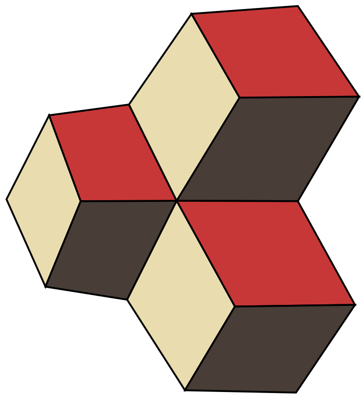
Lineare Algebra 1



Dr. D. Adams

Institut für Mathematik und Naturwissenschaften (IMN)

donat.adams@fhnw.ch

Büro: 5.1C01

Zürich, 1. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vektoren

KAPITEL 1

Eliminationsverfahren I

1.1 Eliminationsverfahren von Gauss I

Definition Linearkombination

Eine **Linearkombination** der Objekte $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ ist die Summe

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$

Die Linearkombination lässt sich auch mit dem Summenzeichen schreiben. Für N Vektoren schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\vec{a}_i \,.$$

Definition Lineare Abhängigkeit

Die Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ heisst **linear abhängig** genau dann, wenn die Gleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

eine Lösung besitzt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen der Koeffizienten.

[**?**, Bd. 1 II 2.4] [**?**, 3.3.2, p.429]

Beispiel 1.1 Gauss-Eliminationsverfahren 893982

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 30 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

Lösung:

Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{array}{ccccc} & & x & y & z \\ \hline \vec{a} & = (& 1 & 5 & 1) \\ \vec{b} & = (& 2 & 8 & 3) \\ \vec{c} & = (& 4 & 30 & -1) \end{array}$$

Die x-, y- und z-Komponenten stehen jetzt jeweils in einer Spalte untereinander. Indem wir nun die x-Komponente bei allen Vektoren eliminieren, entstehen zwei Vektoren, die schon keine x-Komponente haben (und deshalb etwas mehr dem gewünschten Endresultat $\vec{0}$ gleichen):

$$\begin{array}{rl} \vec{a} & = (1 \quad 5 \quad 1) \\ \vec{b}' = \vec{b} - 2\vec{a} & = (0 \quad -2 \quad 1) \\ \vec{c}' = \vec{c} - 4\vec{a} & = (0 \quad 10 \quad -5) \end{array}$$

Mit den neuen Vektoren, führen wir das selbe Verfahren durch, um einen Vektor ohne y-Komponente zu erhalten:

$$\begin{array}{rl} \vec{a} & = (1 \quad 5 \quad 1) \\ \vec{b}' & = (0 \quad -2 \quad 1) \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 5\vec{b}' & = (0 \quad 0 \quad 0) \end{array}$$

D.h. es ist also gelungen $\vec{0}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen. Die Vektoren sind also linear abhängig.
Die Linearkombination ist

$$\vec{c}'' = \vec{c}' + 5\vec{b}' = (\vec{c} - 4\vec{a}) + 5(\vec{b} - 2\vec{a}) = -14\vec{a} + 5\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass beim ersten Schritt, die erste Zeile nicht verändert wird. Beim zweiten Schritt wird die zweite Zeile nicht verändert.

Infobox Vorgehen beim Gaussverfahren

Bei jedem Schritt gilt: Die Zeile, die benutzt wird um in anderen Zeilen zu eliminieren, darf nicht verändert werden.

Beispiel 1.2 Gauss-Eliminationsverfahren **782891**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

Lösung:

Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1 \quad 6 \quad 1) \\ \vec{b} &= (2 \quad 14 \quad 1) \\ \vec{c} &= (1 \quad 2 \quad 3) \end{aligned}$$

Die x-Komponenten eliminieren:

$$\begin{aligned} \vec{a} \qquad\qquad &= (1 \quad 6 \quad 1) \\ \vec{b}' = \vec{b} - 2\vec{a} &= (0 \quad 2 \quad -1) \\ \vec{c}' = \vec{c} - \vec{a} &= (0 \quad -4 \quad 2) \end{aligned}$$

y-Komponente eliminieren:

$$\begin{aligned} \vec{a} \qquad\qquad &= (1 \quad 6 \quad 1) \\ \vec{b}' \qquad\qquad &= (0 \quad 2 \quad -1) \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' &= (0 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

D.h. es ist also gelungen $\vec{0}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen.
Die Vektoren sind also linear abhängig.
Die Linearkombination ist

$$\vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' = (\vec{c} - \vec{a}) + 2(\vec{b} - 2\vec{a}) = -5\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$$

Beispiel 1.3 Gauss-Eliminationsverfahren **854654**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

Lösung:

Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{array}{rl} \vec{a} & = (1 \quad 5 \quad 2) \\ \vec{b} & = (3 \quad 16 \quad 1) \\ \vec{c} & = (-1 \quad -7 \quad 9) \end{array}$$

Die x-, y- und z-Komponenten stehen jetzt jeweils in einer Spalte untereinander. Indem wir nun die x-Komponente bei allen Vektoren eliminieren, entstehen zwei Vektoren, die schon keine x-Komponente haben (und deshalb etwas mehr dem gewünschten Endresultat $\vec{0}$ gleichen):

$$\begin{array}{rl} \vec{a} & = (1 \quad 5 \quad 2) \\ \vec{b}' = \vec{b} - 3\vec{a} & = (0 \quad 1 \quad -5) \\ \vec{c}' = \vec{c} + \vec{a} & = (0 \quad -2 \quad 11) \end{array}$$

Mit den neuen Vektoren, führen wir das selbe Verfahren durch, um einen Vektor mit ohne y-Komponente zu erhalten:

$$\begin{array}{rl} \vec{a} & = (1 \quad 5 \quad 2) \\ \vec{b}' & = (0 \quad 1 \quad -5) \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' & = (0 \quad 0 \quad 1) \end{array}$$

Die z-Komponente des Vektors $\vec{c}$ kann nicht mehr eliminiert werden. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

Kollineare und komplanare Vektoren

Definition Kollinear

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **kollinear**, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Sind zwei Vektoren kollinear so gilt auch

$$\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{0}$$

Der Begriff kollinear fasst also die Begriffe **parallel**

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}$$

und **antiparallel**

$$\vec{a} = -\lambda\vec{b}$$

mit $\lambda > 0$ zusammen.

Beispiel 1.4 Spezielle Lage von zwei Vektoren **014841**

Untersuche, ob die Paare von Vektoren kollinear sind durch Addition von Vielfachen der Vektoren.

a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{l} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{c} + \frac{1}{6}\vec{d} = \vec{0}$

b) $\vec{e} + 2\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ also sind $\vec{e}$ und $\vec{f}$ nicht kollinear.

c) $\vec{g} + 2\vec{h} = \vec{0}$

d) $\vec{k} - \frac{1}{9} \cdot \vec{l} = \vec{0}$

Nehmen wir die Gleichung $\vec{c} + \frac{1}{6} \cdot \vec{d} = \vec{0}$, dann gilt z.B. auch $7 \cdot \vec{c} + 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \vec{d} = \vec{0}$ oder allgemein

$$x_1 \cdot \vec{c} + x_2 \cdot \vec{d} = \vec{0}$$

d.h. wir können *beide* Vektoren mit einer Vorzahl multiplizieren. Erhalten wir so den Null-Vektor, dann sind sie kollinear.

Beispiel 1.5 Spezielle Lage von zwei Vektoren **429102**

Untersuche ob die Paare von Vektoren kollinear sind (durch Addition von Vielfachen der Vektoren).

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

Lösung:

1. $4\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0}$
2. $3\vec{c} - 5\vec{d} = \vec{0}$
3. $3\vec{e} - 7\vec{f} = \begin{pmatrix} 21 - 21 \\ 6 + 21 \\ -3 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \\ 32 \end{pmatrix}$

4. $3\vec{g} + 4\vec{h} = \vec{0}$

Wir betrachten nun die spezielle Lage von drei Vektoren. Wie Fig. 1.1 zeigt, gilt für drei Vektoren, die in einer Ebene liegen

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}\ .$$

Beachte, dass in Fig. 1.1a) die Linearkombination

$$1\vec{a} + (-1)\vec{b} + 1\vec{c} = \vec{0}\ .$$

lautet. D.h. zufällig haben die Vektoren die richtige Länge, und wir müssen sie nur addieren und subtrahieren, damit wir wieder zur Ursprung gelangen.
Sind nun drei Vektoren ganz beliebig in einer Ebene, dann gehen wir so vor:

i) Wir verschieben $\vec{a}$ und $\vec{c}$ in den Endpunkt von $\vec{b}$ (Fig. 1.1 c).

ii) Durch den Endpunkt von $\vec{b}$ legen wir zwei Geraden (rot), die Parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{c}$ liegen. Es entsteht ein Parallelogramm.

iii) Wir strecken $\vec{a}$ und $\vec{c}$, so dass sie die Länge der Kanten des Parallelogramms haben Fig. 1.1 c).

$$\vec{a}' = \vec{a} \cdot x_1 \text{ und } \vec{c}' = \vec{a} \cdot x_3$$

iv) Wir haben $\vec{a}' - \vec{b} + \vec{c}' = \vec{0}$ Fig. 1.1 d).

Um also zu untersuchen, ob die Vektoren komplanar sind, wurden im Beispiel eine Linearkombinationen der Vektoren berechnet.

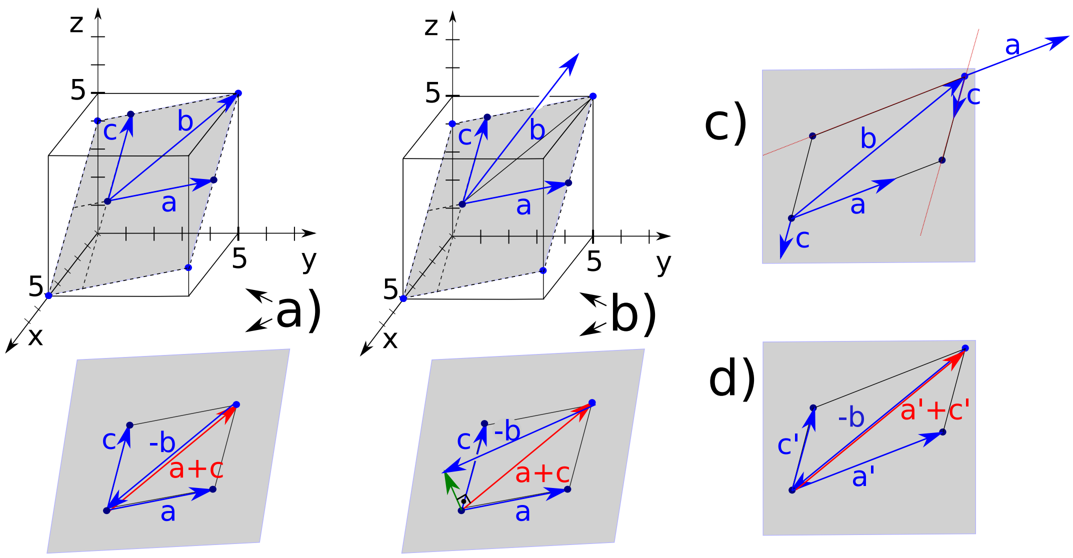


Abbildung 1.1: a) Drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, lassen sich immer so addieren, dass der Nullvektor entsteht. b) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ definieren eine Ebene. Zeigt der Vektor $\vec{b}$ aus dieser Ebene heraus, gibt es keine Linearkombination so dass $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ (abgesehen von der Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

Definition Komplanar

Drei oder mehr Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind komplanar, falls es eine Linearkombination

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

gibt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen der Koeffizienten.

Nebenbei: Liegen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht in einer Ebene, dann ist die einzige Möglichkeit um aus der Summe der Vektoren den Nullvektor zu bekommen wie folgt

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Wir merken uns also folgendes:

- Lineare Abhängigkeit ist die Verallgemeinerung der Begriffe "kollinear" und "komplanar" für beliebig viele Vektoren und beliebig viele Dimensionen.
- Um herauszufinden, ob Vektoren komplanar sind, wenden wir das Gauss-Eliminationsverfahren an.
- Linear abhängige Vektoren haben eine spezielle Lage zueinander. Zwei kollineare Vektoren sind linear abhängig, drei komplanare Vektoren sind linear abhängig.
- Die spezielle Lage erlaubt, dass man wieder zum Ursprung zurück gelang indem man sich strikt nur entlang der Vektoren bewegt.
- In 2 Dimensionen sind *mehr* als 2 Vektoren *immer* linear abhängig. In 3 Dimensionen sind mehr als 3 Vektoren *immer* linear abhängig usw.
- Linear unabhängige Vektoren haben keine spezielle Lage zueinander. Zwei linear unabhängige Vektoren spannen einen Fläche auf, drei linear unabhängige Vektoren spannen ein Volumen auf, vier linear unabhängige Vektoren spannen ein Hyper-Volumen auf.

1.2 Gleichungen lösen mit dem Gauss-Verfahren

Definition Dreiecksform

Ein Gleichungssystem ist in Dreiecksform, falls die Koeffizienten unter der Diagonalen verschwinden (siehe Beispiele 1.6 und 1.7)

Beispiel 1.6 Einsetzen in die Dreiecksform **15951**

Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left| \begin{array}{cccc} x & +2y & +3z & = & 8 \\ & 2y & +4z & = & 14 \\ & & 5z & = & 10 \end{array} \right|$$

Lösung:

- In der letzten Zeile erhalten wir $z = 2$.
- Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt dies

$$2y + 4 \cdot 2 = 14 \;\Rightarrow\; 2y = 6 \;\Rightarrow\; y = 3$$

- Schliesslich berechnen wir x mit der ersten Zeile:

$$x + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 8 \;\Rightarrow\; x = -4$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir sehen, dass die Dreiecksform eines Gleichungssystems den Vorteil hat, dass man von unten nach oben einsetzen kann. Deshalb ist es nützlich, Gleichungssysteme in diese Form zu bringen. Dies geschieht mit dem Gauss-Verfahren.

Beispiel 1.7 Dreiecksform **712666**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left| \begin{array}{rrrcr} x & +2y & +3z & = & 8 \\ -3x & -2y & -z & = & 4 \\ 4x & +2y & +5z & = & 0 \end{array} \right|$$

Lösung:

Wir benennen die Gleichungen L_1, L_2 und L_3. Wir eliminieren zuerst die x-Komponenten der Gleichungen L_2 und L_3 mit Hilfe von L_1:

$$\left[\begin{array}{rccccc} L_1' = L_1: & x & +2y & +3z & = & 8 \\ L_2' = L_2 + 3L_1: & 0 & 4y & +8z & = & 28 \\ L_3' = L_3 - 4L_1: & 0 & -6y & -7z & = & -32 \end{array} \right]$$

Nun benutzen wir die Gleichung L_2' um noch die y-Komponente in der Gleichung L_3' zu eliminieren.

$$\left[\begin{array}{rccccc} L_1'' = L_1': & x & +2y & +3z & = & 8 \\ L_2'' = L_2': & 0 & 4y & +8z & = & 28 \\ L_3'' = 2L_3' + 3L_2': & 0 & 0 & 10z & = & 20 \end{array} \right]$$

Jetzt kann man von unten nach oben einsetzen und erhält die Lösung:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.8 Einsetzen in die Dreiecksform **25951**

Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{vmatrix} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ & 5y & -z & = & 6 \\ & & 7z & = & 28 \end{vmatrix}$$

Lösung:

- In der letzten Zeile erhalten wir $z = 4$.
- Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt dies

$$5y - 4 = 6 \;\Rightarrow\; 5y = 10 \;\Rightarrow\; y = 2$$

- Schliesslich berechnen wir x mit der ersten Zeile:

$$2x - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 12 \;\Rightarrow\; 2y = -2 \;\Rightarrow\; x = -1$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Beispiel 1.9 Dreiecksform **601555**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren.

Löse dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{vmatrix} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ 4x & -y & +9z & = & 30 \\ 8x & -2y & +25z & = & 88 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Eliminieren der x-Komponenten in den Gleichungen L_2 und L_3 mit Hilfe von L_1

(L_1 bleibt unverändert):

$$\left[\begin{array}{rcccccc} L_1' = L_1: & 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ L_2' = L_2 - 2L_1: & 0 & +5y & -z & = & 6 \\ L_3' = L_3 - 4L_1: & 0 & +10y & +5z & = & 40 \end{array}\right]$$

Eliminieren der y-Komponente in der Gleichung L_3' mit Hilfe von L_2' (L_2' bleibt unverändert):

$$\left[\begin{array}{rcccccc} L_1'' = L_1': & 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ L_2'' = L_2': & 0 & +5y & -z & = & 6 \\ L_3'' = L_3' - 2L_2': & 0 & +0 & +7z & = & 28 \end{array}\right]$$

Jetzt kann man von unten nach oben einsetzen und erhält die Lösung:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.3 Übungen zu linear abhängigen Vektoren

Beispiel 1.10 Kollinear **588716**

Bestimmen Sie x, y und z, so dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $x = 12,\ z = -32$

b) $y = 0,\ z = \frac{2}{3}$

c) $x = -\frac{5}{4},\ y = \frac{56}{5}$

d) keine Lösung

Beispiel 1.11 Kollinear/Parallel **745674**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme x, so dass $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

b) Bestimme y, so dass $\vec{f} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Lösung:

1. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

2. $\vec{f} = \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 12$

Beispiel 1.12 Kollinear **036721**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und $\vec{w}$ sollen kollinear sein. Bestimme x und y.

