \cdot (a-2)} \text{ für } a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

(b) Wir lösen auf

$$\begin{array}{rcll} 6a \cdot x &=& 2a^2 - 1 \cdot x & \mid \quad +x \\ 6a \cdot x + x &=& 2a^2 & \\ x \cdot (6a + 1) &=& 2a^2 & \mid \; : (6a + 1) \\ x &=& \frac{2a^2}{6a+1} & \end{array}$$

Wir erhalten keine Lösung, falls $a = -1/6$, also

$$x = \frac{2a^2}{6a + 1} \text{ für } a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{6}\}$$

(c) Wir lösen auf

$$\begin{array}{ccccc} 7-5a\cdot x & = & a^2\cdot x & \mid & +5a\cdot x \\ 7 & = & a^2\cdot x+5a\cdot x & & \\ 7 & = & x\cdot(a^2+5a) & \mid & :(...) \\ \frac{7}{a\cdot(a+5)} & = & x & & \end{array}$$

Wir erhalten keine Lösung, falls $a=0$ oder $a=-5$, also

$$x=\frac{7}{a\cdot(a+5)} \text{ für } a\in\mathbb{R}\setminus\{-5,0\}$$