



Serie 1, Wo liegt die Grenze? – Konvergenz

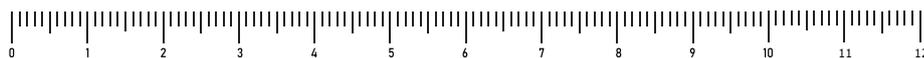
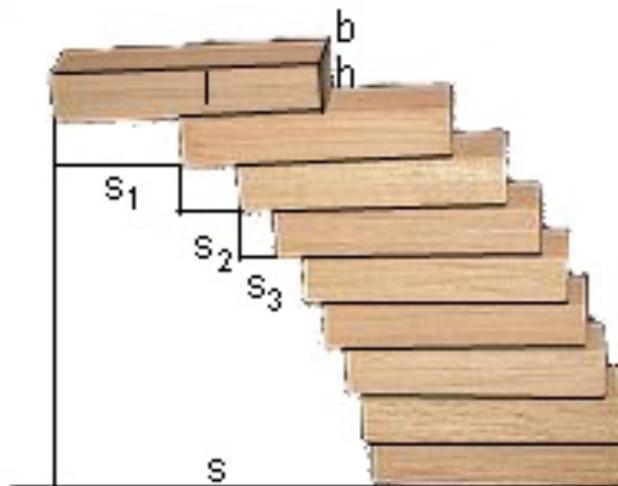
Klasse: 1Info

Datum: HS 24

1. Rekord

Nehmen Sie 5 Holzquader und stapeln Sie die Quader übereinander. Wie gross ist der maximale Überhang s ?

Übrigens: Die Frage, wie weit homogene Holzquader in eine Richtung verschoben werden können, sodass dieser Turm nicht zusammenbricht, ist mehr als ein Jahrhundert alt.



2. Gezielt bauen

- Betrachten Sie noch einmal den Stapel mit 5 Holzquader. Stapeln Sie die Quader übereinander und verschieben Sie den oberen Quader so weit in Längsrichtung, dass er möglichst weit über den unteren ragt.
- Schieben Sie dann die *zwei* obersten Quader so weit, dass der Turm gerade nicht zusammenbricht.
- Wiederholen Sie diesen Verschiebevorgang mit den weiteren Quadern, Stufe um Stufe.
- Wie gross ist der maximale Überhang?

3. Berechnung

Füllen Sie die Tabelle unten aus. Gehen Sie davon aus, dass Sie den idealen Turm aufbauen, d.h. Sie verschieben die obersten Quader immer so weit, dass der Turm gerade nicht zusammenbricht.

Benutzen Sie als Längeneinheit, die Länge eines Klotzes l .

Tipp: Haben wir mehrere Massen $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots$ an den Orten $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$, so ist der Schwerpunkt (Massemittelpunkt) bei

$$x = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3 + x_4 \cdot m_4}{M}$$

mit $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

j : Anz. Klötze	Lage Schwerpunkt $[l]$	Vorschub Klotz j $[l]$	Vorschub total $[l]$
1	1/2	1/2	1/2
2			
3			
4			
5			

4. Vorschub bei vielen Klötzchen

- Welches ist der grösste mögliche Vorschub für 10, 100, 1000, 1 Mio. Klötze?
- Ist der maximale Vorschub begrenzt, falls die Anzahl Klötze nicht begrenzt ist?

Benutzen Sie auch

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots + 1/N \approx \ln(N) + 0.57$$

5. Schokoladetafel

Wir betrachten eine Tafel Schokolade (total 24 Stückchen = 6 Reihen à 4 Stückchen). Wir essen zunächst die Hälfte davon und legen den Rest in den Schrank zurück.

- Wieviel Schokolade können wir so essen, wenn wir zum 5. Mal hinter den Schrank gehen?
- Wieviel Schokolade bleibt danach noch übrig?
- Wie oft können wir Schokolade essen, bis nichts mehr übrig bleibt?
- Wieviel Schokolade können wir maximal essen, wenn wir beliebig oft (100, 1000 oder sogar 1 000 000 000) hinter den Schrank gehen?

j : Schritt	im Schrank	konsumiert
1	24	12
2		
3		
4		
5		

6. Weiterführung

- Analysieren Sie, wie sich die Gesamtverschiebestrecke s der Quader verändert, wenn konstant jeder Quader jeweils um $1/3$ bzw. um $1/4$ hinausgeschoben wird.
- Untersuchen Sie auch, wie sich die Situation ändert, wenn kreisförmige Holz-scheibchen verwendet werden.
- Schliesslich, analysieren Sie, welche Auswirkungen das Hinzufügen von “Gegengewichten” oder beliebigen Aufbauten auf den Turm hat.

Weiterführende Literatur:

- Pöppe, C. (2010): Türme aus Bauklötzen – Mathematische Unterhaltungen, Spektrum der Wissenschaft, September 2010, S. 64
- Paterson, M., Peres, Y., Thorup, M., Winkler, P., Zwick, U. (2008): Maximum Overhang, arXiv.org, Cornell University Library, <http://arxiv.org/pdf/0707.0093v1.pdf>