Lösung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -23 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -\frac{11}{2},\ y = \frac{23}{2}$$

Beispiel 1.13 Kollinear **631401**

Überprüfe, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) nicht kollinear

b) kollinear, $-2\vec{b} = \vec{a}$

c) kollinear, $-\frac{4}{9}\vec{b} = \vec{a}$

d) nicht kollinear

1.4 Übungen Gleichungssysteme lösen

Beispiel 1.14 Lösen von LGS, Reihenfolge Gleichungen vertauschen **FZJIRV**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left[\begin{array}{rrrrcr} L_1: & -6x & 8y & 2z & = & 40 \\ L_2: & 12x & -16y & 2z & = & -32 \\ L_3: & 24x & -33y & -3z & = & -120 \end{array}\right]$$

Lösung:

Wir eliminieren nun die x-Komponenten der Gleichungen L_2 und L_3 mit Hilfe von L_1:

$$\left[\begin{array}{rrrrcr} L_1: & -6x & +8y & +2z & = & 40 \\ L_2' = L_2 + 2L_1: & 0 & 0 & 6z & = & 48 \\ L_3' = L_3 + 4L_1: & 0 & -y & +5z & = & 40 \end{array}\right]$$

Wir können die Reihenfolge der Gleichungen ändern und erhalten die Dreickecksform:

$$\left[\begin{array}{rrrrcr} L_1: & -6x & +8y & +2z & = & 40 \\ L_2'' = L_3': & 0 & -y & +5z & = & 40 \\ L_3'' = L_2': & 0 & 0 & 6z & = & 48 \end{array}\right]$$

Einsetzen von unten nach oben ergibt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.15 Gauss-Elimination, Vertauschen von Gleichungen **F1NB3C**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left[\begin{array}{rrrrcr} L_1: & -19x & 38y & -3z & = & 114 \\ L_2: & 15x & -22y & 7z & = & -82 \\ L_3: & x & -2y & 2z & = & -6 \end{array}\right]$$

Lösung:

Wegen dem Koeffizienten 1 vor dem Term x bietet sich L_3 bietet an für das Eliminieren. Wir stellen also um:

$$\left[\begin{array}{rrrrcr} L_1' = L_3: & x & -2y & 2z & = & -6 \\ L_2: & 15x & -22y & +7z & = & -82 \\ L_3' = L_1: & -19x & +38y & -3z & = & 114 \end{array}\right]$$

und eliminieren

$$\left[\begin{array}{rcccccc} L_1' = L_1': & x & -2y & +2z & = & -6 \\ L_2' = L_2 - 15L_1': & 0 & +8y & -23z & = & 8 \\ L_3'' = L_3' + 19L_1': & 0 & +0 & +35z & = & 0 \end{array}\right]$$

Einsetzen ergibt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.16 Gauss-Elimination, Vertauschen/Skalieren von Gleichungen H7XS9Z

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left[\begin{array}{rcccccc} L_1: & 42x & +9y & +35z & = & 205 \\ L_2: & 3x & & -6z & = & -3 \\ L_3: & 14x & +6y & +22z & = & 92 \end{array}\right]$$

Lösung:

Wir sehen, dass die zweite Gleichung eine Koeffizienten 1 vor dem Term x erhält, falls wir sie mit $1/3$ multiplizieren. Also skalieren wir und stellen um:

$$\left[\begin{array}{rcccccc} L_1' = L_2 \cdot \frac{1}{3}: & x & & -2z & = & -1 \\ L_2' = L_1: & 42x & +9y & +35z & = & 205 \\ L_3: & 14x & +6y & +22z & = & 92 \end{array}\right]$$

Jetzt können wir eliminieren:

$$\left[\begin{array}{rcccccc} L_1': & x & & -2z & = & -1 \\ L_2' = L_2' - 42L_1: & & 9y & +119z & = & 247 \\ L_3' = L_3 - 14L_1: & & 6y & +50z & = & 106 \end{array}\right]$$

und

$$\left[\begin{array}{rcccccc} L_1': & x & & -2z & = & -1 \\ L_2': & & 9y & +119z & = & 247 \\ L_3'' = 9L_3 - 6L_2: & & & -264z & = & -528 \end{array}\right]$$

Einsetzen ergibt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.17 Konzepte **TZ8EV9**

a) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir finden $5\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0}$. Wählen Sie die richtigen Antworten aus:

i) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind parallel
ii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind antiparallel
iii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind komplanar
iv) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig

b) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir finden $3\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$. Wählen Sie die richtigen Antworten aus:

i) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind parallel
ii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind antiparallel
iii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind komplanar
iv) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig

c) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir eliminieren die Komponenten mit dem Gaussverfahren, können aber die $z-$Komponente nicht eliminieren. Also sind die Vektoren

i) linear abhängig
ii) linear unabhängig

Lösung:

a) Korrekt sind i) und iv). i) und ii) schliessen sich aus, iii) ist falsch, weil nur 3 Vektoren oder mehr die Eigenschaft 'komplanar' haben können.

b) Korrekt sind ii) und iv)

c) $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ sind *linear unabhängig*

KAPITEL 2

Der Vektorraum

Lernziele Begriffe Vektoren

- Die Studierenden kennen die komponentenweise Schreibweise von Vektoren sowie das Vorgehen bei der komponentenweise Addition. Sie können Gegenvektoren bestimmen und Vektoren mit einem Skalar multiplizieren.
- Sie können Ortsvektoren von allgemeinen Vektoren unterscheiden.
- Sie können die Norm (Länge) eines Vektors berechnen und einen Vektor normieren.
- Sie kennen die Definition eines Vektorraums. Sie kennen neben den Vektoren in der Geometrie mindestens zwei weitere Vektorräume.

2.1 Vektoren in der Geometrie

Definition Ortsvektor

Als Ortsvektor eines Punktes bezeichnet man einen Vektor, der vom Ursprung zu diesem Punkt zeigt.

$$\overrightarrow{OA}$$

Für Berechnungen in der Geometrie ist es praktisch die Notation abzukürzen. Wir stellen fest: Die Koordinaten eines Punktes $A(2/4)$ *entsprechen* den Komponenten des Ortsvektors

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in dieser Basis. Wir unterscheiden deshalb nicht zwischen Koordinaten eines Punktes A und Komponenten des Ortsvektors $\overrightarrow{OA}$ dieses Punktes. Um die Komponenten des Ortsvektors eines Punktes anzugeben, führen wir noch folgende Kurzschreibweise ein:

Infobox Ortsvektoren

Wir kürzen den Ortsvektor des Punktes A wie folgt ab:

$$\overrightarrow{OA} =: \vec{A}$$

Wir fassen zusammen: Wir bezeichnen Ortsvektoren mit Grossbuchstaben, z.B. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$ und allgemeine Vektoren mit Kleinbuchstaben z.B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Ortsvektoren sind an den Ursprung gebunden, deshalb können wir sie nicht verschieben. Allgemeine Vektoren hingegen können verschoben werden.

Infobox Verbindungsvektor

In dieser Notation können wir für den Verbindungsvektor von $\vec{A}$ zu $\vec{B}$ schreiben:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

Die Norm eines Vektors schreiben wir immer mit

$$\|\vec{a}\|$$

und seltener als a.

Infobox Gesetze für die Norm

- Die Norm $\|\vec{a}\|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ ist (in einer Orthogonalbasis)

  $$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + \ \ldots \ + (a_N)^2}$$

  .
- Die Norm eines Vektor wird in der Geometrie auch 'Länge' oder 'Betrag' genannt. Wir ziehen aber den Ausdruck 'Norm' vor.
- Für die Norm eines Vektor gilt immer

  $$\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$$

- Beachte, dass im Ausdruck oben die Striche bei $|\lambda|$ eine andere Bedeutung haben als bei $\|\vec{a}\|$. Stehen die Striche links und rechts von einer *Zahl*, wird der Betrag berechnet z.B. $|-2| = 2$, stehen aber Doppelstricht links und rechts von einem Vektor, wird desssen Länge (Norm) berechnet z.B. $\left\|\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}\right\| \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ sondern $\left\|\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}\right\| = 13$.

Beispiel 2.1 Mittelpunkt I9QK6H

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overrightarrow{PQ}$

b) Erstellen Sie eine Skizze und berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $\vec{M}$ der Strecke $\overline{PQ}$

Lösung:

a) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 13$

b) Aus der Skizze entnehmen wir, dass $\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ}$. Wir können dies vereinfachen zu

$$\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{Q} - \vec{P}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{Q} + \vec{P}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.2 Schwerpunkt eines Dreiecks **6JL1WJ**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten das Dreieck ABC.

a) Berechnen Sie den Mittelpunkt $\vec{M}$ der Kante c.

b) Berechnen Sie den Verbidungsvektor $\overrightarrow{CM}$. Was sind die Koordinaten des Schwerpunktes?

c) Geben den Schwerpunkt eines allgemeinen Dreiecks ABC an mit Hilfe der Koodinaten der Eckpunkte $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ (d.h. ohne Koodinaten rechen).

d) Überprüfen Sie Ihren Ausdruck, indem Sie in den allgemeinen Ausdruck die Koordinaten von oben einsetzen und mit dem Resultat aus Teilaufgabe c) vergleichen.

Lösung:

a) $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{s} = \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -27 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Schwerpunkt liegt bei

$$\vec{S} = \vec{C} + \frac{2}{3} \cdot \vec{s} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) Wir gehen die Rechnung oben Schritt für Schritt durch

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \vec{C}+\frac{2}{3}\cdot\vec{s}\\ &= \vec{C}+\frac{2}{3}\cdot(\vec{M}-\vec{C})\\ &= \frac{1}{3}\cdot\vec{C}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{B})\\ &= \frac{1}{3}\cdot(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})\end{aligned}$$

d) Überprüfung des allgemeinen Ausdrucks:

$$\frac{1}{3}\cdot(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}15\\-4\end{pmatrix}$$

Beispiel 2.3 Quadrat **FNI0DZ**

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ \vec{D}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$$

a) Bestimmeen Sie die Länge der Seiten.

b) Bestimmen Sie die Mittelpunkte der Seiten.

c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Quadrats.

Lösung:

a) Seite a:

$$\vec{a}=\vec{B}-\vec{A}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}\quad|\vec{a}|=4.47$$

b) Die Seitenmittelpunkte liegen bei

$$\vec{M}_a=\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix},\vec{M}_b=\frac{1}{2}\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_c=\frac{1}{2}\left(\vec{C}+\vec{D}\right)=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix},\vec{M}_d=\frac{1}{2}\left(\vec{D}+\vec{A}\right)=\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$$

c) Der Mittelpunkt des Quadrats liegt auf der Mitte der Diagonalen:

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{C}\right)=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

2.2 Komponentenweise Notation Hintergrund

Wie wir später sehen werden, benutzt man in der Anwendungen meist eine komponentenweise Notation, d.h. man betreibt Mathematik mit den Komponenten. Bei dieser Notation sind folgende Regeln wichtig:

Infobox Gesetze für die komponentenweise Notation von Vektoren

Betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

- Die Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert.

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Das neutrale Element der Addition ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Wir nennen diesen Vektor den Nullvektor. Es erfüllt die Eigenschaft $\vec{v}+\vec{0} = \vec{v}$
- Komponentenweise Multiplikation mit einer Zahl:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_N \end{pmatrix} \text{ z.B. } 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Der Gegenvektor zu $\vec{w}$ ist $-\vec{w}$. Wir berechnen ihn, indem wir alle Komponenten mit (-1) multiplizieren:

$$-\vec{w} = (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Wir benutzen für Vektor die Spaltenform

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

  und seltener die Zeilenform $\vec{a} = (a_1, a_2)$
  [**?**, 11.1,p.204]
- Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. In $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ oder } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

  Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$.
  [**?**, 11.1,p.204]

Traditionell werden in der analytischen Geometrie folgende Begriffe auseinander gehalten:

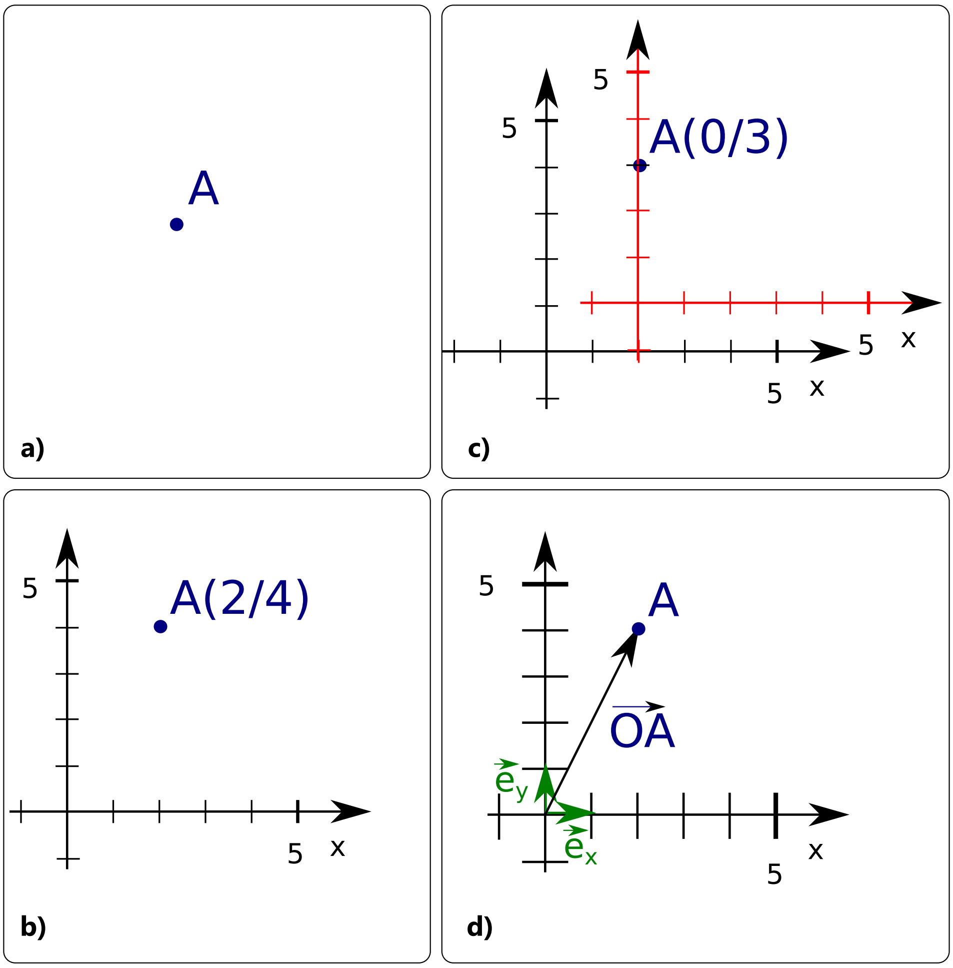


Abbildung 2.1: Traditionelle Darstellung eines Punktes (a) und der Koordinaten des Punktes (b). (c) Die Koordinaten eines Punktes sind nicht eindeutig. Sie hängen von der Wahl des Koodinatensystems ab. (d) Der Ortsvektor ist ein Vektor der vom Ursprung zum Punkt A geht.

- **Punkt**, A.[1] In Abbildung 2.1 a) wird der Punkt mit einer kleinen Scheibe dargestellt, der einen Durchmesser hat, wenn auch einen kleinen. D.h. jede Darstellung eines Punktes (hier die Scheibe), ist selber kein Punkt. Ein Punkt kann nur gedacht werden. Würde man ihn zeichnen, wie er gedacht ist — nämlich unendlich klein — wäre er unsichtbar.
- **Koordinaten eines Punktes**, $A(2/4)$. In Abb. 2.1 b) wird gezeigt, dass wir ein Koordinatensystem einzeichnen können und dann die Koordinaten auslesen können.
  Die Koordinaten eines Punktes sind aber nicht eindeutig. In Abb. 2.1 c) sehen wir, dass die Koodinaten entweder $A(2/4)$ lauten (schwarzes Koordinatensystem), oder $A(0/3)$ (rotes Koordinatensystem).

