Serie 4, Musterlösung

Datum: HS 24

1. Wichtige Funktionen **AAAFV6**

(a) Welche der Graphen unten stellen Funktionen dar?

(b) Lösen Sie die Ausdrücke nach y auf.

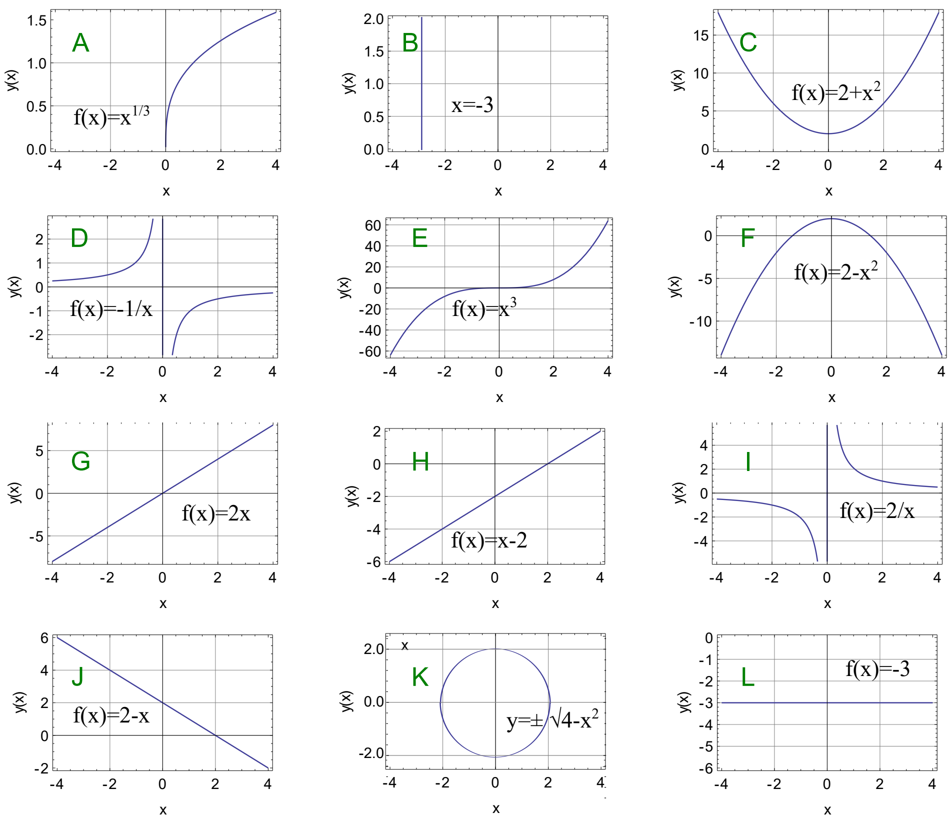
(c) Zu welchem Graphen gehören die Ausdrücke?

Lösung:

Die Terme nach y aufgelöst lauten

$$\begin{array}{ccccc}
y & = & 2x \Rightarrow & f(x) & = 2x \\
y & = & -3 \Rightarrow & f(x) & = -3 \\
x-y & = & 2 \Rightarrow & f(x) & = x-2 \\
x^2+y^2 & = & 4 \Rightarrow & y & = \pm\sqrt{4-x^2} \\
y & = & 2-x \Rightarrow & f(x) & = 2-x \\
y & = & x^2+2 \Rightarrow & f(x) & = x^2+2 \\
y^3 & = & x \Rightarrow & f(x) & = \sqrt[3]{x} \\
y & = & \frac{2}{x} \Rightarrow & f(x) & = \frac{2}{x} \\
x^2+y & = & 2 \Rightarrow & f(x) & = 2-x^2
\end{array}$$

Mit der Ausnahme von $y = \pm\sqrt{4-x^2}$ sind es alles Funktionen.



2. Vertikale Verschiebung **AEU6T**

(a) Ergänzen Sie die Tabelle und skizzieren Sie die Graphen.

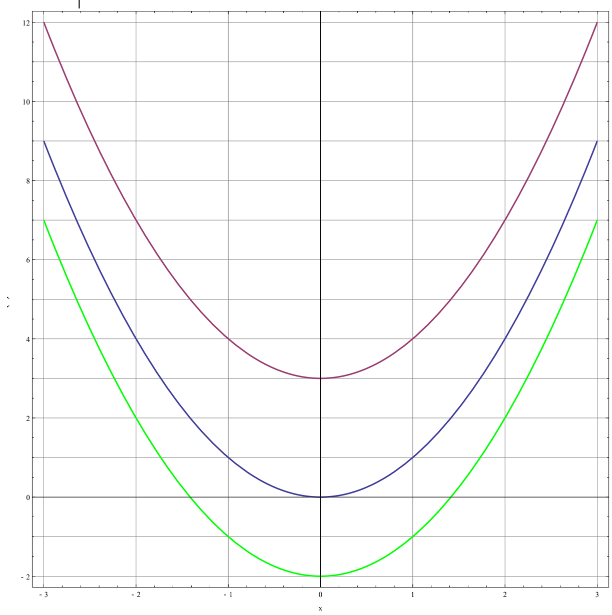
(b) Was ändert sich zwischen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$? Die Form? Die Position? Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

(c) Was ist der vertikale Abstand der Graphen?

