Serie 1, Musterlösung

Datum: HS 23

1. Definitionsbereich

UYCEH3

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Gleichung

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

(c) Setzen Sie die Lösung in die Gleichung ein.

Lösung:

(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(b) $x = 2$

(c) $4 - 1 = 3$, d.h. es ergibt eine wahre Aussage.

2. Gleichungen lösen

(a) $7x - (4 - 2x) = 12 - (3x - 3) - 19$

(b) $2x + \frac{3x-2}{4} = 4 + \frac{2x+3}{7}$

(c) $\frac{6x-3}{x} = 5$

(d) $\frac{3x-4}{8x+3} = \frac{2}{19}$

Lösung:

(a) $x = 0$

(b) $x = 2$

(c) $x = 3$

(d) $x = 2$

3. Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungen. Benützen Sie die Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

nur falls es keine anderen Lösungswege gibt.

(a) $4x^2 - 9 = 0$

(b) $x^2 - 2x = 0$

und

(c) $4x^2 - 121 = 0$

(d) $11x^2 - 9x = 0$

(e) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(f) $4x^2 + 12x - 3 = 0$

(g) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Lösung:

(a) $4x^2 - 9 = 0$, $x^2 \frac{9}{4}$. Wir ziehen die Wurzel $x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$.

(b) $x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$. Es bleibt $x - 2 = 0$, also $x_2 = 2$.

(c) $4x^2 - 121 = 0$, $x^2 \frac{121}{4}$. Wir ziehen die Wurzel $x_{1,2} = \pm\frac{11}{2}$.

(d) $11x^2 - 9x = 0$, $x_1 = 0$. Es bleibt $11x - 9 = 0$, also $x_2 = 9/11$.

(e) $x^2 - 4x + 5 = 0$, Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2}$. Unter der Wurzel steht eine negative Zahl, also hat die Gleichung keine (reelle) Lösung.

(f) $4x^2 + 12x - 3 = 0$, Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{8} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

(g) $4x^2 - 4x + 1 = 0$, Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{8} = 1/2$$

4. Faktorisieren Sie

(a) $10x - 15y$

(b) $7 + 21a$

(c) $36x^2y^3 + 24x^3y^2$

(d) $4y^4 - 4y^2$

(e) $a^2 + 2ab + b^2$

(f) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

(g) $x - y - x^2 + 2xy - y^2$

(h) $d^2 + 8d + 15$

Lösung:

(a) $10x - 15y = 5 \cdot (2x - 3y)$

(b) $7 + 21a = 7 \cdot (1 + 3a)$

(c) $36x^2y^3 + 24x^3y^2 = 12x^2y^2 \cdot (3y + 2x)$

(d) $4y^4 - 4y^2 4y^2 \cdot (y^2 - 1) = 4y^2(y + 1)(y - 1)$

(e) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

(f) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

(g) $x - y - x^2 + 2xy - y^2 = x - y - (x^2 - 2xy + y^2) = x - y - (x - y)^2 = (x - y) \cdot (1 - (x - y)) = (x - y) \cdot (1 - x + y) =$

(h) $d^2 + 8d + 15 = (d + 3) \cdot (d + 5)$

5. Addition von Brüchen

(a) $\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$ (b) $\frac{a}{a^2-5a+4} - \frac{a+4}{a^2+3a-4}$

Lösung:

(a) $\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} = \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$. Erweitern und addieren

$$\frac{1}{x^2-4} - \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1-(x+2)+(x-2)}{x^2-4} = \frac{-3}{x^2-4}$$

(b) Nenner Faktorisieren: $\frac{a}{(a-4)\cdot(a-1)} - \frac{a+4}{(a-1)\cdot(a+4)}$. Wir kürzen und addieren:

$$\frac{a}{(a-4)\cdot(a-1)} - \frac{1}{(a-1)} = \frac{a-(a-4)}{(a-4)\cdot(a-1)} = \frac{4}{(a-4)\cdot(a-1)}$$

6. Faktorisieren und Subtituieren

(a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

(b) $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$

(c) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$

(d) $x^4 - 32x^2 - 144 = 0$

Lösung:

(a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$, $x_1 = 0$. Es bleibt $x^2 + x - 6 = 0$ oder $(x-2)\cdot(x+3) = 0$ mit den Lösungen $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$.

(b) Wir setzen $u = x^2$ und erhalten $u^2 - 40u + 144 = 0$ mit den Lösungen $u_{1;2} = 4; 36$. Jetzt lösen wir $u = x^2$ auf nach $x = \pm\sqrt{u}$. So ergeben sich die Lösungen $x_{1;2} = \pm 2$ und $x_{3;4} = \pm 6$.

(c) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$, $x_1 = 0$. Es bleibt $x^2 - 2x - 3 = 0$ oder $(x-3)\cdot(x+1) = 0$ mit den Lösungen $x_2 = 3$ und $x_3 = -1$.

(d) Wir setzen $u = x^2$ und erhalten $u^2 - 32u - 144 = 0$ mit den Lösungen $u_{1;2} = -4; 36$. Jetzt lösen wir $u = x^2$ auf nach $x = \pm\sqrt{u}$. So ergeben sich die Lösungen $x_{1;2} = \pm 6$. Aus -4 kann keine Wurzel gezogen werden. Deshalb gibt es hier nur zwei (reelle) Lösungen.

7. Quadratische Ungleichungen

Vorgehen: A) Gleichung Lösen B) Intervalle auf Zahlenachse bestimmen. Sie werden begrenzt durch Lösungen der Gleichung und durch Grenzen und Lücken des Definitionsbereichs der Ungleichung C) Für jeder Intervall untersuchen, ob es in der Lösungsmenge liegt anhand *eines* Zahlenbeispiels.

(a) $x^2 - 9 > 0$

(b) $x^2 - x - 6 > 0$

(c) $3 - 4x - 4x^2 \geq 0$

(d) $4x^2 + 4x - 3 \leq 0$

(e) $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-1} < 1$

Lösung:

(a) $x^2 - 9 = 0$, $x_{1,2} = \pm 3$, $L = \mathbb{R} \setminus [-3, 3]$

(b) $x^2 - x - 6 = 0$, $x_{1;2} = -2; 3$, $L = \mathbb{R} \setminus [-2, 3]$

(c) $3 - 4x - 4x^2 = 0$, $x_{1;2} = -3/2; 1/2$, $L = [-3/2, 1/2]$

(d) $4x^2 + 4x - 3 = 0$, $x_{1;2} = -3/2; 1/2$, $L = \mathbb{R} \setminus]-3/2, 1/2[$

(e) $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-1} = 1$; Achtung, die linke Seite hat Definitionslücken bei $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$. Wir lösen

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-1} = 1 \;\Rightarrow\; x_3 = 2; x_4 = 5$$

Wir definieren $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-1}$ und berechnen

$$f(0) = -7/3,\; f(1.001) = 1999.5,\; f(2.001) = 0.997001$$

Also ist die Lösungsmenge $L = \mathbb{R} \setminus]1, 2[\setminus]3, 5[$