[1]Ein Punkt (als Raumpunkt) ist ein grundlegendes Element der Geometrie. Anschaulich stellt man sich darunter ein Objekt ohne jede Ausdehnung vor. Der griechische Mathematiker Euklid bezeichnet um 300 v. Chr. in seinem Werk 'Die Elemente' in der ersten Definition den Punkt als "etwas, das keine Teile hat" und verwendet die Bezeichnung semeion. Nach `https://de.wikipedia.org/wiki/Punkt_(Geometrie)`.

- **Ortsvektor eines Punktes**, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. In Abb. 2.1 d) wird gezeigt, dass damit der Vektor gemeint ist, der vom Ursprung zum Punkt A läuft.
- ein **allgemeiner Vektor** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Anders ausgedrückt: Wir setzen den Vektor mit seinen Komponenten gleich. Das ist sinnvoll, denn oft interessieren wir uns ausschliesslich für die Komponenten eines Vektors.

Alle Vektoren können zerlegt werden in Vektoren, die parallel zu den Basisvektoren des Koordinatensystems stehen $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$. Oft wird folgende Kurzschreibweise benutzt: Da die Basis oft klar ist und sich nicht ändert, wird sie 'dazugedacht'. D.h. statt $\vec{a} = 3 \cdot \vec{e}_x - 5 \cdot \vec{e}_y$ schreiben wird

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

oder

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ für } \vec{A} = 2 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y \; .$$

2.3 Der Vektorraum oder: Was ist überhaupt ein Vektor?

Definition Vektorraum

Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist eine Menge V mit einer Addition $+ \colon V \times V \mapsto V$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \mapsto V$. Seien $\vec{v}$, $\vec{w}$ beliebige Elemente aus V und $a, b \in \mathbb{R}$, dann muss gelten:

i) $\vec{v} + \vec{w}$ und $a \cdot \vec{v}$ liegen ebenfalls in V (Abgeschlossenheit).

ii) Es gibt ein Element $\vec{0}$ (das **neutrale Element der Addition**), das folgendes erfüllt:
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

iii) Zu jedem $\vec{v}$ gibt es einen **Gegenvektor**[a] $-\vec{v}$, so dass
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

iv) Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

v) Die skalare Multiplikation ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$

vi) Die skalare Multiplikation ist distributiv: $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ und $(a+b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

vii) Das neutrale Element (1) der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist auch in V ein neutrales Element $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

[a] man spricht auch vom Inversen von $\vec{v}$

Infobox Vektorraum Gegenbeweis

- Eine Menge, die $\vec{0}$ nicht enthält, ist kein Vektorraum.
- Wenn wir vermuten, dass V kein Vektorraum ist, suchen wir ein Beispiel wo $\lambda \cdot \vec{v} \notin V$ oder $\vec{v} + \vec{w} \notin V$.

Beispiel 2.4 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ **ACDB18**

Zeige, dass die Punkte auf der Geraden g, ($s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot s$$

einen Vektorraum bildet. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Lösung:

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\begin{pmatrix} 2s \\ -1s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -1t \end{pmatrix} = (s+t) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Koeffizienten $s+t \in \mathbb{R}$ und eine Richtung $(2, -1)$. Deshalb liegt auch jede Summe von zwei Punkten in der Grundmenge, d.h. auf der Geraden. Abgeschlossenheit mit der Multiplikation :

$$\lambda \begin{pmatrix} 2s \\ -1s \end{pmatrix} = (\lambda \cdot s) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Koeffizienten $\lambda \cdot s \in \mathbb{R}$ eine Richtung $(2, -1)$. Deshalb liegt auch jedes Vielfache eines Punktes in der Grundmenge, d.h. auf der Geraden. Deshalb ist gegebene Menge ein Vektorraum.

Beispiel 2.5 Ein Punkt in $\mathbb{R}^2$ **234208**

Zeige, dass der Punkt :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

keinen Vektorraum bildet. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Lösung:

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\vec{P} + \vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

oder mit der Multiplikation

$$0 \cdot \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{P}$$

Das sind keine Elemente der Grundmenge. Deshalb ist die gegebene Menge kein Vektorraum. Übrigens: Für den Beweis, dass die Menge nicht abgeschlossen ist genügt eine der beiden Zeilen.

Definition Unterraum

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums nennt man Unterraum, falls für alle $\vec{u} \in U$ und $\vec{u}' \in U$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{u}' &\in U \\ a \cdot \vec{u} &\in U \end{aligned}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Infobox Unterräume in $\mathbb{R}^N$

Typische Unterräume in $\mathbb{R}^N$ sind Geraden und Ebenen, die $\vec{0}$ beinhalten. Sie gehen durch den Ursprung.

Beispiel 2.6 Ausgabenvektor für die Ferien I **3ZEM2R**

$$\text{Anna: } \vec{A} = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \end{pmatrix}, \text{ Bea: } \vec{B} = \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Flug} \\ \text{Hotel} \end{matrix}$$

Anna und Beat machen Urlaub. Ihre Ausgaben erfassen sie in einer Liste. Diese Liste ist ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$. Die erste Koordinaten gibt die Ausgaben (in CHF) für den Flug an, die zweite die Ausgaben für das Hotel. Berechnen Sie den Vektor der angibt

a) wie viel beide zusammen für Flug und Hotel ausgegeben haben.

b) um wie viel Beat für Flug bzw. Hotel mehr ausgegeben hat als Anna.

Lösung:
Alle Angaben in CHF

a) Ausgaben beide zusammen

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} 250 \\ 370 \end{pmatrix}$$

b) Differenz der Ausgaben

$$\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2.4 Übungen: Komponentenweise Notation

Beispiel 2.7 Gesetze für die Addition **SY0XAE**

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom inversen Element, Gesetz vom neutralen Element, Kommutativgesetz der Addition, Assoziativgesetz der Addition.

a) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

b) $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

c) $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

d) $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

Lösung:

a) Kommutativgesetz der Addition

b) Assoziativgesetz der Addition

c) Gesetz vom neutralen Element der Addition

d) Gesetz vom inversen Element der Addition

Beispiel 2.8 Gesetze für die Multiplikation **60FTC8**

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom neutralen Element, Distributivgesetz, Assoziativgesetz.

a) $r \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = r \cdot \vec{A} + r \cdot \vec{B}$

b) $(r + s) \cdot \vec{A} = r \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{A}$

c) $(r \cdot s) \cdot \vec{A} = r \cdot (s \cdot \vec{A})$

d) $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$

Lösung:

a) Distributiv-Gesetz

b) Distributiv-Gesetz

c) Assoziativgesetz der Addition der Multiplikation mit einer Zahl

d) Gesetz vom neutralen Element der Multiplikation

Beispiel 2.9 Rechnen mit Vektoren I GD49VQ

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Berechne die Komponenten der folgenden Vektoren:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) $\vec{C} - \vec{B}$

c) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$

d) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}$

e) $2 \cdot \vec{A}$

f) $(-1) \cdot \vec{B}$

g) $7 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B} + 2 \cdot \vec{C}$

h) $\frac{7}{2} \cdot \vec{A} + \frac{1}{3} \cdot \vec{D}$

Lösung:

a) $\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $2 \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

f) $(-1) \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ C

g) $7 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B} + 2 \cdot \vec{C} = \begin{pmatrix} -6 \\ 29 \end{pmatrix}$ C

h) $\frac{7}{2} \cdot \vec{A} + \frac{1}{3} \cdot \vec{D} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 53 \end{pmatrix}$

Beispiel 2.10 Diagonalen in Rechteck YWC8BB

a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen (Seitenlängen $x = 8$ cm und $y = 15$ cm).

b) Berechnen Sie die Länge des Pfeils $\vec{c}$.

c) Wir betrachten nun ein Rechteck mit Seitenlängen $x = 5 \cdot 8$ cm und $y = 5 \cdot 15$ cm. Wie lange ist die Diagonale?

d) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck Seitenlänge x Zentimeter und y Zentimeter?

e) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck der Seitenlänge $\lambda \cdot x$ Zentimeter und $\lambda \cdot y$ Zentimeter?

Lösung:

b) wie a): Mit dem Satz von Pythagoras berechnen wir

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{x^2 + x^2} = 17$$

c) Die Diagonale ist 5 mal länger, also

$$\|5\vec{c}\| = |5| \cdot \|\vec{c}\| = 5 \cdot 17$$

d) Wir haben ein allgemeines Resultat gefunden. Die Überlegung mit der Diagonalen funktioniert immer, egal wie lange die Kanten sind. Also

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e) Auch hier können wir das Resultat von oben auf den allgemeinen Fall übertragen.

$$\left\|\vec{d}\right\| = \lambda \cdot \|\vec{c}\|$$

Beispiel 2.11 Gesetze bei der komponentenweise Notation von Vektoren
490953

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme für die angegebenen Vektoren die Komponenten. Benutze wann immer möglich die oben angegebenen Gesetze.

a) Gib den Nullvektor in $\mathbb{R}^5$ an.

b) $\vec{v} + \vec{w}$

c) $5\vec{v}$, $5\vec{w}$ und $5 \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

d) $-\vec{v}$

e) $\|\vec{v}\|$

f) $\|\vec{v} \cdot 5\|$

Lösung:

a) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

c) $5\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\0\\-5\\0\\5\end{pmatrix}$

$$5\vec{w}=\begin{pmatrix}10\\10\\10\\10\\10\end{pmatrix} \text{ und } 5\cdot(\vec{v}+\vec{w})=5\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\10\\5\\10\\15\end{pmatrix}$$

d) $-\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

e) $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

f) $\|\vec{v}\cdot 5\|=\sqrt{3}\cdot 5$. Hier kommt das Gesetz für die Norm zum Zug (einfacher). Es könnte aber auch explizit nachgerechnet werden, dass

$$\sqrt{(5)^2+0^2+(-5)^2+0^2+(5)^2}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$$

Beispiel 2.12 Parallelogramm **DDBD9S**

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}2.25\\-1.3\end{pmatrix},\ \vec{D}=\begin{pmatrix}0.25\\2.7\end{pmatrix}$$

Sind die Punkte die aufeinanderfolgenden Ecken eines Parallelogramms ABCD?

a) Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Verbindungsvektoren der Punkte berechnen.

b) Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Seitenlängen berechnen.

Lösung:

a) Die Verbindungsvektoren sind

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-0.75\\0.7\end{pmatrix},\ \overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}0.75\\-0.7\end{pmatrix}$$

Die gegenüberliegenden Seiten verlaufen parallel, denn

$$\overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{CD} \text{ und } \overrightarrow{BC} = (-1) \cdot \overrightarrow{DA}$$

b) Seitenlängen:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 4.47214,\ \left\|\overrightarrow{BC}\right\| =, 1.02591,\ \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = 4.47214,\ \left\|\overrightarrow{DA}\right\| = 1.02591$$

Wir haben also ein Viereck, weil jeweils zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Es handelt sich um ein Parallelogramm.

Beispiel 2.13 Parallelogramm II **LJY3HS**

Überprüfen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{D} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir berechnen die Verbindungsvektoren von einer Ecke jeweils zu nächsten:

a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang. Es ist ein Parallelogramm.

b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Gegenüberliegende Seiten sind parallek und gleich lang. Es ist ein Parallelogramm.

Beispiel 2.14 Parallelogramm III **NI9G3B**

Ergänzen Sie die Punkte zu einem Parallelogramm ABCD.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 21 \\ -11 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -75 \\ 199 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Wir erstellen eine kleine Skizze und sehen darin

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -14 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -109 \\ 201 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.15 Gleichschenklige Dreiecke 5CE2XT

Handelt es sich bei ABC um gleichschenklige Dreiecke. Wenn ja, berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.75 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:
In einer Skizze erkennen wir, dass der Flächeninhalt z.B. falls die Symmetrieachse durch C geht mit dem Mittelpunkt der Seite c und $\vec{M}_c$ berechnet werden kann:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_c C}\right|$$

a) Wir orientieren uns zuerst, indem wir die Vektoren der Seitenkanten berechnen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und die Längen sind

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 8.06226, \ \left|\overrightarrow{BC}\right| = 8.06226, \ \left|\overrightarrow{CA}\right| = 11.4018$$

Wir sehen, dass die Symmetrieachse durch B geht.

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_b B}\right| \approx \frac{1}{2} \cdot 11.4018 \cdot 5.7 \approx 32.5$$

b) Wir orientieren uns zuerst, indem wir die Vektoren der Seitenkanten berechnen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und die Längen sind

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4.47214, \left|\overrightarrow{BC}\right| = 9.21954, \left|\overrightarrow{CA}\right| = 9.21954$$

Wir sehen, dass die Symmetrieachse durch C geht.

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_c C}\right| \approx \frac{1}{2} \cdot 4.47 \cdot 8.94 \approx 20$$

c) Wir orientieren uns zuerst, indem wir die Vektoren der Seitenkanten berechnen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -1 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

und die Längen sind

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2.01556, \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3.60555, \left|\overrightarrow{CA}\right| = 2.01556$$

Wir sehen, dass die Symmetrieachse durch A geht.

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_a A}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3.60555 \cdot 0.901388 = 1.625$$

C

Beispiel 2.16 Rechnen mit Vektoren II **KG5VVR**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{E}$ und $\vec{F} \in \mathbb{R}^2$ sind allgemeine Vektoren.

a) Gegenvektor zu $\vec{A}$?

b) Gegenvektor zu $\vec{B}$?

c) Gegenvektor zu $\vec{E} - 2 \cdot \vec{F}$?

d) Gegenvektor zu $-(\vec{E} - 5 \cdot \vec{F})$?

e) $\vec{A}+\vec{X}=\vec{B}$, $\vec{X}=?$

f) $\vec{B}+\vec{X}=\vec{0}$, $\vec{X}=?$

g) $7\cdot\left(\vec{A}-2\cdot\vec{B}\right)+\vec{X}=\vec{C}$, $\vec{X}=?$

h) $\frac{1}{2}\cdot\vec{X}+\frac{1}{3}\cdot\vec{A}+\vec{D}=\vec{X}$, $\vec{X}=?$

Lösung:

a) $-\vec{A}=\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$

b) $-\vec{B}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

c) $-(\vec{E}-2\cdot\vec{F})=-\vec{E}+2\cdot\vec{F}$

d) $-[-(\vec{E}-5\cdot\vec{F})]=\vec{E}-5\cdot\vec{F}$

e) $\vec{X}=\vec{B}-\vec{A}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

f) $\vec{X}=-\vec{B}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

g) Aus
$$7\cdot\vec{A}-7\cdot 2\cdot\vec{B}+\vec{X}=\vec{C}$$
folgt
$$\vec{X}=\vec{C}-(7\cdot\vec{A}-14\cdot\vec{B})=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$

h) Wir bringen zuerst alle Terme, die die Unbekannt $\vec{X}$ enthalten nach links, alle anderen nach rechts:
$$\frac{1}{2}\cdot\vec{X}-\vec{X}=-(\frac{1}{3}\cdot\vec{A}+\vec{D})$$
Wir zählen jetzt links wieviele $\vec{X}$ wir haben und vereinfachen rechts
$$-\frac{1}{2}\cdot\vec{X}=-\frac{1}{3}\cdot\vec{A}-\vec{D}$$
Jetzt lösen wir auf
$$\vec{X}=\frac{-\frac{1}{3}\cdot\vec{A}-\vec{D}}{-1/2}==\frac{2}{3}\cdot\vec{A}+2\vec{D}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}34\\32\end{pmatrix}$$

2.5 Übungen: Vektorraum

Beispiel 2.17 Die Ebene $\mathbb{R}^2$ **14841**

Zeige, dass die Tupel in der Menge $V=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

$$\begin{aligned}(x,y)+(p,k) &= (x+p,y+k)\\ (x,y)\cdot\lambda &= (x\cdot\lambda, y\cdot\lambda)\end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Lösung:

i) Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$(x,y)+(p,k) = (x+p,y+k)$$

Das Tupel $(x+p,y+k)$ hat wiederum Komponenten in $\mathbb{R}$ und liegt deshalb in V.

ii) Abgeschlossenheit mit der Multiplikation:

$$(x,y)\cdot\lambda = (x\cdot\lambda, y\cdot\lambda)$$

Das Tupel $(x\cdot\lambda, y\cdot\lambda)$ hat wiederum Komponenten in $\mathbb{R}$ und liegt deshalb in V.

Wegen i) und ii) ist die gegebene Menge ein Vektorraum.

