Serie 5, Musterlösung

Datum: HS 23

---

1. Parabel, kubische Funktion NZSAFK

Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = (x-2)^2 - 3,\ g(x) = (x-2)^3 - 3$$

Berechnen Sie

(a) die Nullstellen

(b) die Extrema

(c) das Verhalten am Rand des Definitionsbereichs und

(d) skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

Lösung:

(a) Nullstellen $f(x)$:

$$f(x) = (x-2)^2 - 3 = 0 \to x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$g(x)$:

$$g(x) = (x-2)^3 - 3 = 0 \to x_1 = 2 + \sqrt[3]{3}$$

(b) Für die Extrema brauchen wir die Ableitungen:

$$f'(x) = 2(-2+x),\ g'(x) = 3(-2+x)^2$$

Für $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Das ist ein Minimum, weil $f(x)$ nach oben geöffnet ist. Für $g(x)$:

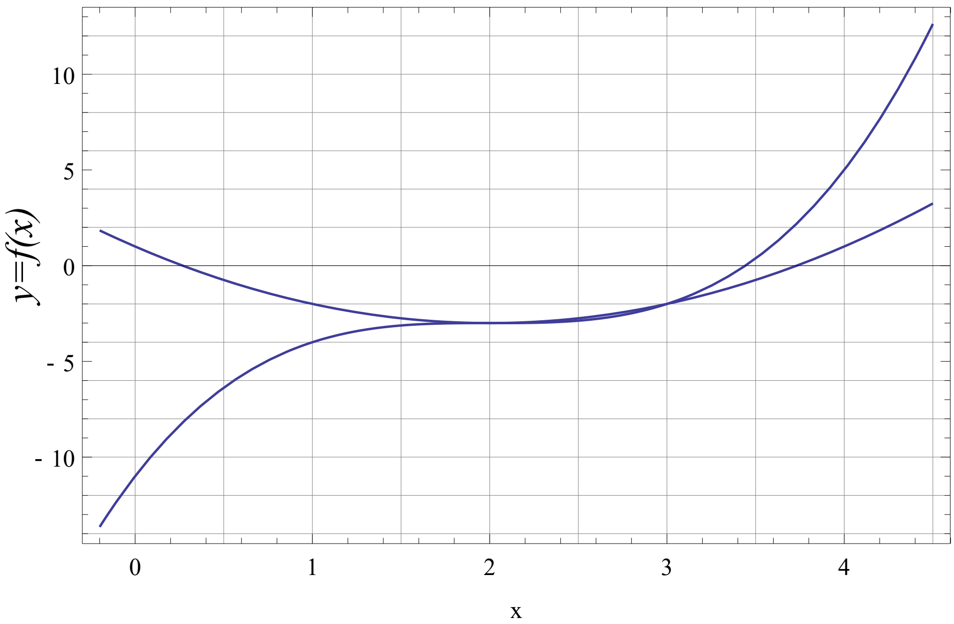
$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Wir berechnen $g''(x) = 6(-2+x)$ und $g''(x) = 0$. Deshalb ist also ein Sattelpunkt.

(c) Für $x \to \pm\infty$ divergiert $f(x) \to \infty$. Für $|x|$ gross gilt $g(x) \approx x^3$ und also

$$g(x) \to \infty\ (x \to \infty) \text{ und } g(x) \to -\infty\ (x \to -\infty)$$

