Serie 1, Musterlösung

Klasse: 1Info Datum: HS 24

1. Rekord

Nehmen Sie 5 Holzquader und stapeln Sie die Quader übereinander. Wie gross ist der maximale Überhang s?
Übrigens: Die Frage, wie weit homogene Holzquader in eine Richtung verschoben werden konnen, sodass dieser Turm nicht zusammenbricht, ist mehr als ein Jahrhundert alt.

Lösung:
Wie wir unten sehen, ist bei 5 Quadern ist der maximale Überhang $s = \frac{137}{120} \cdot l \approx 13.47\,\text{cm}$ für die Quaderlänge $l = 11.8$ cm. Der Überhang ist grösser als die Länge eines Quaders! Für 10 Quader

$$s \approx 1.46448 \cdot l = 1.46448 \cdot 118\,\text{mm} \approx 17.3\,\text{cm}$$

2. Gezielt bauen

(a) Betrachten Sie noch einmal den Stapel mit 5 Holzquader. Stapeln Sie die Quader übereinander und verschieben Sie den oberen Quader so weit in Längsrichtung, dass er möglichst weit über den unteren ragt.

(b) Schieben Sie dann die *zwei* obersten Quader so weit, dass der Turm gerade nicht zusammenbricht.

(c) Wiederholen Sie diesen Verschiebevorgang mit den weiteren Quadern, Stufe um Stufe.

(d) Wie gross ist der maximale Überhang?

Lösung:
Siehe oben.

3. Berechnung

Füllen Sie die Tabelle unten aus. Gehen Sie davon aus, dass Sie den idealen Turm aufbauen, d.h. Sie verschieben die obersten Quader immer so weit, dass der Turm gerade nicht zusammenbricht.
Benutzen Sie als Längeneinheit, die Länge eines Klotzes l.
Tipp: Haben wir meherere Massen $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots$ an den Orten $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$, so ist der Schwerpunkt (Massemittelpunkt) bei

$$x = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3 + x_4 \cdot m_4}{M}$$

mit $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

Lösung:

j: Anz.	Lage Schwerpkt [l]	Vorschung Klotz j [l]	Vorschub total [l]
1	1/2	1/2	1/2
2	(0+1/2)/2	1/4	1/2+1/4=3/4
3	(0+1/2)/3	1/6	1/2+1/4+1/6=11/12
4	(0+1/2)/4	1/8	1/2+1/4+1/6+1/8=25/24 ¿1
5	(0+1/2)/4	1/10	1/2+1/4+1/6+1/8+1/10= 137/120

4. Vorschub bei vielen Klötzchen

(a) Welches ist der grösste mögliche Vorschub für 10, 100, 1000, 1 Mio. Klötze?

(b) Ist der maximale Vorschub begrenzt, falls die Anzahl Klötze nicht begrenzt ist?

Benutzen Sie auch

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \ldots + 1/N \approx \ln(N) + 0.57$$

Lösung:

(a) Grösste mögliche Vorschub

j: Anz. Klötze	Vorschub total [l]
10	1.46448
100	2.59369
1000	3.74274
10^6	7.19636

(b) Nein, er ist nicht begrenzt. Dies sieht man auch anhand folgender Ausdrücke:

$$s = 1/2 \cdot (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \ldots + 1/N) \approx 1/2(\ln(N) + 0.57)$$

Hier kann ein beliebiger Vorschub s eingesetzt werden und dann nach N aufgelöst werden, d.h. zu jeden beliebigen Vorschub erhalten wir die Anzahl nötige Klötze.

5. Schokoladetafel

Wir betrachten eine Tafel Schokolade (total 24 Stückchen = 6 Reihen à 4 Stückchen). Wir essen zunächst die Hilfte davon und legen den Rest in den Schrank zurück.

(a) Wieviel Schokolade können wir so essen, wenn wir zum 5. Mal hinter den Schrank gehen?

(b) Wieviel Schokolade bleibt danach noch übrig?

(c) Wie oft können wir Schokolade essen, bis nichts mehr übrig bleibt?

(d) Wieviel Schokoade können wir maximal essen, wenn wir beliebig oft (100, 1000 oder sogar 1 000 000 000) hinter den Schrank gehen?

Lösung:

j: Schritt	im Schrank	konsumiert
1	24	12
2	12	6
3	6	3
4	3	1.5
5	1.5	0.75

(a) Wir essen insgesamt (nach dem 5. Mal Öffnen): 23.25 Stücke.

(b) Übrig bleiben 0.75 Stücke.

(c) Wir können beliebig oft Schokolade essen. Etwas bleibt immer übrig.

(d) Maximal können wir 24 Stücke essen.

6. Weiterführung

(a) Analysieren Sie, wie sich die Gesamtverschiebestrecke s der Quader verändert, wenn konstant jeder Quader jeweils um 1/3 hinausgeschoben wird.

(b) Untersuchen Sie auch, wie sich die Situation ändert, wenn kreisförmige Holzscheibchen verwendet werden.

(c) Schliesslich, analysieren Sie, welche Auswirkungen das Hinzufügen von "Gegengewichten" oder beliebigen Aufbauten auf den Turm hat.

Lösung:

(a) Wir erhalten wieder unbegrenzt lange Brücken, doch ist diese Konstruktion nicht stabil.

(b) Alles, was oben gesagt wurde, kann auf kreisförmige Holzscheibchen übertragen werden. Wir nähern dafür die Länge der Quader l mit dem Durchmesser der Holzscheiben.

(c) "Gegengewichten" können die Reichweite nicht erhöhen, Verstrebungen — wie Schrauben oder Kleber — hingegen schon.

Weiterführende Literatur:

- Pöppe, C. (2010): Türme aus Bauklötzen – Mathematische Unterhaltungen, Spektrum der Wissenschaft, September 2010, S. 64
- Paterson, M., Peres, Y., Thorup, M., Winkler, P., Zwick, U. (2008): Maximum Overhang, arXiv.org, Cornell University Library, http://arxiv.org/pdf/0707.0093v1.pdf