Beispiel 2.18 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ **234208**

Zeige, dass die Tupel $V = \{a\cdot(1,3) \mid a \in \mathbb{R}\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation. **Lösung:**

i) Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$(a,3a)+(b,3b) = (a+b, 3a+3b) = (a+b)\cdot(1,3)$$

Das Tupel $(a+b)\cdot(1,3)$ wird mit dem Vorgehen erzeugt, wie die alle Elemente in V (Vorfaktor $a+b$ mal Richtung $(1,3)$. Deshalb liegt auch jede Summe von zwei Tupeln wieder in V.

ii) Abgeschlossenheit mit der Multiplikation:

$$(a,3a)\cdot\lambda = (a\cdot\lambda, 3a\cdot\lambda) = a\cdot\lambda(1,3)$$

Das Tupel $a\cdot\lambda(1,3)$ wird mit dem Vorgehen erzeugt, wie die alle Elemente in V (Vorfaktor $\lambda\cdot a$ mal Richtung $(1,3)$. Deshalb liegt auch jedes Vielfache eines Tupels wieder in V.

Die Gegebene Menge ist also ein Vektorraum .

Beispiel 2.19 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ 2 **234208**

Prüfe, ob die Tupel $V = \{(a+1, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation. **Lösung:**

Wir stellen fest, dass $\vec{0}$ nicht in V liegt: Die erste Komponente ist nur für $a = -1$ gleich Null. Dort erhalten wir

$$(0, -3) \ .$$

Das reicht um zu zeigen, dass V kein Vektorraum ist, denn für jedes Element $\vec{v} \in V$ müsste gelten

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

Da aber $\vec{0}$ nicht in V liegt, ist V nicht abgeschlossen mit der Addition.
Wem das nicht reich, rechnet z.B.

$$\vec{w} + \vec{w} + (1,0) + (1,0) = (2,0)$$

$\vec{w}$ liegt in V aber, das Resultat liegt nicht in V, denn um die zweite Komponente 0 zu bekommen müssen wir $a = 0$ wählen. Für diese Wahl erhalten wir aber in V

$$(0+1, 0) = (1, 0)$$

Die V ist also kein Vektorraum .

Beispiel 2.20 Die Ebene $\mathbb{R}^3$ **826816**

Wie wir später sehen werden, liegen die Punkte, die man bilden kann mit dem Gesetz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

und $a, b \in \mathbb{R}$ in einer Ebene. Zeige, dass die Tripel in $V = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.
Lösung:
Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d \\ c-d \\ c+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a-b+c-d \\ a+b+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+(b+d) \\ a+c-(b+d) \\ a+c+(b+d) \end{pmatrix} \\ &= (a+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b+d) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Tripel $(a+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b+d) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist wieder in der selber Form wie die Elemente in V: Die Koeffizienten $a+c$ und $b+d$ liegen in $\mathbb{R}$). Deshalb liegt auch die Summe in V.

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot\lambda+b\cdot\lambda \\ a\cdot\lambda-b\cdot\lambda \\ a\cdot\lambda+b\cdot\lambda \end{pmatrix} = \lambda\cdot a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Tripel $\lambda\cdot a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Vorfaktoren in $\mathbb{R}$ und ist in der selben Form, wie die Elemente in V. Deshalb liegt auch jedes Vielfache eines Tripels in V.
V ist also ein Vektorraum.

Beispiel 2.21 Ein A4-Blatt **A1D84A**

$$V = \left\{(x,y)|0\leq x\leq 210 \wedge 0\leq y < 297\right\}$$

C

$$\begin{aligned} (x,y)+(p,k) &= (x+p,y+k) \\ (x,y)\cdot\lambda &= (x\cdot\lambda, y\cdot\lambda) \end{aligned}$$

mit $\lambda\in\mathbb{R}$. Bilden die Tupel in V einen Vektorraum? Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation **Lösung:**

Abgeschlossenheit mit der Addition: Es gilt zwar

$$(x,y)+(p,k) = (x+p,y+k) \ .$$

Aber das Tupel $(x+p,y+k)$ ist nicht in jedem Fall in V. Betrachte z.B.

$$(210,297)+(0,297) = (210,594)$$

Die Summe liegt nicht im Vektorraum. Also ist der Vektorraum nicht abgeschlossen. Gleichfalls ist C

$$(210,297)\cdot 10 = (2100,2970)$$

nicht im Vektorraum. Also ist V auch gegenüber der Multiplikation nicht abgeschlossen.

Beispiel 2.22 Ausgabenvektor für die Ferien **IY13LE**

Seit Anna im Urlaub war, ist ein Jahr vergangen. Damals waren ihr Ausgaben

$$\begin{array}{l} \text{Flug} \\ \text{Hotel} \end{array} : \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Inzwischen ist alles um 10% teurer geworden: wie sieht der Ausgaben-Vektor von Anna dieses Jahr aus? **Lösung:**

$$\vec{A}' = (1+0.1)\cdot\begin{pmatrix}120\\150\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}132\\165\end{pmatrix}$$

Beispiel 2.23 Verdienst **JHUQUG**

Herr Meyer arbeitet für zwei Arbeitsgebern. $\vec{M} \in \mathbb{R}^2$ gibt die Monatsgehälter bei beiden Arbeitsgebern, $\vec{J} \in \mathbb{R}^2$ seine Jahresgehälter an.

a) Drücke $\vec{J}$ mit $\vec{M}$ aus.

b) Herr Meyer erhält zweimal im Jahr das doppelte Gehalt. Drücke jetzt $\vec{J}$ mit $\vec{M}$ aus.

Lösung:

a) $\vec{J} = 12\cdot\vec{M}$, oder falls das Monatsgehalt in 13 Raten ausgezahlt wird gilt $\vec{J} = 13\cdot\vec{M}$

b) $\vec{J} = 12\cdot\vec{M} + \vec{M} + \vec{M} = 14\cdot\vec{M}$; Je nach Arbeisvertrag gilt alternativ

$$\vec{J} = 13\cdot\vec{M} + \vec{M} + \vec{M} = 15\cdot\vec{M}\ .$$

Beispiel 2.24 Polynome bis Grad 3 **1A73ZA**

$$p(x) = 120 - 15x + 5x^2 - 4x^3, \quad q(x) = 7 + 42x - 6x^2 - 2x^3$$

Wir schreiben die Buchhaltung für die Koeffizienten der beiden Polynome in Listen auf

$$\vec{p} = \begin{pmatrix}120\\-15\\5\\-4\end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix}7\\42\\-6\\-2\end{pmatrix}$$

a) Berechne $a(x) = p(x) + q(x)$

b) Berechne $b(x) = -3p(x) + 2q(x)$

Lösung:

a) Die Koeffizienten 'vermischen sich nicht', d.h. bei der Addition bleiben die Komponenten getrennt. Also

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix}127\\27\\-1\\-6\end{pmatrix} \text{ d.h. } a(x) = 127 + 27x - x^2 - 6x^3\ .$$

b) Die Koeffizienten 'vermischen sich nicht', auch nicht bei der Multiplikation mit einem Skalar. Also

$$\vec{b} = -3\vec{p} + 2\vec{q} = \begin{pmatrix} -346 \\ 129 \\ -27 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ d.h. } b(x) = -346 + 129x - 27x^2 + 8x^3 \,.$$

Beispiel 2.25 Trigonometrische Funktionen **847116**

$$p(x) = 15\cos(x) - 4\sin(x), \quad q(x) = -2\cos(x) + 6\sin(x)$$

Wir schreiben die Buchhaltung für die Koeffizienten in Listen auf

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $a(x) = 2p(x) + 15q(x)$

b) Berechne $b(x) = 6p(x) + 4q(x)$

Lösung:

a) Die Koeffizienten 'vermischen sich nicht', also

$$\vec{a} = 2\vec{p} + 15\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 82 \end{pmatrix}$$

und $a(x) = 82\sin(x)$

b) Die Koeffizienten 'vermischen sich nicht', also

$$\vec{b} = 6\vec{p} + 4\vec{q} = \begin{pmatrix} 82 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $b(x) = 82\cos(x)$

Beispiel 2.26 Polynome bis Grad 4 **625994**

Zeige, dass die Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 \text{ mit } a_i \in \mathbb{R}$$

(Polynom 4. Grades) einen fünfdimensionalen Vektorraum V bilden.

Lösung:

Wir betrachten die Polynome $p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4$ und $q(t) =$

$b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + b_3 \cdot t^3 + b_4 \cdot t^4$ Die Addition von zwei Polynomen ergibt

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot t + (a_2 + b_2) \cdot t^2 + (a_3 + b_3) \cdot t^3 + (a_4 + b_4) \cdot t^4$$

Es entsteht wieder ein Polynom von Grad 4 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, also ist V mit der Addition abgeschlossen.
Für die Multiplikation gilt:

$$\lambda \cdot p(t) = (\lambda \cdot a_0) + (\lambda \cdot a_1) \cdot t + (\lambda \cdot a_2) \cdot t^2 + (\lambda \cdot a_3) \cdot t^3 + (\lambda \cdot a_4) \cdot t^4$$

Auch das ist ein Polynom in V. Also ist V ein Vektorraum.

KAPITEL 3

Darstellung der Gerade in $\mathbb{R}^2$

Lernziele Darstellung der Gerade

- Die Studierenden kennen die Geradengleichung in Parameterform.
- Die Studierenden können aus der Koordinatengleichung einer Geraden die Parameterform bestimmen und umgekehrt.
- Die Studierenden können einen Vektor normieren.
- Die Studierenden können überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen.
- In $\mathbb{R}^2$ können die Studierenden zu einem gegebenen Vektor $\vec{v}$ einen zweiten Vektor $\vec{n}$ bestimmen, der senkrecht auf $\vec{v}$ steht.

Eine Gerade kann auf folgende Arten dargestellt werden:

Definition Funktionsgleichung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$

Der Ausdruck

$$y = m \cdot x + d$$

beschreibt eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Dabei ist m die Steigung und d der y-Achsen-Abschnitt

Definition Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$

Alle Punkte, die auf einer Geraden liegen und die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ haben, erfüllen die Bedingung

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0$$

Dabei ist $n \in \mathbb{R}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ der Normalenvektor der Geraden.

Definition Parameterform der Geraden in $\mathbb{R}^2$

Die Punkte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \vec{v}$$

beschreiben eine Gerade. Dabei sind

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{A} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R}$$

Wir nennen

- $\vec{A}$ den **Aufpunkt**.
- $\vec{u}$ den **Richtungsvektor**.

[**?**, Bd. 1 II 4.1] In R^3 gilt analog

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \vec{u}$$

mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{A} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{R}^3; s \in \mathbb{R}$$

Infobox Darstellung von Geraden in $\mathbb{R}^n$

- In $\mathbb{R}^2$: Für Geraden, die parallel zu y-Achse verlaufen, gibt es eine Koordinatengleichung (z.B. $x = 3$) aber keine Funktionsgleichung.
- In $\mathbb{R}^n$ werden Geraden durch die Parameterform dargestellt. Für die Gerade gibt es in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) keine Funktionsgleichung und keine Koordinatenform.

Grundfertigkeiten beim Wechsel der Darstellung von Geradengleichungen

Beispiel 3.1 Parameterform der Geraden **EEZWBD**

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir kennen den Mittelpunkt der Strecke $\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overrightarrow{PQ}}_{=\vec{v}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie 4 weitere Punkte auf der *Geraden* durch $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ an.

b) Wie können wir *alle* Punkte auf der Geraden darstellen?

Lösung:

a) Weitere Punkte könnten sein

$$\vec{A} = \vec{P} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \end{pmatrix}, \; \vec{B} = \vec{Q} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

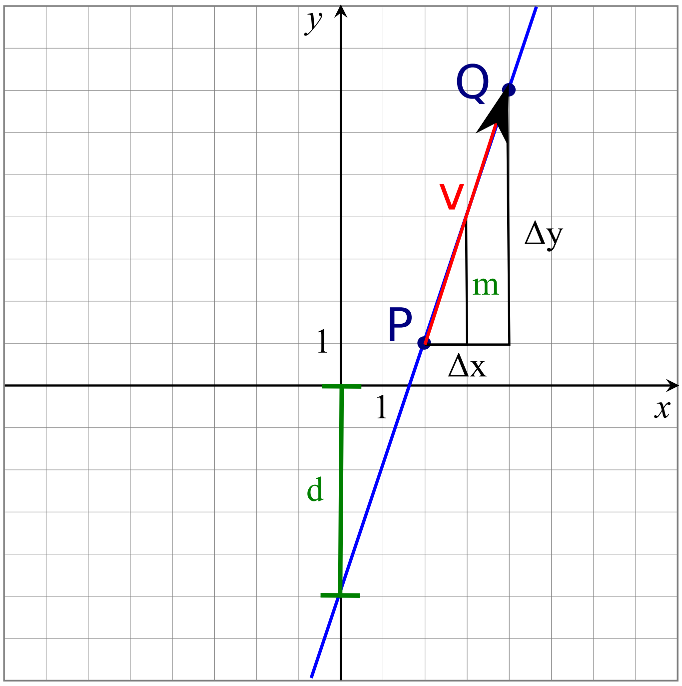
$$\vec{D} = \vec{P} + \frac{1}{10}\vec{v} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 15 \end{pmatrix}, \; \vec{D} = \vec{P} + 10 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 117 \\ -48 \end{pmatrix},$$

b) Aus den Beispielen oben sehen wir, dass das Bildungsgesetz lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{P} + s \cdot \vec{v}$$

dabei ist $s \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl und als Aufpunkt kann statt $\vec{P}$ auch $\vec{Q}$ verwendet werden

Beispiel 3.2 Grundfertigkeiten 1 EPM0VQ



Wir betrachten die Gerade g durch die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Geraden

a) als Funktionsgleichung

b) in Parameterform.

Lösung:

a) Wir bestimmen die Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{4-2} = 3\ .$$

Der y-Achsenabschnitt muss nun die Gleichung (beim Punkt $\vec{P}$) erfüllen:

$$1 = 3 \cdot 2 + d\ .$$

also $d = -5$. Die Funktionsgleichung lautet also

$$y(x) = -5 + 3x$$

b) Wir berechnen den Verbindungsvektor

$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Parameterform lautet also ($s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{P} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Beispiel 3.3 Grundfertigkeiten 2 **Z0AP3T**

Wir betrachten die Gerade f durch die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Geraden

a) in Parameterform.

b) als Funktionsgleichung.

c) in Koordinatenform

d) zwei weitere Punkte auf der Geraden anhand der Parameterform

e) zwei weitere Punkte auf der Geraden Koordinatengleichung

Lösung:

a) Wir berechnen den Verbindungsvektor

$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Beim Richtungsvektor spielt die Länge keine Rolle. Wir skalieren ihn also $\vec{v}' = \frac{1}{4}\vec{v}$. Die Parameterform lautet also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{P} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) Wir lösen die Koordinatenform nach y auf:

$$y = 7 - 3x$$

c) Aus dem Komponenten des Richtungsvektors bestimmen wir die Koeffizienten (Komponenten vertauschen und ein Vorzeichen switchen):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} := \vec{n}$$

Das sind die Koeffizienten

$$3x + 1y + d = 0$$

Die Gleichung muss auch bei $\vec{P}$ erfüllt sein, also

$$3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -7$$

Die Koordinatenform lautet $3x + y - 7 = 0$.

d) Punkte aus der Parameterform z.B. $s = 10$ und $s = 20$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -29 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 20 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ -59 \end{pmatrix}$$

e) Punkte aus Koordinatengleichung $3x + y - 7 = 0$. Wir wählen $x = 0$, also

$$y - 7 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und $y = 0$, also

$$3x - 0 - 7 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.4 Grundfertigkeiten 3 **F1CD8V**

Wir betrachten die Gerade h gegeben durch

$$3 \cdot x + 2 \cdot y + 6 = 0$$

Bestimmen Sie

a) zwei weitere Punkte auf der Geraden.

b) die Parameterform der Geraden h

Lösung:

a) Es bietet sich an die Punkte

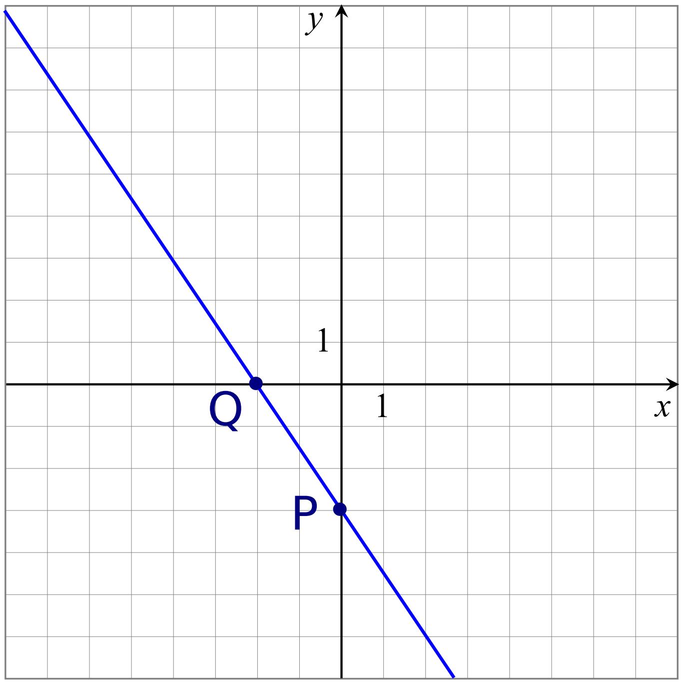
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} q_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 + 2p_y + 6 = 0 \quad &\Rightarrow \quad p_y = -3 \\ 3 \cdot q_x + 2 \cdot 0 + 6 = 0 \quad &\Rightarrow \quad q_x = -2 \end{aligned}$$

also

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



b) Der Richtungsvektor lautet

$$\vec{v} = \vec{P} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und also die Parameterform von h ($s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wieso funktioniert das?

