# Serie 5, Musterlösung

Datum: FS 21

## 1. Exponential- und Logarithmusform QJHYJP

Schreiben Sie in Exponentialform

(a) $\log_3(81) = 4$

(b) $\log_{13}(13) = 1$

(c) $\log_{1/2}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$

(d) $\log_3(1) = 0$

**Lösung:**

(a) $3^4 = 81$

(b) $13^1 = 13$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

(d) $3^0 = 1$

## 2. Logarithmen im Kopf N9ZYFL

Werten Sie die Logarithmen aus, ohne elektronische Hilfsmittel.

(a) $\log_2(8)$

(b) $\log_3(1)$

(c) $\log_4(16)$

(d) $\log_{16}(4)$

(e) $\log_7\left(\frac{1}{7}\right)$

(f) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$

(g) $\log_5(1)$

(h) $\log_9\left(\frac{1}{81}\right)$

**Lösung:**

(a) $\log_2(8) = 3$
Erklärung: $2^3 = 8$.

(b) $\log_3(1) = 0$
Erklärung: $3^0 = 1$.

(c) $\log_4(16) = 2$
Erklärung: $4^2 = 16$.

(d) $\log_{16}(4) = \frac{1}{2}$
Erklärung: $16^{1/2} = 4$ und $\sqrt{16} = 4$.

(e) $\log_7\left(\frac{1}{7}\right) = -1$
Erklärung: $7^{-1} = \frac{1}{7}$.

(f) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$
Erklärung: $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

(g) $\log_5(1) = 0$
Erklärung: $5^0 = 1$.

(h) $\log_9\left(\frac{1}{81}\right) = -2$
Erklärung: $9^{-2} = \frac{1}{81}$, und $9^2 = 81$.

## 3. Auswerten 68UD5D

Geben Sie die Werte an, ohne elektronische Hilfsmittel.

(a) $\log_4(4)$

(b) $\log_7(7^3)$

(c) $\log_{25}(5^3)$

(d) $16^{\log_4(8)}$

**Lösung:**

(a) $\log_4(4) = 1$
Erklärung: $4^1 = 4$.

(b) $\log_7(7^3) = 3 \cdot \underbrace{\log_7(7)}_{=1} = 3$

(c) $\log_{25}(5^3) = \log_{25}\left(25^{3/2}\right) = \frac{3}{2}$
Erklärung: $5^3 = 5^{2\cdot 3/2} = (5^2)^{3/2} = 25^{3/2}$.

(d) $16^{\log_4(8)} = 16^{\log_4\left(4^{3/2}\right)} = 16^{3/2} = 64$
Erklärung: $\log_4(8) = \log_4(2^3) = \log_4\left(2^{2\cdot 3/2}\right) = \log_4\left(4^{3/2}\right)$

## 4. Gleichungen gemischt **6KFD16**

Lösen Sie nach $x$ auf. Wo führt Sie die die Logarithmus-Funktion zum Ziel?

(a) $x^2 - 2 = 12$

(b) $4^x = 5^{x+1}$

(c) $\sqrt{1-x} = 2$

(d) $\sqrt{1-x} = \sqrt{10x}$

(e) $3^{2x+1} = 2^{x-2}$

(f) $\frac{10}{1+x^{-2}} = 2$

(g) $\frac{10}{1+3^{-x}} = 2$

(h) $x^2 - x - 12 = 0$

(i) $5^{2x} - 5^x - 12 = 0$

**Lösung:**

(a)

