Serie 6, Musterlösung

Datum: HS 23

1. Differentialgleichung **JDEI4Z**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die Funktion soll in $A = (1,1)$ einen Wendepunkt haben und im Ursprung die Steigung $m = -1$. Bestimmen Sie a, b, c und d.

Lösung:

(a) Wir berechnen die Ableitungen

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 3a\,x^2 + 2b\,x + c \\ f''(x) & = & 6a\,x + 2b \end{array}$$

(b) Im Ursprung Steigung $m = -1$:

$$\left| \begin{array}{rcr} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & -1 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{rcr} d & = & 0 \\ c & = & -1 \end{array} \right|$$

(c) Wendepunkt bei $A = (1,1)$:

$$\left| \begin{array}{rcr} f(1) & = & 1 \\ f''(1) & = & 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccr} a + b - 1 + 0 & = & 1 \\ 6 + 2b & = & 0 \end{array} \right|$$

Also $b = 3$ und $a = -1$

(d) Also $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x$

2. Harmonischer Oszillator **HJH4QD**

$$m \cdot f''(t) = -k \cdot f(t)$$

(a) Wir betrachten $f(t) = 3 \cdot \sin(2 \cdot t + 7)$. Berechnen Sie $f'(t)$ und $f''(t)$

(b) Falls $f(t)$ die Positions des Teilchens beschreibt. Wie berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Position des Teilchens?

(c) Setzen Sie $f(t)$ und $f''(t)$ in den Ausdruck oben ein mit $k = 20$ und $m = 5$. Was beobachten Sie?

(d) Wir betrachten $f(t) = A \cdot \sin(w \cdot t + \varphi)$. Berechnen Sie $f'(t)$ und $f''(t)$

(e) Setzen Sie $f(t)$ und $f''(t)$ in den Ausdruck oben ein. Welche Bedingungen müssen A, w und φ erfüllen, damit die Differentialgleichung erfüllt ist?

texttifoLösung:

(a) Ableitungen

$$f'(t) = 3 \cdot 2\cos(2 \cdot t + 7) \quad f''(t) = -3 \cdot 2^2 \sin(2 \cdot t + 7)$$

(b) Einsetzen :

$$-5 \cdot 3 \cdot 2^2 \sin(2 \cdot t + 7) = -3 \cdot 20 \cdot \sin(2 \cdot t + 7)$$

Das ist eine wahre Aussage, also löst $f(x)$ die Differnetialgleichung mit diesen Parametern.

(c) Wir betrachten $f(t) = a \cdot \sin(w \cdot t + f)$. Berechnen Sie $f'(t)$ und $f''(t)$ Ableitungen

$$f'(t) = A \cdot w\cos(w \cdot t + f) \quad f''(t) = -A \cdot w^2 \sin(w \cdot t + f)$$

(d) $f'(t)$ ist die Geschwindigkeit und $f''(t)$ die Beschleunigung des Teilchens.

(e) Einsetzen

$$-m \cdot A \cdot w^2 \sin(w \cdot t + 7) = -A \cdot k \cdot \sin(w \cdot t + f)$$

Wir teilen auf beiden Seiten durch $-A\sin(w \cdot t + 7)$, und erhalten

$$m \cdot w^2 = k$$

So sehen wir, dass die DGL erfüllt ist, falls $w = \sqrt{k/m}$. Für A und f gibt es keine Bedingungen, die erfüllt sien müssen.

3. Stammfunktion **DPKKJH**

Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, die

$$F(9) = 7$$

erfüllt. **Lösung:**

Eine Stammfunktion ist $F(x) = \sqrt{x} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Die Integrationskonstante ergibt sich aus

$$F(9) = \sqrt{9} + C = 7$$

also $C = 4$ und $F(x) = \sqrt{x} + 4$.

4. Unbestimmte Integrale **54A5ZF**

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$

(b) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$

Lösung:

(a) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx = \int e^x - \frac{1}{x^2} dx = e^x + \frac{1}{x} + C$

(b) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx = \int x + 2x^{-2} + x^{-3} dx = \frac{x}{2} + 2\ln(x) - \frac{1}{2x^2} + C$

5. Bestimmte Integrale **QP75EV**

Berechnen Sie folgende Integrale. Nutzen Sie dazu auch allfällige Symmetrien der Funktionen aus.

(a) $\int_2^3 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^3}\right)\, dx$

(b) $\int_0^2 \left(x^2 - x^4\right)\, dx$

(c) $\int_{-2}^2 \left(x^2 - x^4\right)\, dx$

(d) $\int_0^2 \left(x - x^3\right)\, dx$

(e) $\int_{-2}^2 \left(x - x^3\right)\, dx$

(f) $\int_0^2 \left(x^4 - x^5\right)\, dx$

(g) $\int_{-2}^2 \left(x^4 - x^5\right)\, dx$

(h) $\int_0^2 \cos(x)\, dx$

(i) $\int_{-2}^2 \cos(x)\, dx$

(j) $\int_0^2 \sin(2\,x)\, dx$

(k) $\int_{-2}^2 \sin(2\,x)\, dx$

Lösung:

(a) $\int_2^3 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^3}\right)\, dx = -\frac{41}{216}$

(b) $\int_0^2 \left(x^2 - x^4\right)\, dx = -\frac{56}{15}$

(c) $\int_{-2}^2 \left(x^2 - x^4\right)\, dx = -\frac{112}{15}$ (gerade Funktion)

(d) $\int_0^2 \left(x - x^3\right)\, dx - 2$

(e) $\int_{-2}^2 \left(x - x^3\right)\, dx = 0$ (ungerade Funktion)

(f) $\int_0^2 \left(x^4 - x^5\right)\, dx = -\frac{64}{15}$

(g) $\int_{-2}^2 \left(x^4 - x^5\right)\, dx = \frac{64}{5}$ (keine Symmetrie)

(h) $\int_0^2 \cos(x)\, dx = \sin(2)$

(i) $\int_{-2}^2 \cos(x)\, dx = 2\,\sin(2)$

(j) $\int_0^2 \sin(2\,x)\, dx = 2\sin^2(1) \approx 1.41615$

(k) $\int_{-2}^2 \sin(2\,x)\, dx = 0$ (ungerade Funktion)