Beispiel 3.5 Bestimme die Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ **814251**

Gegeben seien die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Berechne zunächst zwei weitere Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Überlege dann, wie man alle Punkte auf der Geraden berechnen kann.

Lösung:

Der Vektor der die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ verbindet ist

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Um weitere Punkte auf der Geraden zu bestimmen gehen wir von $\vec{A}$ zum Beispiel nur den halben Weg in Richtung von B:

$$\vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

oder $\frac{3}{4}$ vom Weg:

$$\vec{Q} = \vec{A} + \frac{3}{4} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Punkte $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ liegen sicher auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Es wird ersichlich, dass wir irgendeinen Teil des Weges zwischen Alle Punkte auf der Geraden sind gegeben durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ gehen können und so stets einen Punkt auf der Geraden bleiben. Wir können das wie folgt schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$$

Dabei kann $\lambda \in \mathbb{R}$ irgendeinen Wert annehmen - auch negative Werte oder auch $|\lambda| > 1$.

Beispiel 3.6 Punkte einer Geraden **702095**

Die Gerade ist gegeben durch

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liegen die Punkte auf der Geraden g?

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir untersuchen dazu, ob der Verbindungsvektor von $\vec{C}$ zum Aufpunkt kollinear zum Richtungsvektor ist. Wir erhalten

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\vec{c}$ ist ein Vielfaches von $\vec{u}$, deshalb liegt $\vec{C}$ auf der Geraden. Des weiteren liegt $\vec{Q}$ und $\vec{R}$ nicht auf der Geraden dafür aber $\vec{S}$.

Beispiel 3.7 Parameterform einer Geraden **THGS9F**

Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden durch die Punkte

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$

b) $\vec{C} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.8 Senkrechte Vektoren **HGV4AA**

Zeichnen Sie folgende Vektoren in ein Koordinatensystem ein und bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht dazu steht.
Berechnen Sie anschliessend für die beiden Vektoren den Term

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ u \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

b) $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $5 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 0$.

c) $\vec{c}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0$.

d) $\vec{d}' = \begin{pmatrix} u \\ -3.2 \end{pmatrix}$ und $3.2 \cdot u + u \cdot (-3.2) = 0$.

e) $\vec{e}' = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und $x \cdot y + y \cdot (-x) = 0$.

f) $\vec{f}' = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ und $\cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = 0$.

Infobox Senkrechte Vektoren

Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

- Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander, falls gilt

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y = 0$$

- Die Summe oben notieren wir auch mit dem Skalarprodukt

$$\vec{v} \odot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

- Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\vec{v}$.
- Diese Technik erlaubt es, aus dem Richtungsvektor einer Geraden $\vec{v}$ einen Vektor $\vec{n}$ zu bestimmen, der senkrecht auf der Geraden steht. Wir nennen dann $\vec{n}$ den **Normalenvektor**.

Beweis, dass $\vec{v}$ senkrecht steht auf $\vec{n}$:

$$\vec{v} \odot \vec{n} = v_x \cdot (-v_y) + v_y \cdot v_x = 0$$

Beispiel 3.9 Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$ 9TQ8VC

Wir betrachten die Gerade g. Sie lässt sich darstellen in Parameterform

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

Wir bestimmen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und daraus in Koordinatenform

$$5x - y = 4$$

Untersuchen sie die geometrische Lage von $\vec{v}$ und $\vec{n}$.

Lösung:

Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander:

$$5 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = 0$$

Beispiel 3.10 Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$ 8SR7RB

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}$ steht.

b) Wir berechnen einen zweiten Punkt auf der Geraden

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Welchen Winkel schliessen $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n}$ ein? Wie untersuchen Sie das mathematisch?

c) Wir berechnen einen weiteren Punkt, der nicht auf der Geraden liegt

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Welchen Winkel schliessen $\vec{l} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{n}$ ein?

d) Wir betrachten einen weiteren Punkt $\vec{C} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf der Geraden g. Drücken Sie mathematisch aus, dass $\overrightarrow{AC}$ senkrecht zu $\vec{n}$ steht.

e) Multiplizieren Sie den letzten Ausdruck aus und vereinfachen Sie.

Lösung:

a) Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Wir berechnen einen zweiten Punkt auf der Geraden

$$\vec{w} \odot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$$

Der Zwischenwinkel ist 90°.

c)
$$\overrightarrow{AC} \odot \vec{n} = 0$$

d.h.
$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

d) ausmultipliziert
$$-2x + 3y - 10 = 0$$

Beispiel 3.11 Von der Koordinatenform zur Parameterform der Geraden
V1YY0V

$$g: \quad 5x + 8y - 16 = 0$$

a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\vec{n}$ der Geraden.

b) Bestimmen Sie den Richtungsvektor $\vec{v}$.

c) Bestimmen Sie einen Punkt $\vec{A}$ auf der Geraden.

d) Geben Sie die Parameterform der Geraden an.

Lösung:

a) Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ auslesen.

b) Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c) Um einen Punkt zu bestimmen, wählen wir z.B. $x = 0$ und lösen dann auf

$$0 + 8y - 16 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{16}{8} = 2$$

Also ist der Aufpunkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) g in Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.12 Konstante bestimmen **0JNWFS**

$$h: \quad (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}}) \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

a) Geben Sie den Normalenvektor an.

b) Bestimmen Sie n_x und n_y in der Koordinatenform

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0$$

c) Der Punkt $\vec{A}$ liegt auf der Geraden. Wie lässt sich mit dieser Überlegung d bestimmen?

d) Geben Sie h in der Koordinatenform an.

Lösung:

a) Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Koordinatenform

$$7 \cdot x + 5 \cdot y + d = 0$$

c) $\vec{A}$ liegt auf h mathematisch ausgedrückt (durch Einsetzen von $\vec{A}$):

$$7 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 + d = 0 \qquad d = -(-35 + 15) = 20$$

d) ausmultipliziert

$$7 \cdot x + 5 \cdot y + 20 = 0$$

Infobox Umwandeln der Darstellungen der Geraden

- 2 Punkte zu Parameterform: Einen Punkt als Aufpunkt wählen, $\vec{v} = \vec{B} - \vec{A}$ ist der Richtungsvektor.
- Parameterform zu Koordinatenform: Aus $\vec{v}$ den Normalenvektor $\vec{n}$ berechnen. Dann Pkt. einsetzen und Konstante bestimmen.
- Parameterform zu Funktionsgleichung: Mit $\vec{v}$ die Steigung berechnen und den Aufpunkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ einsetzen in
$$y = m \cdot (x - A_x) + A_y$$
.
- Koordinatenform zu Parameterform: Normalenvektor $\vec{n}$ auslesen. Der Vektor senkrecht zu $\vec{n}$ ergibt den Richtungsvektor. Ein Punkt (z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$) ist der Aufpunkt.

3.1 Übungen: Geradengleichung

Beispiel 3.13 Gerade als Gleichung: Geradengleichung **48726**

Durch die Gleichung $x_2 = mx_1 + c$ wird eine Gerade im x_1x_2-Koordinatensystem beschrieben. Dabei ist m die Steigung und d der y-Achsenabschnitt. Gib die Parameterdarstellung der Geraden an für

a) $m = 3,\ d = 3$

b) $m = 0,\ d = 2$

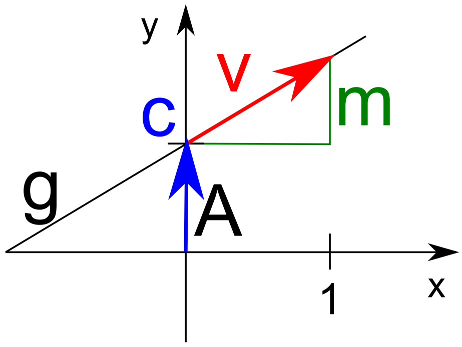
c) $x_1 + x_2 = 3$

d) $2x_1 + x_2 = 5$

e) $x_1 = 5$

Lösung:

Meistens lässt sich die Parameterform aus der Geradengleichung berechnen, nämlich in allen Fällen, wo sowohl m wie auch c gegeben sind. Mit Hilfe der Grafik, führen wir uns die Bedeutung der beiden Parameter vor Augen.



c sagt, bei welcher Höhe die y-Achse geschnitten wird. Daraus lässt sich ein Aufpunkt schnell bestimmen: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. m sagt, dass die Gerade um m steigt, wenn man einen Schritt in Richtung von x geht. Daraus lässt sich ein Richtungsvektor schnell bestimmen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Wir lösen nach x_2 auf:
$$x_2 = 3 - x_1$$
Daraus bestimmen wir $m = -1$ und $c = 3$, also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für die weiteren Aufgaben gehen wir wie folgt vor: Wir können zwei Punkte bestimmen. Das geht oft am einfachsten für die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit diesen Punkten kann dann die Parameterdarstellung bestimmt werden:

d) Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Richtungsvektor
$$\vec{u} = 2\left(\vec{B} - \vec{A}\right) = 2 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \; .$$
Also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

e) Hier gibt es keinen Punkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Dafür können wir z.B. $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ wählen. Richtungsvektor
$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

Also $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.14 Von der Parameterform zur Geradengleichung **94899**

Bestimme die Gleichung $x_2 = m \cdot x_1 + c$ der Geraden g:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Die Steigung kann mit dem Richtungsvektor bestimmt werden. Es gilt $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3}$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir den Aufpunkt in die halbfertige Geradengleichung ein:

$$2 = 1 \cdot \frac{1}{3} + c$$

also $c = \frac{5}{3}$ und die Geradengleichung lautet

$$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} x_1 \; .$$

b) Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{-1 = -5}$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, suchen wir den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir den Aufpunkt in die halbfertige Geradengleichung ein:

$$5 = 2 \cdot \frac{-5}{1} + c$$

also $c = 15$ und die Geradengleichung lautet

$$x_2 = -5x_1 + 15 \; .$$

Beispiel 3.15 Schnittpunkt von zwei Geraden **339474**

Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes $\vec{S}$ der Geraden g und h:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

d) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\3\\9\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$, $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-13\\9\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{S}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ (z.B. für $t=-1$).

b) $\vec{S}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ (z.B. für $\lambda=-3$). C

c) $\vec{S}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ (z.B. für $t=0$).

d) $\vec{S}=\begin{pmatrix}3\\-13\\9\end{pmatrix}$ (z.B. für $t=0$).

Methode:
In $\mathbb{R}^2$ können wir die Geradengleichung in Koordinatenform bestimmen und dann mit der Gauss-Elimination, das Gleichungssystem in Dreiecksform bringen.
In $\mathbb{R}^3$ funktioniert es so: Wir setzen die vektoriellen Ausdrücke gleich und multiplizieren mit dem Parameter aus:

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2t\\9t\end{pmatrix}$$

oder komponentenweise

$$\begin{array}{lrcl} L_1: & 2+\lambda & = & 5+2t \\ L_2: & 1-\lambda & = & 9+9t \end{array}.$$

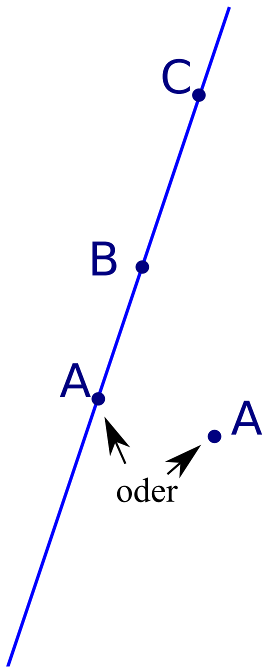
Als nächstes wollen wir einen Parameter eliminieren. Hier gelingt dies durch Addition der Gleichungen (links und rechts separat):

$$L_1+L_2: \quad 3=14+11t$$

also $t=\frac{3-14}{11}=-1$. Diesen Parameter kann man in die Parameterform von h einsetzen und erhält

$$\vec{S}=\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

Beispiel 3.16 Geraden 503523



Liegt der Punkt $\vec{A}$ auf der Geraden durch die Punkte $\vec{B}$ und $\vec{C}$?

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix}$

Lösung:

Idee zu Lösung: Falls $\vec{A}$ auf der Geraden liegt, sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear.

a) Wir berechnen den Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und einen Vektor, der den Punkt $\vec{A}$ mit der Geraden verbindet

$$\vec{w} = \vec{A} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Falls, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear sind, liegt $\vec{A}$ auf der Geraden. Hier ist aber

$$\begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix},$$

also liegt $\vec{A}$ nicht auf der Geraden.

b) Wir berechnen den Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

und einen Vektor, der den Punkt $\vec{A}$ mit der Geraden verbindet

$$\vec{w} = \vec{A} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ -30 \\ 26 \end{pmatrix} .$$

Falls, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear sind, liegt $\vec{A}$ auf der Geraden. Hier ist

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -30 \\ 26 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also liegt $\vec{A}$ auf der Geraden.

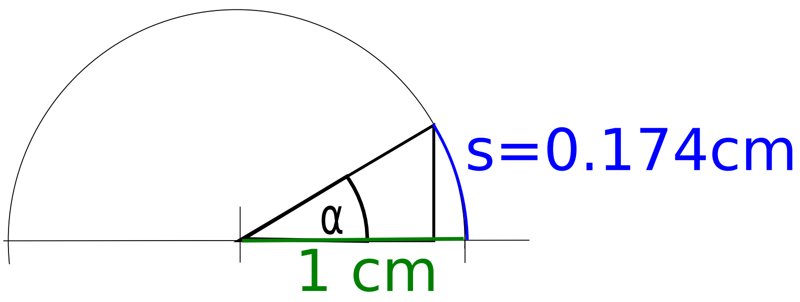
KAPITEL 4

Trigonometrie

4.1 Das Bogenmass

Beispiel 4.1 Kreisbogen **EMSJBG**

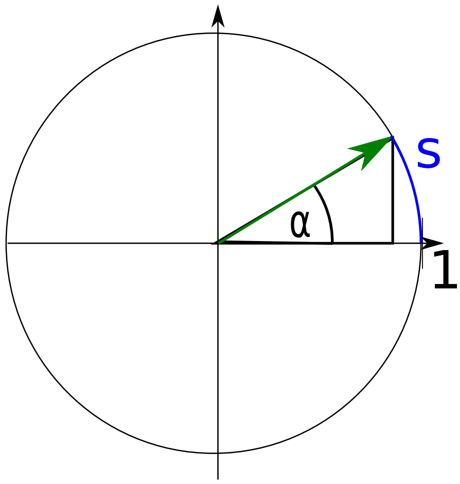
Wir messen auf einem Kreisbogen (Radius 1) einen Kreisbogen vom 0.174533. Wie gross ist der darunterliegende Winkel.



Lösung:
$10°$

Definition Bogenmass

Unter dem Bogenmass s eines Winkels α (in Grad) verstehen wir die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.



$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$

Beispiel 4.2 Rechne die Masseinheit um **245307**

Berechne die Winkel $s = \frac{\pi}{7}$ und $\varphi = 12°$ in beiden Masseinheiten.

Lösung:

Wir beginnen mit der Feststellung, dass ein voller Kreis in den beiden Masseinheiten 2π oder 360° entspricht:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
$\frac{\pi}{7}$	

Danach berechnen wir den Quotienten der dritten und zweiten Zeile ist in allen Winkel-Einheiten gleich, also

$$f = \frac{\frac{\pi}{7}}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°} .$$

Also

$$\alpha = \frac{360°}{14} = 25.71° .$$

Gleich verfahren wir bei der Umrechnung von Winkelgrad ins Bogenmass:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
	12°

Der Quotient der dritten und zweiten Zeile ist

$$f = \frac{12°}{360°} = \frac{x}{2\pi} .$$

Also

$$x = \frac{2\pi}{30} = 0.209 .$$

Beispiel 4.3 Bogenmass **TC2EE3**

Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass x oder im Winkelmass α.