(d) Skizze



2. Schnittpunkte **F7VFVI**

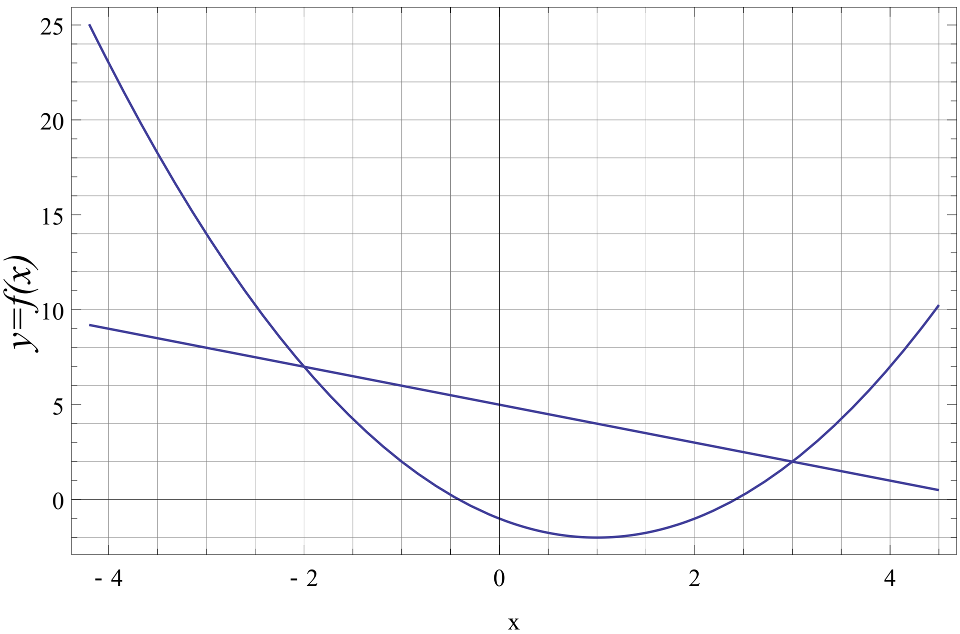
Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 2x - 1,\ g(x) = -x + 5$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen.

(b) Berechnen Sie die Schnittpunkte.

Lösung:



(a) Skizze.

(b) Schnittpunkte aus

$$x^2 - 2x - 1 = -x + 5 \;\Rightarrow\; -1 - 2x + x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -2; 3$$

also $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Monotonie 1 UEMJXV

Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = 3x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.

(b) Welches sind die Extrema der Funktion

(c) Gibt es Intervalle, in denen die Funktion nur zunimmt?

(d) Gibt es Intervalle, in denen die Funktion nur fällt?

Lösung:

(a) Berechnen Sie die Ableitungen

$$f'(x) = 3 - 4x - 4x^2,\; f''(x) = -4 - 8x$$

(b) Extrema bei $f'(x) = 0$, also $x_1 = -\frac{3}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$

(c) Wir untersuchen $f'(x)$ in den Intervallen $x \in]\infty, -\frac{3}{2}[$, $x \in]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$ und $x \in]\frac{1}{2}, \infty[$. Es genügt einen Wert auszurechnen: Da wir die Nullstellen von $f'(x)$ kennen und $f(x)$ stetig ist, wird $f'(x)$ zwischen den Nullstellen stets das selbe Vorzeichen haben.

$$\begin{aligned} f'(-1000) &= -3995997 \\ f'(0) &= 3 \\ f'(1) &= -5 \end{aligned}$$

Also ist $f(x)$ für $x \in]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$ monoton steigend.

(d) Für $x \in]\infty, -\frac{3}{2}[$ und $x \in]\frac{1}{2}, \infty[$ ist $f(x)$ monoton fallend.

4. Monotonie 2 XGDZVV

Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}\;.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$

(b) Gibt es Intervalle, in denen die Funktion monoton ist, fallend oder steigend?

Lösung:

(a) Ableitungen

$$f'(x) = e^x \frac{x^2 - 2x}{x^4}$$

(b) Die Nullstellen von $f'(x)$ sind bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 2$.
Wir untersuchen $f'(x)$ in den Intervallen $x \in]\infty, 0[$, $x \in]0, 2[$ und $x \in]2, \infty[$.
Es genügt einen Wert auszurechnen:

$$\begin{array}{ccc} f'(-1) & > & 0 \\ f'(1) & < & 0 \\ f'(10) & > & 0 \end{array}$$

Also ist $f(x)$ für $x \in] -\infty, 0[$ monoton wachsend, $x \in]0, 2[$ monoton fallend und für $x \in]2, \infty[$ monoton wachsend.