$$\begin{array}{rcll} x^2 - 2 &=& 12 & \mid \; +2 \\ x^2 &=& 14 & \mid \; \sqrt{\ldots} \\ x &=& \pm\sqrt{14} \approx 3.742 & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcll} 4^x &=& 5^{x+1} & \mid \; \log_1 0(\ldots)) \\ \log_{10}(4^x) &=& \log_{10}(5^{x+1}) & \\ x \cdot \log_{10}(4) &=& (x+1)\cdot\log_{10}(5) & \mid \; -x\cdot\log_{10}(5) \\ x \cdot \big(\log_{10}(4) - \log_{10}(5)\big) &=& \cdot\log_{10}(5) & \mid \; :(\ldots) \\ x &=& \frac{\log(5)}{\log_{10}(4)-\log_{10}(5)} \approx -7.21 & \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{1-x} &=& 2 & \mid \; \ldots^2 \\ 1-x &=& 2^2 & \mid \; -1 \\ -x &=& 3 & \mid \; \cdot(-1) \\ x &=& -3 & \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{ccc|c} \sqrt{1-x} & = & \sqrt{10x} & \ldots^2 \\ 1-x & = & 10x & +x \\ 1 & = & 11x & :11 \\ x & = & \frac{1}{11} & \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{ccc|c} 3^{2x+1} & = & 2^{x-2} & \log_{10}(\ldots) \\ \log_{10}(3^{2x+1}) & = & \log_{10}(2^{x-2}) & \\ (2x+1)\cdot\log_{10}(3) & = & (x-2)\cdot\log_{10}(2) & -x\cdot\log_{10}(2)-\log_{10}(3) \\ x\cdot\left[2\log_{10}(3)-\log_{10}(2)\right] & = & -\log_{10}(3)-2\cdot\log_{10}(2) & :[\ldots] \\ x & = & \frac{-\log_{10}(3)-2\cdot\log_{10}(2)}{2\log_{10}(3)-\log_{10}(2)} & \\ x & = & \frac{\log_{10}(3)+2\cdot\log_{10}(2)}{\log_{10}(2)-2\log_{10}(3)}\approx -1.652 & \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{10}{1+x^{-2}} & = & 2 & \cdot(1+x^{-2}) \\ 10 & = & 2+2x^{-2} & -2 \\ 8 & = & 2x^{-2} & :2 \\ 4 & = & x^{-2} & (\ldots)^{-1/2} \\ x & = & 4^{-1/2}=\frac{1}{2} & \end{array}$$

(g)

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{10}{1+3^{-x}} & = & 2 & \cdot(1+3^{-x}) \\ 10 & = & 2+2\cdot 3^{-x} & \cdot-2 \\ 8 & = & 2\cdot 3^{-x} & \cdot:2 \\ 4 & = & 3^{-x} & \log_{10}(\ldots) \\ \log_{10}(4) & = & \log_{10}(3^{-x}) & \\ \log_{10}(4) & = & -x\log_{10}(3) & :(-\log_{10}(3)) \\ x & = & -\frac{\log_{10}(4)}{\log_{10}(3)}\approx -1.262 & \end{array}$$

(h)

$$x^2-x-12=0$$

Die Mitternachtsformel ergibt

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}$$

d.h

$$x=4 \text{ oder } x=-3$$

(i) Die Gleichung kann auch in der Form $(5^x)^2-5^x-12=0$ geschreiben werden. Wir substituieren $u=5^x$:

$$u^2-u-12=0$$

Die quadratische Gleichung ergibt $u=4$ oder $u=-3$. Da $5^x>0$, ist $u=4$ die einzige sinnvolle Lösung. Wir resubstituieren

$$4=5^x \;\Rightarrow\; x=\frac{\log_{10}(4)}{\log_{10}(5)}\approx 0.861$$

**5. Sparen** **32VZQ9**

15 000 CHF werden auf einem Konto angelegt, das 5% Zinsen pro Jahr abwirft. Die Zinsen werden jährlich abgerechnet.

(a) Wieviel ist das Konto nach 1 Jahr wert?

(b) Wieviel ist das Konto nach 2 Jahren wert?

(c) Wieviel ist das Konto nach $n$ Jahren wert?

(d) Nach wie vielen Jahren wird das Konto mehr als 100 000 CHF wert sein.