Lösung:

α	$111°$	$90°$	$120°$	$270°$	$-15°$
x	$\frac{37\pi}{60} = 1.94$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{12}$

Beispiel 4.4 Bogenmass **978833**

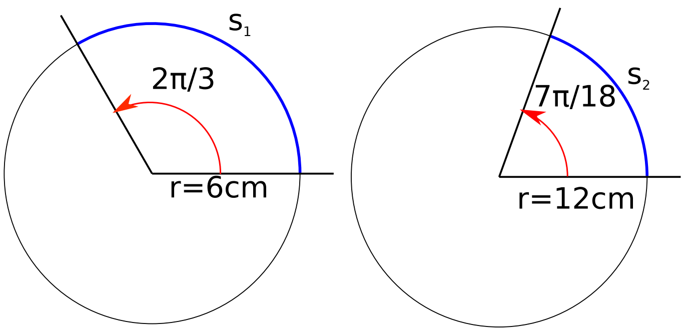
Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass x oder im Winkelmass α.

Lösung:

α	$18°$	$300°$	$-630°$	$480°$	$50°$
x	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{18}$

Beispiel 4.5 Bogenmass **335331**

Berechne die Bogenlänge s.



Lösung: Die Bogenlänge berechnen wir aus dem Anteil am ganzen Kreis, d.h.

$$s = 2\pi \cdot r \cdot \frac{x}{2\pi}$$

Hier sind [in cm]:

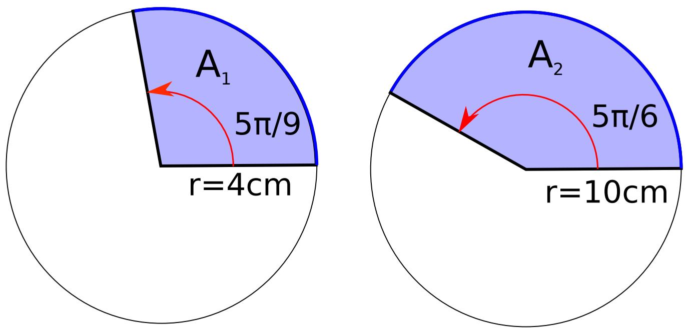
$$s_1 = 2\pi \cdot 6 \cdot \frac{2\pi/3}{2\pi} = 4\pi$$

und

$$s_2 = 2\pi \cdot 12 \cdot \frac{7\pi/18}{2\pi} = \frac{14\pi}{3}$$

Beispiel 4.6 Bogenmass **845541**

Berechne die Fläche des Kreissektors A.



Lösung:
Die Fläche des Kreissektors berechnen wir aus dem Anteil am ganzen Kreis, d.h.

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{x}{2\pi}$$

Hier sind [in cm^2]:

$$A_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{5\pi/9}{2\pi} = \frac{40\pi}{9} \approx 13.96$$

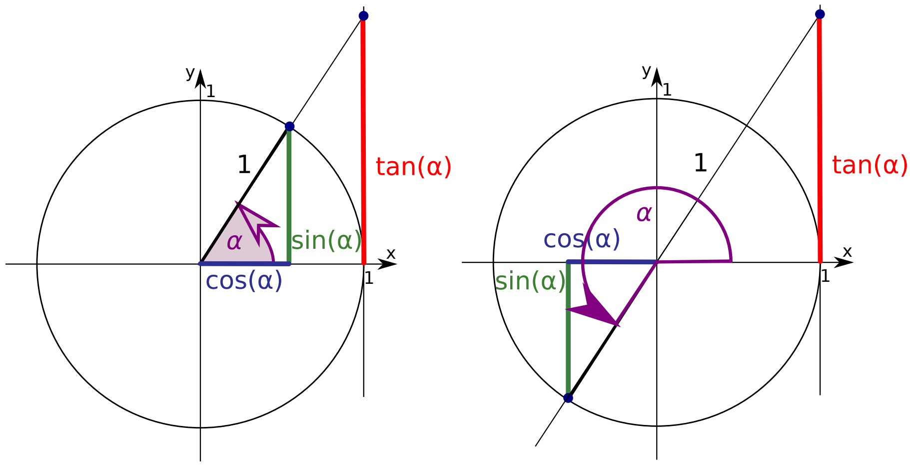
und

$$A_2 = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{5\pi/6}{2\pi} = \frac{125\pi}{3} \approx 130.90$$

4.2 Der Einheitskreis

Wir definieren die trigonometrischen Funktionen als Stücke am Einheitkreis.

Definition Winkelfunktionen



Beachten Sie, dass die trigonometrischen Funktionen auch die Richtungen der Pfeile angeben und durch ihr Vorzeichen. Es gilt

- Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $\sin(\alpha) > 0$ und $\cos(\alpha) > 0$
- Für $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$: $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) < 0$

Infobox Winkel haben eine Richtung

In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeigersinn gemessen, d.h. $10°$ ist im Gegenuhrzeigersinn und $-10°$ ist im Uhrzeigersinn.

Für rechtwinklige Dreiecke gelten auch folgende Relationen. Wir werden die Relationen selten gebrauchen, weil wir uns mehr für die Beschreibung von periodischen Schwingungen interessieren.

Infobox Relationen am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H};\ \cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$

Mit den Abkürzungen A für Ankathete, G für Gegenkathete und H für Hypotenuse.

[**?**, Bd. 1 III 9.1]

Beispiel 4.7 Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen **K4PJLD**

Welche Vorzeichen haben $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für die folgenden Winkel? Geben Sie den Quadranten an.

a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Lösung:

a) Q2: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$: $\sin(\alpha) > 0$ und $\cos(\alpha) < 0$

b) Q3: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{2}{\pi}$: $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) > 0$

Wir strecken den Einheitskreis um den Faktor r. Dadurch erhalten wir einen Kreis mit Radius r.

Satz Polarkoordinaten

Wir betrachten $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 360°$. Der Vektor

$$\vec{w} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat die Länge r und schliesst mit der x-Achse den Winkel φ ein.
Wir nennen (r, φ) die Polarkoordinaten von $\vec{w}$.

Beispiel 4.8 Polarkoodinaten 7SXS1J

Addiere die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Ihre Polar-Koordinaten sind $(r = 6.5, \varphi = 30°)$ und $(r = 10, \varphi = 50°)$.

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Karthesischen Koordinaten

$$\vec{a} = 6.5 \cdot \begin{pmatrix} \cos(30°) \\ \sin(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.62917 \\ 3.25 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = 10 \cdot \begin{pmatrix} \cos(50°) \\ \sin(50°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.42788 \\ 7.66044 \end{pmatrix}$$

Die Summe ist also

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 12.057 \\ 10.91 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.9 Polarkoodinaten UCWJYR

Geben Sie die Vektoren in Karthesischen Koordinaten an.

a) $\vec{a}$: $\|\vec{a}\| = 1$, $\varphi = 45°$

b) $\vec{b}$: $\left\|\vec{b}\right\| = 2$, $\varphi = -225°$

c) $\vec{c}$: $\|\vec{c}\| = 5$, $\varphi = \frac{5\pi}{36}$

d) $\vec{d}$: $\left\|\vec{d}\right\| = 2$, $\varphi = 60°$

e) $\vec{e}$: $\|\vec{e}\| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

f) $\vec{f}$: $\left\|\vec{f}\right\| = 7$, $\varphi = 35°$

g) $\vec{g} = \vec{a} + \vec{b}$

Lösung:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4.53 \\ 2.11 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 5.73 \\ 4.02 \end{pmatrix}$

g) $\vec{g} = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 2.12 \end{pmatrix}$

Beispiel 4.10 Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten NNHCXF

Geben Sie die kartesischen Koordinaten der Vektoren an. Verwenden Sie auf dem Taschenrechner den Grad modus (`deg`), falls Winkel in Grad angegeben sind und den Radian-Modus (`rad`), falls die Winkel im Bogenmass angegeben sind.

a) $r = 5,\ \varphi = 216.9°$

b) $r = 13,\ \varphi = -0.4$

c) $r = 37,\ \varphi = 1.24$

d) $r = 85,\ \varphi = 25°$

e) $r = 145,\ \varphi = 4.55$

f) $r = 197,\ \varphi = 98.2°$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} \cos(216.9°) \\ \sin(216.9°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 13 \cdot \begin{pmatrix} \cos(-0.4) \\ \sin(-0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.97 \\ -5.06 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.02 \\ 34.99 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77.04 \\ 35.92 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23.44 \\ -143.09 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28.10 \\ 194.99 \end{pmatrix}$

Beispiel 4.11 Kompass und Winkel **IJ5I6F**

a) Nicolas läuft 3 m von Punkt O weg. Dabei schliesst er mit der positiven x-Achse einen Winkel von 30° ein. Beschreibe seinen Weg mit einem Pfeil in der Zeichnung und danach mit Zahlen.

b) Wo landet er, wenn er 7 m läuft und mit der positiven x-Achse einen Winkel von 55° einschliesst?

c) Wo landet er, wenn er beide Wege nacheinander läuft?

Lösung:

a)
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(30°) \\ 3 \cdot \sin(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

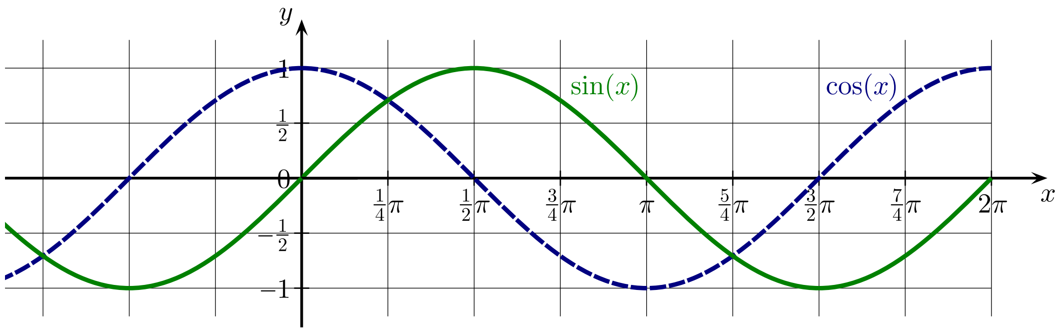
b)
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \cdot \cos(55°) \\ 7 \cdot \sin(55°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.02 \\ -5.73 \end{pmatrix}$$

c) Gesamt
$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 6.61 \\ -7.23 \end{pmatrix}$$

4.2.1 Graphen der trigonometrischen Funktionen

Infobox Funktionen

- Die Zuordnung $x \mapsto y = f(x)$ heisst $f(x)$ Funktion. Dabei ist x die freie Variable (Input) und y die abhängige Variable (Output).
- Wir nennen x das **Argument** von f und y den **Funktionswert**.



Definition Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f(t)$ heisst

- periodisch mit **Periode** T, falls $f(t+T) = f(t)$
- **symmetrisch**, falls $f(-t) = f(t)$
- **antisymmetrisch**, falls $f(-t) = -f(t)$

Beispiel 4.12 Symmetrie von Monomen NUDTZW

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

Lösung:

a) $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$. Also

$$f(-x) = f(x)$$

Die Funktion ist also symmetrisch.

b) $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3$. Also

$$f(-x) = -f(x)$$

Die Funktion ist also antisymmetrisch.

Beispiel 4.13 Symmetrie von Monomen **MVESAV**

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x) = 1 + x^2$

b) $f(x) = x - x^3$

c) $f(x) = x + x^2$

d) $f(x) = x^3 + x^4$

Lösung:

a) $f(x)$ ist symmetrisch.

b) $f(x)$ ist antisymmetrisch.

c) $f(x)$ hat keine Symmetrie.

d) $f(x)$ hat keine Symmetrie.

Beispiel 4.14 Symmetrie der trigonometrischen Funktionen **U4P0S2**

Benutze den Einheitskreis:

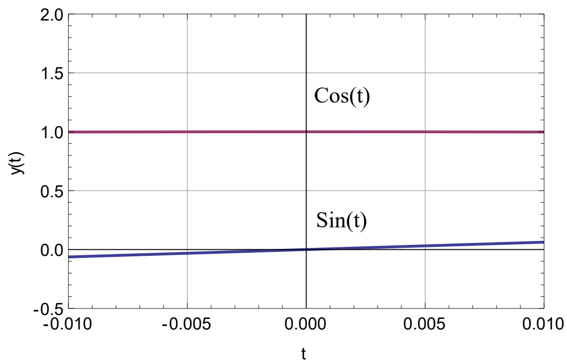
a) Sind die trigonometrischen Funktionen periodisch. Warum? Was ist ihre Periode?

b) Haben die trigonometrischen Funktionen Symmetrien. Welche? Warum? Betrachten (zeichen) Sie dafür $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ in der Umgebung von $\alpha = 0$.

Lösung:

a) Spätestens nach einer Drehung um 2π ist der Kreis geschlossen, d.h. die Graphen sind 2π periodisch. Die $\tan(\alpha)$-Funktion ist sogar π-periodisch.

b) Es gilt $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Die Symmetrien sind in der Umgebung von 0 gut ersichlich



Beispiel 4.15 Symmetrien **MZ2D7Y**

Bestimme die Symmetrien der folgenden Funktionen

a) $f(x) = \sin(x^2)$

b) $f(x) = \big(\sin(x)\big)^2$

c) $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big)$

d) $f(x) = \cos(x - 6\pi)$

e) $f(x) = \sin(-x)$

f) $f(x) = \cos(-x)$

Lösung:

a) $f(x) = \sin(x^2)$ und $f(-x) = \sin((-x)^2) = \sin(x^2) = f(x)$, also ist die Funktion symmetrisch. Alternativ
$$f(x) \approx x^2$$
also ist es eine gerade Funktion.

b) symmetrisch. Alternativ
$$f(x) \approx \cos(x) \approx 1$$
also ist es eine gerade Funktion.

c) symmetrisch

d) symmetrisch

e) $f(x) = \sin(-x) = -\sin(x)$ und $f(-x) = \sin(x) = -f(x)$, also ist die Funktion antisymmetrisch.
Alternative: Wir nähern $\sin(x)$ mit x, d.h. mit dem Argument. Das ist eine gute Näherung für kleine x und reicht um die Symmetrie abzulesen:
$$f(x) \approx (-x)\ .$$
$-x$ ist eine Gerade durch den Ursprung in der xy-Ebene und also ungerade Funktion.

f) $f(x) = \cos(-x) = \cos(x)$ und $f(-x) = \cos(x) = f(x)$, also ist die Funktion symmetrisch.
Alternative: Wir nähern $\cos(x)$ mit 1. Das ist eine gute Näherung für kleine x und reicht um die Symmetrie abzulesen:
$$f(x) \approx 1\ .$$
1 ist eine horizontale Gerade in der xy-Ebene und also gerade Funktion.

4.3 Transformationen von Funktionen

Satz Transformationen

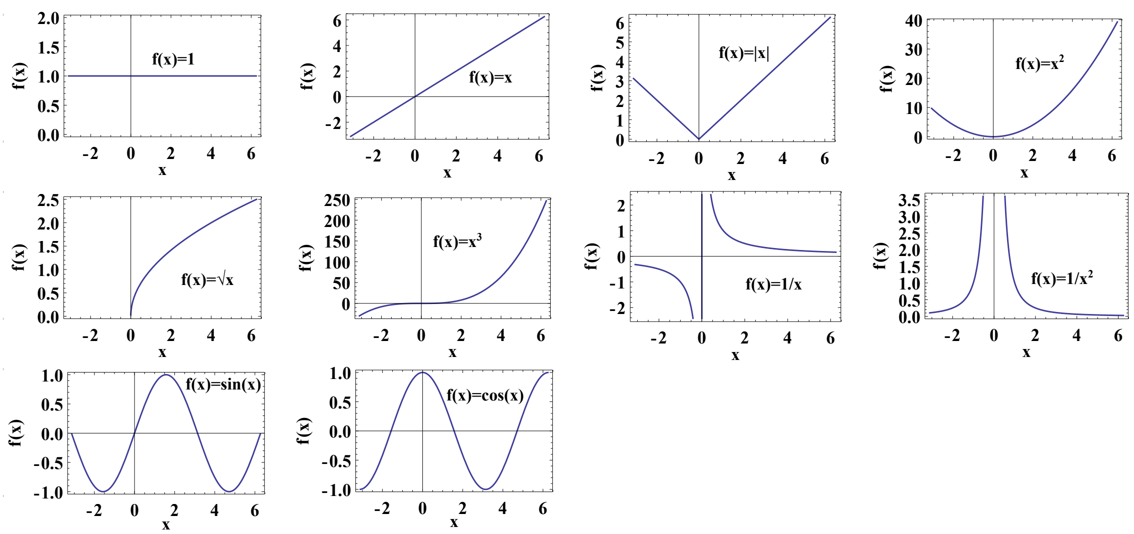
Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kann wie folgt transformiert werden:

- $-f(x)$ Spiegelung an der x-Achse
- $f(-x)$ Spiegelung an der y-Achse
- $f(x) + c$ Verschiebung in Richtung der y-Achse $(c > 0)$
- $f(x - c)$ Verschiebung in Richtung der **positiven** x-Achse $(c > 0)$
- $f(a \cdot x)$ Stauchung in Richtung der x-Achse $(a > 1)$.
- $a \cdot f(x)$ Streckung in Richtung der y-Achse $(a > 1)$.

