Serie 4, Musterlösung

Datum: HS 23

Definition Stetigkeit einer reellen Funktionen:
Sei $f(x)$ eine reelle Funktion — also $f(x) \in \mathbb{R}$ — deren Definitionsbereich ebenfalls aus reellen Zahlen besteht. Dann ist sie stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \; .$$

1. Definitionslücken **5VKVFG**

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \; .$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) f ist überall stetig.

(b) f besitzt eine oder mehrere Definitionslücken.

(c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

(d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

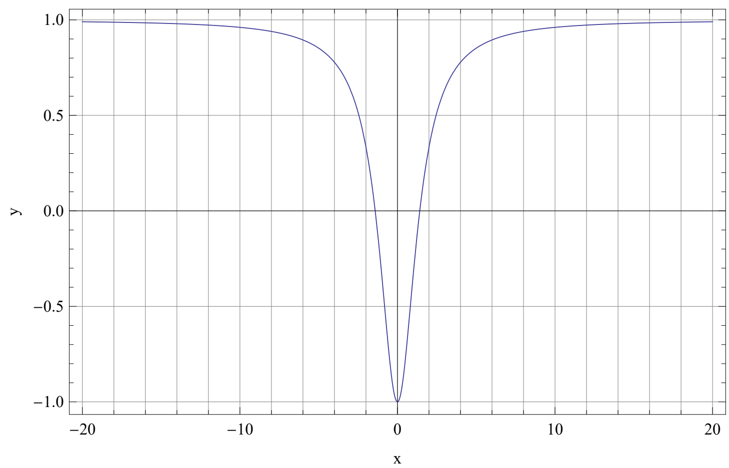
Lösung:

(a) Korrekt: f ist überall stetig.

(b) Falsch: f besitzt eine oder mehrere Definitionslücken.

(c) Falsch: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

(d) Korrekt: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$



2. Definitionslücke **32LGL6**

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 3} \; .$$

(a) Wo weist die Funktion Definitionslücken auf?

(b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion bei den Definitionslücken x_0, d.h. berechnen Sie für $\delta > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} f(x_0 + \delta) \quad \text{und} \quad \lim_{\delta \to 0} f(x_0 - \delta) \, .$$

(c) Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung:

(a) Definitionslücke $x_0 = 3$.

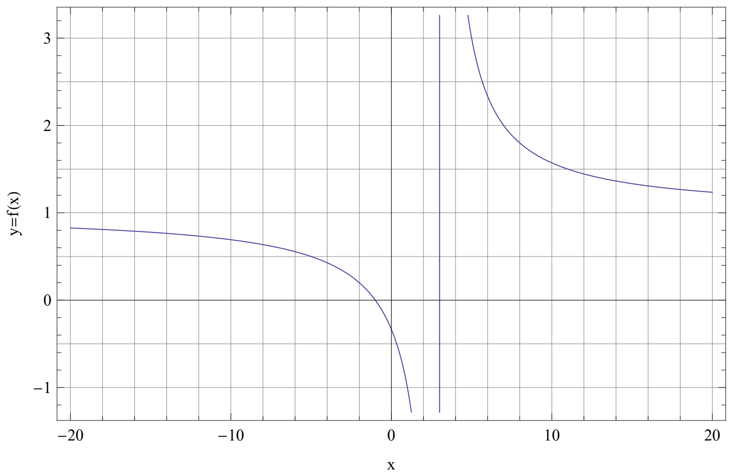
(b) Verhalten bei $x \to 3$. Rechts:

$$\frac{3+\delta+1}{3+\delta-3} = \frac{3}{\delta} + 1 + \frac{1}{\delta} \to \infty \quad (\delta \to 0)$$

Links:

$$\frac{3-\delta+1}{3-\delta-3} = -\frac{3}{\delta} + 1 - \frac{1}{\delta} \to -\infty \quad (\delta \to 0)$$

Wir finden eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.



3. Rand des Definitionsbereichs **HLLIHK**

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x} \, .$$

(a) Wo weist die Funktion Definitionslücken auf?

(b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion am Rand des Definitionsbereichs, d.h. berechnen Sie

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \text{ und } \lim_{x \to -\infty} f(x) \, .$$

Lösung:

(a) Es gibt keine Definitionslücken.

(b) Rand des Definitionsbereichs, Die Funktions-Werte von $\sin(x)$ liegen im Intervall $[-1; 1]$. Deshalb können wir die Funktion abschätzen:

$$|\sin(x) \cdot e^{-x}| \leq e^{-x} \to 0 \quad (x \to \infty)\ .$$

Für $x \to -\infty$ gibt es kein Abschätzung. e^{-x} wird dort immer grösser und der Faktor $\sin(x)$ lässt die Funktion oszillieren.

4. Ableitungen LQ3A6K

Berechnen Sie die Ableitungen und werten Sie die Ableitung an den angegebenen Stellen aus.

(a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$, $x_0 = -2$

(b) $f(x) = \frac{x^3}{\tan(x)}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) $f(x) = \big[\cos(x) - \sin(x)\big] \cdot e^x$, $x_0 = 0$

(d) $f(x) = 2e^x \cdot \arcsin(x)$, $x_0 = 1/2$

Lösung:

(a) $f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$, $f'(-2) = 0$

(b) $f'(x) = \frac{3x^2\tan(x) - x^3[1+\tan^2(x)]}{\tan^2(x)} = x^2\,(3\cot(x) - x\csc^2(x))$, $f'(\pi/4) = \frac{3\pi^2}{16} - \frac{\pi^3}{32}$

(c) $f'(x) = -2e^x\sin(x)$, $f'(0) = 0$

(d) $f'(x) = 2e^x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin(x)\right)$, $f'(1/2) = 2\sqrt{e}(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6})$

5. 2. Ableitung 5A7SAG

Bestimmen Sie die zweite Ableitung. Tipp: zuerst vereinfachen.

(a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(b) $f(x) = \frac{1+x-x^3}{x^2}$

Lösung:

(a) Vereinfachen: $f(x) = \tan(x)$. Ableiten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ f''(x) &= \frac{0 - 2\cos^1(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^4(x)} = \frac{2\cdot\sin(x)}{\cos^3(x)} \end{aligned}$$

(b) Vereinfachen: $f(x) = \frac{1+x-x^3}{x^2} = x^{-2} + x^{-1} - x$. Ableiten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - x^{-2} - 2x^{-3} \\ f''(x) &= 2x^{-3} + 6x^{-4} \end{aligned}$$

6. Tangenten **57Z1FW**

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x \ .$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangenten $f(x) = m \cdot (x - x_0) + y_0$ an die Kurve bei

(a) $x_1 = 1$

(b) $x_2 = -2$

(c) $x_3 = -1$

Lösung:

Ableiten

$$f'(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \ .$$

(a) $f(1) = -\frac{3}{4}$ und $f'(1) = 2$, also

$$g_1(x) = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2) - \frac{3}{4} = 2x - \frac{11}{4} \ .$$

(b) $f(-2) = 0$ und $f'(-2) = 2$, also

$$g_2(x) = 2 \cdot (x + 2) + 0 = 2x + 4$$

(c) $f(-1) = \frac{5}{4}$ und $f'(-1) = 0$, also

$$g_3(x) = 0 \cdot (x + 1) + \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$