(d) Wie verschiebt sich also der Graph der Funktion $f(x)$, wenn wir die Transformation $y = f(x) + k$ oder $y = f(x) - k$ mit $k > 0$ anwenden?

Lösung:

x	$f(x) = x^2$	$g(x)x^2 - 3$	$h(x)x^2 + 2$
-4	16	13	18
-3	9	6	11
-2	4	1	6
-1	1	-2	3
0	0	-3	2
1	1	-2	3
2	4	1	6
3	9	6	11
4	16	13	18



(a) Tabelle und Plot.

(b) Zwischen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ ändert nur die Position, nicht aber die Form.

(c) Der vertikale Abstand ist

$$\Delta = f(x) - g(x) = 3 \text{ und } \Delta' = f(x) - h(x) = -2$$

Am Rande der Zeichnung scheinen sich die Graphen vertikal zu nähern. Dies ist eine optische Täuschung. Das können wir belegten, indem wir an festen Stellen die Funktionswerte berechnen, und miteinander vergleihen. Bei $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ g(0) &= -3 \;\Rightarrow\; f(0) - g(0) = 3 \end{aligned}$$

Bei $x = 4$:

$$\begin{aligned} f(4) &= 16 \\ g(4) &= 13 \;\Rightarrow\; f(0) - g(0) = 3 \end{aligned}$$

(d) Der Graph der Funktion $f(x)$ verschiebt sich nach oben (positive y-Richtung), wenn wir die Transformation $y = f(x) + k$ $(k > 0)$ anwenden und nach unten bei $y = f(x) - k$.

3. Horizontale Verschiebung: Parabel **2RSKP9**

Wir betrachten die Parabel $f(x) = x^2$. Sie hat bei $(x, y) = (0, 0)$ einen Scheitelpunkt.

(a) Ergänzen Sie die Tabelle.

(b) Skizzieren Sie unten die Graphen.

(c) Wo befindet sich der Scheitelpunkt bei der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$?

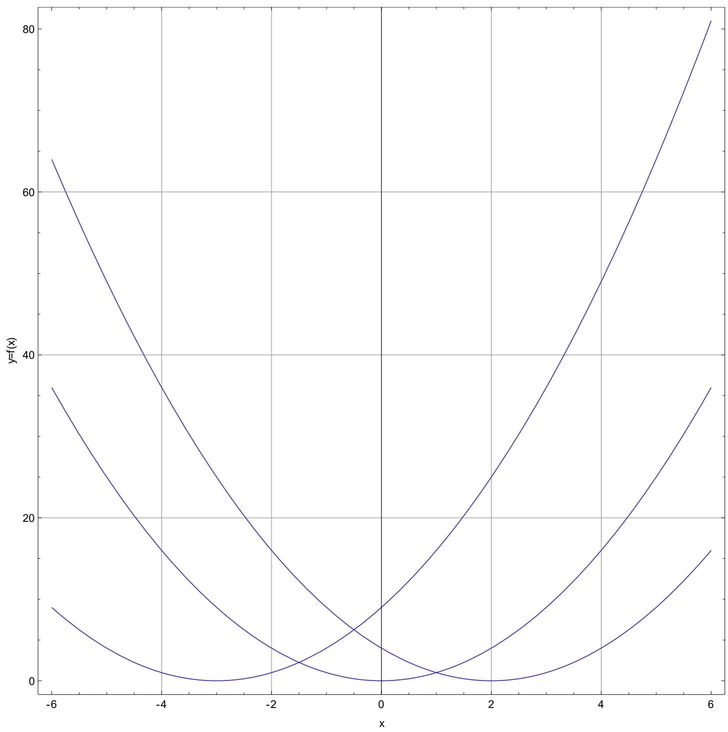
(d) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = (x - c)^2$ ihren Scheitelpunkt? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Verschiebung in Richtung ...'.

(e) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x + 3)$ für x den Wert -3 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert $\ldots$ einsetze."
- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x + 3)$ jetzt bei -3 so, wie ursprüngliche Funktion bei $\ldots$ war."

Lösung:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = f(x+3) = (x+3)^2$	$h(x) = f(x-2) = (x-2)^2$
-4	16	1	36
-3	9	0	25
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0
3	9	36	1
4	16	49	4



(a) Tabelle

(b) Plot

(c) Der Scheitelpunkt der Funktion $g(x)$ liegt bei $x = -3$ und $y = 0$, der Scheitelpunkt der Funktion $h(x)$ liegt bei $x = 2$ und $y = 0$.

(d) Die Funktion $f(x) = (x - c)^2$ hat ihren Scheitelpunkt bei $x = c$ und $y = 0$. Wir stellen fest, dass Transformation $f(x - c)$ eine Verschiebung des Graphen in x-Richtung bewirkt. Ansonsten bleiben die Funktionswerte unverändert.

(e) Ergänzungen:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x + 3)$ für x den Wert -3 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert 0 einsetze."
- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x + 3)$ jetzt bei -3 so, wie ursprüngliche Funktion bei 0 war."