**Lösung:**

(a) Nach 1 Jahr

$$K_1 = 15\,000 \cdot (1 + 0.05) = 15\,750 \text{ CHF}$$

(b) Nach 2 Jahren

$$K_2 = 15\,000 \times (1 + 0.05)^2 = 15\,000 \times 1.05^2 = 16\,537.50 \text{ CHF}$$

(c) nach $n$ Jahren

$$K_n = 15\,000 \times (1 + 0.05)^n = 15\,000 \times 1.05^n$$

(d) Wert mehr als 100 000 CHF:

$$\begin{array}{ccccc}
15\,000 \cdot 1.05^n & = & 100\,000 & | & :15\,000 \\
1.05^n & = & \frac{100}{15} & | & \log_{10}(\ldots) \\
\log_{10}(1.05^n) & = & \log_{10}(\frac{100}{15}) & & \\
n \cdot \log_{10}(1.05) & = & \log_{10}(\frac{100}{15}) & | & :\log_{10}(1.05) \\
n & = & \frac{\log_{10}(\frac{100}{15})}{\log_{10}(1.05)} \approx 38.86 & &
\end{array}$$

Also wird das Konto nach 39 Jahren mehr als 100 000 CHF wert sein.

**6. Sparen 2** **XUBBUY**

8 000 CHF werden auf einem Konto angelegt, das 6% Zinsen pro Jahr abwirft. Nach wie Jahren wird das Konto mehr als 15 000 CHF wert sein, wenn die Zinsen monatlich abgerechnet werden?

**Lösung:**

Wert nach $n$ Monaten

$$K_n = 8\,000 \times (1 + 0.06)^n = 8\,000 \times 1.06^n$$

$$\begin{array}{ccccc}
8\,000 \cdot 1.06^n & = & 15\,000 & | & :15\,000 \\
\ldots & & & & \\
n & = & \frac{\log_{10}(\frac{15}{8})}{\log_{10}(1.06)} \approx 125.8 & &
\end{array}$$

Also wird das Konto nach 125.8 Monaten, d.h. ca. 11 Jahren mehr als 15 000 CHF wert sein.

## 7. Bakterien **8DHCQL**

Eine Bakterienkultur beginnt mit 1 000 Bakterien und die Anzahl verdoppelt sich alle 40 Minuten.

(a) Finden Sie eine Formel für die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t (wir messen $t$ in Minuten).

(b) Ermitteln Sie damit die Anzahl der Bakterien nach einer Stunde.

(c) Nach wie vielen Minuten werden es 50 000 Bakterien sein?

**Lösung:**

(a) Formel ($t$ in Minuten):

$$N(t) = 1000 \cdot 2^{t/40}$$

Kontrolle: $N(0) = 1000$ und $N(40) = 2000$ und

(b) Nach nach einer Stunde

$$N(60) = 1000 \cdot 2^{60/40} \approx 2828$$

(c) 50 000 Bakterien: Wir lösen die Gleichung

$$50\,000 = 1000 \cdot 2^{t/40}$$

und erhalten $t \approx 225.75$ min, d.h. nach ungefähr 3h 46 min.

## 8. Haare **11IXUR**

Ab dem Alter von 40 Jahren verliert ein durchschnittlicher Mann jedes Jahr 5% seiner Haare. In welchem Alter muss ein durchschnittlicher Mann damit rechnen, nur noch die Hälfte seiner Haare zu haben?

**Lösung:**

Formel ($t$ in Jahren, $N_0$ ist die Anzahl der Haare im Alter von 40 Jahren):

$$N(t) = N_0 \cdot (1 - 0.05)^t$$

Die Hälfte der Haare hat man, wenn $(1-0.05)^t = 0.5$. Wir lösen nach $t$ und erhalten $t \approx 13.5134$. Dh. im Alter von $M = 40 + t = 40 + 14 = 54$ Jahren muss 'Mann' damit rechnen, dass man nur die Hälfte der Haare hat.