Serie 4, Funktionen und Ableitungen

Datum: HS 23

Definition Stetigkeit einer reellen Funktionen:
Sei $f(x)$ eine reelle Funktion — also $f(x) \in \mathbb{R}$ — deren Definitionsbereich ebenfalls aus reellen Zahlen besteht. Dann ist sie stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \, .$$

1. Definitionslücken **5VKVFG**

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \, .$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) f ist überall stetig.

(b) f besitzt eine oder mehrere Definitionslücken.

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

(d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

2. Definitionslücke **32LGL6**

Wir betrachten die Funktion

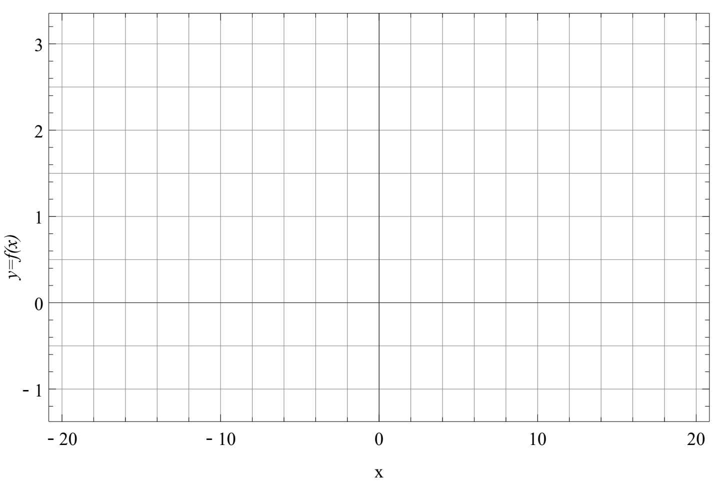
$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} \, .$$

(a) Wo weist die Funktion Definitionslücken auf?

(b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion bei den Definitionslücken x_0, d.h. berechnen Sie für $\delta > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} f(x_0 + \delta) \quad \text{und} \quad \lim_{\delta\to 0} f(x_0 - \delta) \, .$$

(c) Skizzieren Sie die Funktion.



3. Rand des Definitionsbereichs **HLLIHK**

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x} \,.$$

(a) Wo weist die Funktion Definitionslücken auf?

(b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion am Rand des Definitionsbereichs, d.h. berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ und } \lim_{x\to-\infty} f(x) \,.$$

4. Ableitungen **LQ3A6K**

Berechnen Sie die Ableitungen und werten Sie die Ableitung an den angegebenen Stellen aus.

(a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$, $x_0 = -2$

(b) $f(x) = \frac{x^3}{\tan(x)}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) $f(x) = \big[\cos(x) - \sin(x)\big] \cdot e^x$, $x_0 = 0$

(d) $f(x) = 2e^x \cdot \arcsin(x)$, $x_0 = 1/2$

5. 2. Ableitung **5A7SAG**

Bestimmen Sie die zweite Ableitung. Tipp: zuerst vereinfachen.

(a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(b) $f(x) = \frac{1+x-x^3}{x^2}$

6. Tangenten **57Z1FW**

Wir betrachten die Funktion

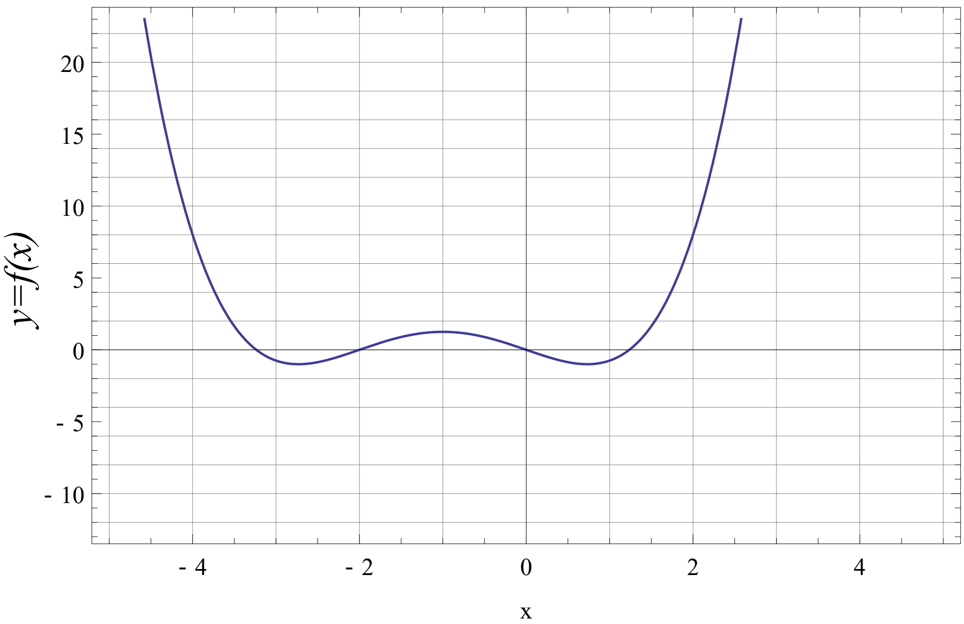
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x \,.$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangenten $f(x) = m \cdot (x - x_0) + y_0$ an die Kurve bei

(a) $x_1 = 1$

(b) $x_2 = -2$

(c) $x_3 = -1$


20
15
10
5
0
- 5
- 10
y=f(x)
- 4
- 2
0
2
4
x