Die Transformationen entlang der y-Achse sind intuitiv, die entlang der x-Achse gehen oft gegen unsere Intuition.

Infobox Folgerungen Transformationen

- $f(x) - c$ Verschiebung der y-Achse entgegengesetzt $(c > 0)$
- $f(x + c)$ Verschiebung der x-Achse entgegengesetzt $(c > 0)$
- $f(a \cdot x)$ Streckung in Richtung der x-Achse $(0 < a < 1)$.
- $a \cdot f(x)$ Stauchung in Richtung der y-Achse $(0 < a < 1)$.



Die zehn Graphen oben zeigen die häufigsten Funktionen in der Algebra. Sie sollten schon mit den Charakteristiken dieser Graphen vertraut sein. Das wird Ihnen helfen, die Graphen der etwas komplizierteren Funktionen, die aus den einfachen Funktionen durch Transformation hervorgehen, besser zu verstehen.

Beispiel 4.16 Vertikale Verschiebung AEU6T

a) Ergänzen Sie die Tabelle und skizzieren Sie die Graphen.

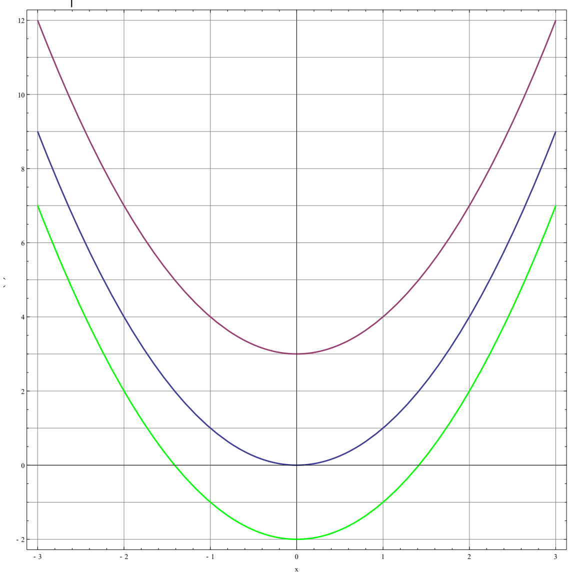
b) Was ändert sich zwischen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$? Die Form? Die Position? Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

c) Was ist der vertikale Abstand der Graphen?

d) Wie verschiebt sich also der Graph der Funktion $f(x)$, wenn wir die Transformation $y = f(x) + k$ oder $y = f(x) - k$ mit $k > 0$ anwenden?

Lösung:

x	$f(x) = x^2$	$g(x)x^2 - 3$	$h(x)x^2 + 2$
-4	16	13	18
-3	9	6	11
-2	4	1	6
-1	1	-2	3
0	0	-3	2
1	1	-2	3
2	4	1	6
3	9	6	11
4	16	13	18



a) Tabelle und Plot.

b) Zwischen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ ändert nur die Position, nicht aber die Form.

c) Der vertikale Abstand ist

$$\Delta = f(x) - g(x) = 3 \text{ und } \Delta' = f(x) - h(x) = -2$$

Am Rande der Zeichnung scheinen sich die Graphen vertikal zu nähern. Dies ist eine optische Täuschung. Das können wir belegten, indem wir an festen

Stellen die Funktionswerte berechnen, und miteinander vergleihen. Bei $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ g(0) &= -3 \Rightarrow f(0) - g(0) = 3 \end{aligned}$$

Bei $x = 4$:

$$\begin{aligned} f(4) &= 16 \\ g(4) &= 13 \Rightarrow f(0) - g(0) = 3 \end{aligned}$$

d) Der Graph der Funktion $f(x)$ verschiebt sich nach oben (positive y-Richtung), wenn wir die Transformation $y = f(x) + k$ ($k > 0$) anwenden und nach unten bei $y = f(x) - k$.

Beispiel 4.17 Horizontale Verschiebung: Parabel **2RSKP9**

Wir betrachten die Parabel $f(x) = x^2$. Sie hat bei $(x, y) = (0, 0)$ einen Scheitelpunkt.

a) Ergänzen Sie die Tabelle.

b) Skizzieren Sie unten die Graphen.

c) Wo befindet sich der Scheitelpunkt bei der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$?

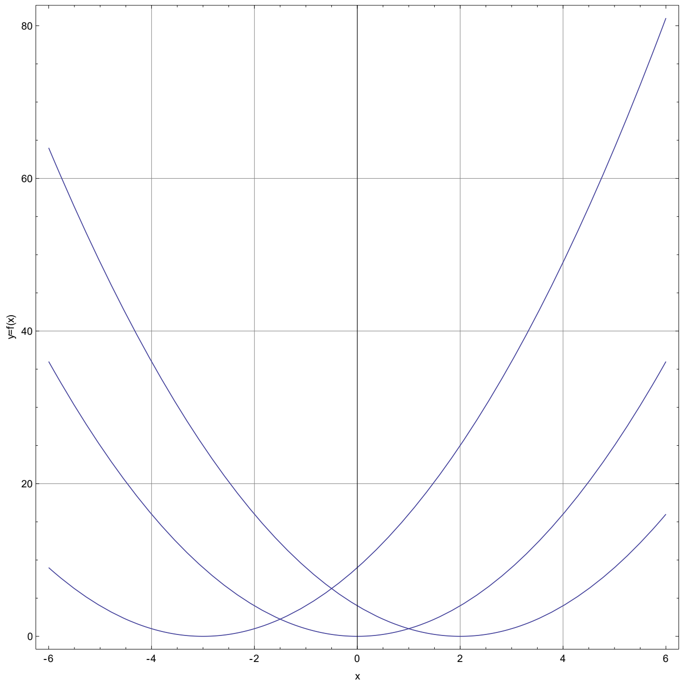
d) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = (x - c)^2$ ihren Scheitelpunkt? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Verschiebung in Richtung ...'.

e) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x + 3)$ für x den Wert -3 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert ... einsetze."
- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x + 3)$ jetzt bei -3 so, wie ursprüngliche Funktion bei ... war."

Lösung:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = f(x+3) = (x+3)^2$	$h(x) = f(x-2) = (x-2)^2$
-4	16	1	36
-3	9	0	25
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0
3	9	36	1
4	16	49	4



a) Tabelle

b) Plot

c) Der Scheitelpunkt der Funktion $g(x)$ liegt bei $x = -3$ und $y = 0$, der Scheitelpunkt der Funktion $h(x)$ liegt bei $x = 2$ und $y = 0$.

d) Die Funktion $f(x) = (x - c)^2$ hat ihren Scheitelpunkt bei $x = c$ und $y = 0$. Wir stellen fest, dass Transformation $f(x - c)$ eine Verschiebung des Graphen in x-Richtung bewirkt. Ansonsten bleiben die Funktionswerte unverändert.

e) Ergänzungen:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x + 3)$ für x den Wert -3 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert 0 einsetze."
- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x + 3)$ jetzt bei -3 so, wie ursprüngliche Funktion bei 0 war."

Beispiel 4.18 Streckung und Stauchung **ZC38E4**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$. Sie hat bei $x = \pi \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) Nullstellen, bei $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ Tiefpunkte und bei $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ Hochpunkte.

a) Ergänzen Sie die Tabelle (maximal 3 Stellen). Nutzen Sie auch Symmetrien der Funktionien aus.

b) Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ hat ihre charakteristische Nullstelle bei $x = \pi$. Welches Kriterium muss der Ausdruck im Argument der Sinusfunktion von $g(x) = \sin(2x)$ erfüllen, damit $g(x) = 0$?

c) Bestimmen Sie die erste Nullstelle $x > 0$ der Funktionen $h(x)$ und $p(x)$. Vergleichen Sie die gefundenen Nullstellen mit der der ursprünglichen Funktion $f(x) = \sin(x)$.

d) Wurden die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ entlang der x-Achse zusammengestaucht oder gestreckt? Argumentieren Sie mit Hilfe der ersten Nullstelle und der Tabelle.

e) Skizzieren Sie nun die Graphen der Funktion $h(x)$, $g(x)$ und $p(x)$.

f) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = \sin(x\omega)$ ihre erste Nullstelle $x > 0$? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Streckung des Graphen in Richtung ...' .

Lösung:

a) Tabelle

b) Für $\sin(2x) = 0$ kann z.B. im Argument stehen $2x = \pi$ und nach x aufgelöst $x = \frac{\pi}{2}$.

c) Die ersten Nullstelle $x > 0$ der Funktionen liegen bei

$$\begin{array}{ccccc} g(x) = \sin(2x) & \Rightarrow & 2x = \pi & \Rightarrow & x_1 = \frac{\pi}{2} \\ h(x) = \sin(\frac{1}{4} \cdot x) & \Rightarrow & \frac{1}{4} \cdot x = \pi & \Rightarrow & x_2 = 4\pi \\ p(x) = \sin(\frac{2\pi}{5} \cdot x) & \Rightarrow & \frac{2\pi}{5} \cdot x = \pi & \Rightarrow & x_3 = \frac{5}{2} \end{array}$$

d) Wir stellen fest

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & \frac{\pi}{2} & < & \pi \\ x_2 & = & 4\pi & > & \pi \\ x_3 & = & \frac{5}{2} & < & \pi \end{array}$$

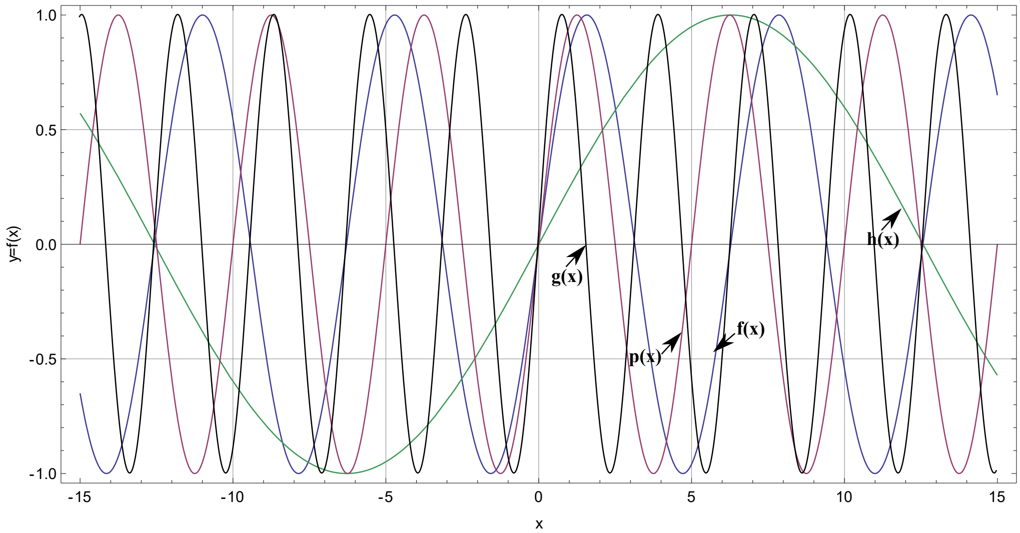
Aufgrund der Verschiebung vermuten wir: $g(x)$ wurde gestaucht, $h(x)$ wurde gestreckt und $p(x)$ wurde zusammengestaucht.

e) Graphik

f) Die Funktion $f(x) = \sin(x\omega)$ eine Nullstelle dort, wo das Argument $x\omega = \pi$, d.h. bei $x = \frac{pi}{\omega}$.

- Für $g(x) = \sin(2x)$ finden wir die Nullstelle $x_1 = \frac{\pi}{2} < \pi$. Sie liegt näher bei 0, als die der Funktion $\sin(x)$. Der Graph der Funktion $\sin(2x)$ entsteht durch eine Stauchung des Graphen von $\sin(x)$ in x-Richtung.
- Für $h(x) = \sin(\frac{1}{4} \cdot x)$ finden wir die Nullstelle $x_2 = 4\pi > \pi$. Sie liegt weiter von 0 entfernt, als die der Funktion von $\sin(x)$. Der Graph der Funktion $\sin(\frac{1}{4} \cdot x)$ entsteht durch eine Streckung des Graphen von $\sin(x)$ in x-Richtung.
- Für $p(x) = \sin(\frac{2\pi}{5} \cdot x)$ finden wir die Nullstelle $x_3 = \frac{5}{2} < \pi$. Sie liegt näher bei 0, als die der Funktion $\sin(x)$. Der Graph der Funktion $\sin(\frac{2\pi}{5} \cdot x)$ entsteht durch eine Stauchung des Graphen von $\sin(x)$ in x-Richtung.

x	$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \sin(2x)$	$h(x) = \sin(\frac{1}{4}x)$	$p(x) = \sin(\frac{2\pi}{5} \cdot x)$
-4π	0	0	0	0.083
-10	0.544	-0.913	-0.598	0
-2π	0	0	-1	-0.999
-5	0.959	0.544	-0.949	0
$-\pi$	0	0	-0.707	0.722
0	0	0	0	0
π	0	0	0.707107	-0.722
5	-0.959	-0.544	0.949	0
2π	0	0	1	0.999
10	-0.544	0.913	0.598	0
4π	0	0	0	-0.083



4.3.1 Weitere Aufgaben

Beispiel 4.19 Translationen **DG6A5Y**

Wir betrachten die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$. Sie ist definiert, falls das Argument (hier x) im Intervall $[0; \infty[$ liegt.

a) In der Funktion $r(x) = f(x-3) = \sqrt{x-3}$ können wir $x = 3$ einsetzen und erhalten

$$r(3) = f(3-3) = \sqrt{3-3} = \sqrt{0} = 0$$

Also ist $x = 3$ die Stelle, die den Definitionsbereich nach unten begrenzt. Geben Sie die untere Grenze des Definitionsbereichs der folgenden Funktionen an:

$$g(x) = f(x-5) = \sqrt{x-5}, \; h(x) = f(x+14) = \sqrt{x+14}$$

$$k(x) = f(x-10) + 2 = \sqrt{x-10} + 2, \; p(x) = f(x + \frac{1}{4}) - 3 = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - 3$$

b) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x-5)$ für x den Wert 5 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert ... einsetze."
- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x-5)$ jetzt bei 5 so, wie ursprüngliche Funktion bei ... war."

Schreiben Sie die obigen Sätze auch allgemein für die Funktion $f(x-c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ auf.

c) Zeichnen Sie die Graphen von $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $p(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie ebenfalls den Vektor ein um den die Funktion $f(x)$ jeweils verschoben wurde, um $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ oder $p(x)$ zu erhalten.

d) Ergänzen Sie nun folgenden Satz: "Die Transformation $f(x-c)+d$ verschiebt die Funktion $f(x)$ ..."

Lösung:

a) Der Definitionsbereich begrenzt an der Stelle, wo der Ausdruck unter der Wurzel gleich Null ist.

$$\begin{array}{rclcccc} g(x) & = & \sqrt{x-5} & \Rightarrow & x-5=0 & \Rightarrow & x=5 \\ h(x) & = & \sqrt{x+14} & \Rightarrow & x+14=0 & \Rightarrow & x=-14 \\ k(x) & = & \sqrt{x-10}+2 & \Rightarrow & x-10=0 & \Rightarrow & x=10 \\ p(x) & = & \sqrt{x+\frac{1}{4}}-3 & \Rightarrow & x+\frac{1}{4}=0 & \Rightarrow & x=-\frac{1}{4} \end{array}$$

b) Ergänzung:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x-5)$ für x den Wert 5 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x **den Wert 0** einsetze."

- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x-5)$ jetzt bei 5 so, wie ursprüngliche Funktion bei **der Stelle 0** war."

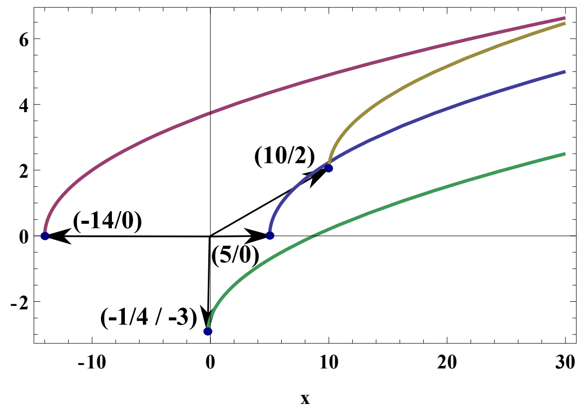
Allgemein:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x-c)$ für x den Wert c einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x **den Wert 0** einsetze."

- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x-c)$ jetzt bei c so, wie ursprüngliche Funktion bei **der Stelle 0** war."

c) Graphik unten.

d) Ergänzung: "Die Transformation $f(x-c)+d$ verschiebt die Funktion $f(x)$ um c-Einheiten in Richtung der x-Achse und um d Einheiten in Richtung der y-Achse"



Beispiel 4.20 Spiegelung 829579

Wir betrachten die Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$.

a) Ergänzen Sie die Tabelle

b) Geben Sie für alle Funktionen die Stelle an, wo der Ausdruck unter der Wurzel 0 ist. In welche Richtung auf der x-Achse dürfen Sie sich von dieser Stelle aus bewegen, damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv wird?

c) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen an.

d) Beschreiben Sie die Zeilen 3 und 5 in Worten: Was sind ihre Ähnlichkeiten? Worin unterscheiden Sie sich?

e) Erklären Sie nun die Ähnlichkeiten und Unterschiede (Zeilen 3 und 5) aufgrund der Werte in den Zeilen 2 und 4.

f) Plotten Sie nun die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$ mit Matlab oder GeoGebra.

g) Wie verändern sich die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$, falls Sie anstatt $f(x)$ die Funktion $-f(x)$ etc. plotten?

h) Vervollständigen Sie nun folgende Sätze: "Der Graph der Funktion $y = f(-x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$. "
"Der Graph der Funktion $y = -f(x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$. "

Lösung:

a) Tabelle

b)

$$\begin{array}{rcccc} f(x) = \sqrt{x} & \Rightarrow & & & x = 0 \\ g(x) = \sqrt{x-2} & \Rightarrow & x-2=0 & \Rightarrow & x = 2 \\ h(x) = \sqrt{-x-2} & \Rightarrow & -x-2=0 & \Rightarrow & x = -2 \end{array}$$

Bei $f(x)$ darf man 0 oder grössere Werte (z.B. $x = 2,\ 3$ etc.) einsetzen und der Ausdruck unter der Wurzel bleibt positiv.
Bei $g(x)$ darf man 2 oder grössere Werte (z.B. $x = 3,\ 4$ etc.) einsetzen und der Ausdruck unter der Wurzel bleibt positiv.
Bei $g(x)$ darf man -2 oder *kleinere* Werte (z.B. $x = -3,\ -4$ etc.) einsetzen und der Ausdruck unter der Wurzel bleibt positiv.

c)

$$\begin{aligned} D_f &= [0, \infty[\\ D_g &= [2, \infty[\\ D_h &=]\infty, -2[\end{aligned}$$

d) Zeilen 3 und 5 Ähnlichkeiten: In beiden treten selben Funktionswerte auf. In beiden gibt es Stellen, wo die Funktion nicht definiert ist.
Unterschiede: Die nicht definierten Funktionswerte stehen bei $\sqrt{x-2}$ am Anfang und bei $\sqrt{-x-2}$ am Ende. $\sqrt{x-2}$ nimmt monoton zu und $\sqrt{-x-2}$ nimmt monoton ab.

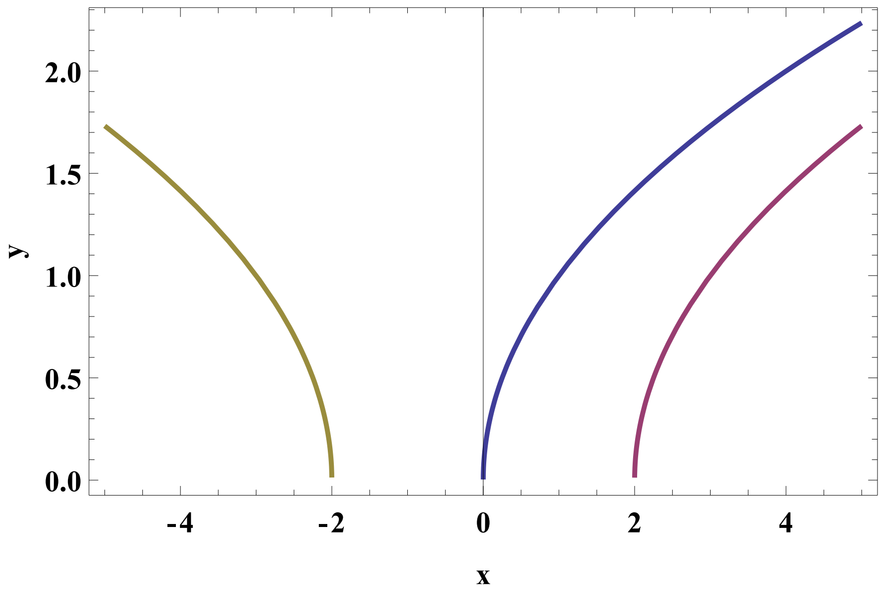
e) Ähnlichkeiten: Durch die Operationen $\sqrt{x-2}$ und $\sqrt{-x-2}$ ergibt sich aus den angegebenen x-Werten die selben Mengen. Unterschied: Die Reihenfolge der Zahlen ist umgekehrt. Wir nun aus diesen Zahlen die Wurzel gezogen, entsteht die zweimal die selbe Form des Graphen, nur ist der eine das Spiegelbild des anderen.

f) Graphik unten

g) Die Graphen erscheinen unter der y-Achse auf dem Kopf gestellt.

h) "Der Graph der Funktion $y = f(-x)$ ergibt sich durch Spiegelung des Graphen $f(x)$ an der y-Achse. "
"Der Graph der Funktion $y = -f(x)$ ergibt sich durch Spiegelung des Graphen $f(x)$ an der x-Achse "

x	-18	-11	-6	-3	-2	2	3	6	11	18
$x-2$	-20	-13	-8	-5	-4	0	1	4	9	16
$g(x) = \sqrt{x-2}$	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	0	1	2	3	4
$-x-2$	16	9	4	1	0	-4	-5	-8	-13	-20
$h(x) = \sqrt{-x-2}$	4	3	2	1	0	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.



Beispiel 4.21 Spiegelung **879G1J**

Wir betrachten die Funktion $g(x) = 1 - 2x + x^2 + x^3$. Bestimmen Sie

a) die Funktion $h(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der x-Achse ist.

b) die Funktion $p(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der y-Achse ist.

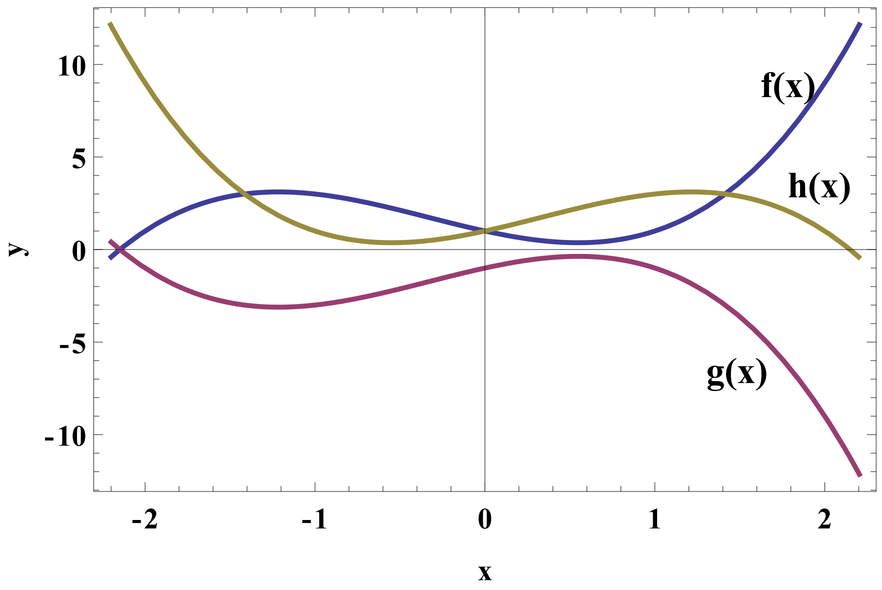
c) Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie alle drei Funktionen in Matlab oder GeoGebra im Bereich $x \in [-2.2; 2.2]$ plotten.

Lösung:

a) $h(x) = -g(x) = -(1 - 2x + x^2 + x^3) = -1 + 2x - x^2 - x^3$

b) $p(x) = g(-x) = 1 - 2(-x) + (-x)^2 + (-x)^3 = 1 + 2x + x^2 - x^3$

c) Graphik unten



4.4 Die allgemeine Sinusfunktion; Phase und Amplitude

Infobox Eigenschaften der allgemeinen Sinusfunktion

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin\big(\omega \cdot (t + c)\big)$$

hat

- A die Amplitude,
- die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- die charakteristische Nullstelle bei $-c$

Der Nullphasenwinkel ist $\varphi = c \cdot \omega$.
Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin\big(\omega \cdot t + \varphi\big)$$

hat

- die Amplitude A ,
- die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- und den Nullphasenwinkel φ

Die charakteristische Nullstelle liegt bei $-\frac{\varphi}{\omega}$.

Beispiel 4.22 Charakteristische Grössen einer harmonischen Schwingung
IMSGR1

$$f(t) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-\frac{1}{2})\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi t}{5}t - \frac{\pi}{5})\right)$$

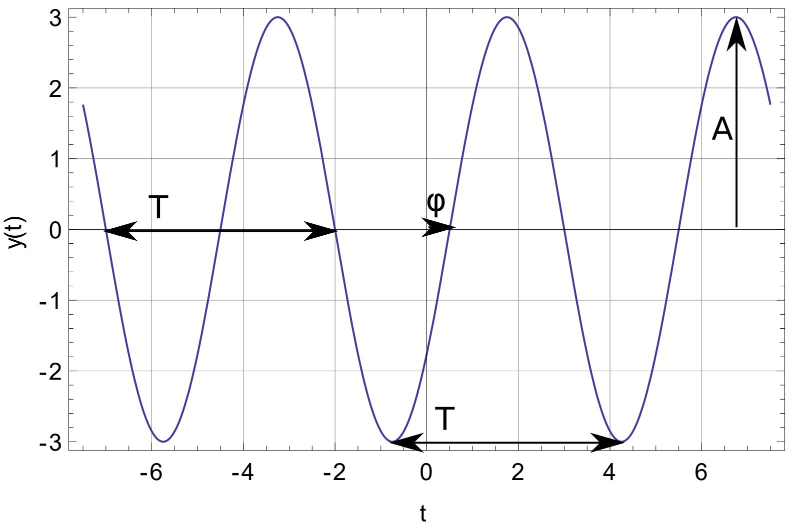
a) Geben Sie für $f(t)$ den Nullphasenwinkel φ, die Amplitude A und die Periode T an.

b) Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der Funktionen.

c) Wo erscheinen die Charakteristischen Grössen im Graphen?

Lösung:

- die Amplitude $A = 3$,
- $\omega = \frac{2\pi}{5}$ und die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 5$,
- die charakteristische Nullstelle bei $\frac{1}{2}$,
- und den Nullphasenwinkel $-\frac{\pi}{5}$).



Beispiel 4.23 Charakteristische Grössen einer harmonischen Schwingung
IMSGR1

$$f(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{3} - \frac{4\pi}{15}\right)$$

a) Geben Sie für $f(t)$ den Nullphasenwinkel φ, die Amplitude A und die Periode T an.

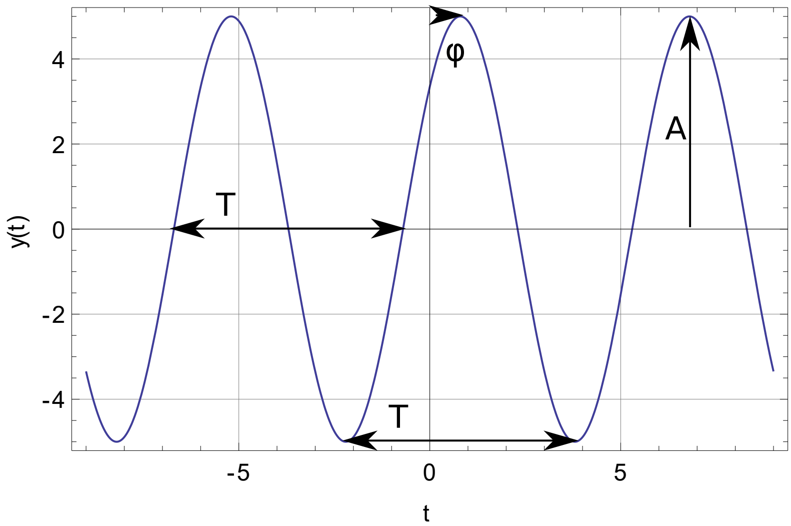
b) Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der Funktionen.

c) Wo erscheinen die Charakteristischen Grössen im Graphen?

Lösung:
Wir formen um und erhalten

$$f(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}(t - \frac{4}{5})\right)$$

- die Amplitude $A = 5$,
- $\omega = \frac{\pi}{3}$ und die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6$,
- die charakteristische Nullstelle bei $\frac{4}{5}$,
- und den Nullphasenwinkel $-\frac{4\pi}{15}$).



Beispiel 4.24 Trigonometrische Funktionen zeichnen **4HG9L9**

Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der folgenden Funktionen. Zeichnen Sie für jeden Graph den Nullphasenwinkel φ, Amplitude A und Periode T ein.

a) $f(x) = 2\sin(x)$

b) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $f(x) = \cos(-x) - 2$

f) $f(x) = \sin(x - \pi/2)$

g) $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$

h) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{4}\right)$

i) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$

j) $f(x) = 5\cos\left(\frac{\pi x}{2} - 2\right)$

k) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{5} + 3\right) - 2$

l) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{3} - 1\right)$

Lösung:
Achtung bei Funktionen, die eine Verschiebung wie auch eine Kreisfrequenz enthalten:

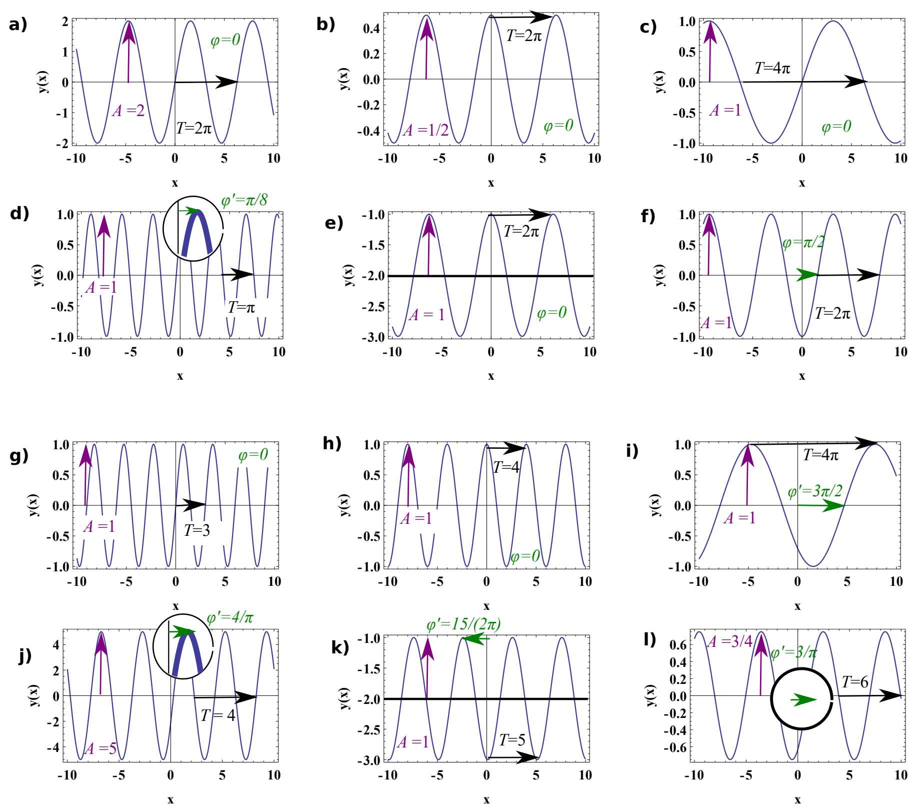
a) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2(x - \frac{\pi}{8})\right)$. Die Funktion wird zu $x = \frac{\pi}{8}$ verschoben und *dann* gestaucht mit $\omega = 2$.

b) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot (x - \frac{3\pi}{2})\right)$. Die Funktion wird zu $x = \frac{3\pi}{2}$ verschoben und *dann* gestreckt mit $\omega = \frac{1}{2}$.

c) $f(x) = 5\cos\left(\frac{\pi x}{2} - 2\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (x - \frac{2\cdot 2}{\pi})\right)$. Die Funktion wird zu $x = \frac{4}{\pi}$ verschoben und *dann* gestaucht mit $\omega = \frac{\pi}{2}$.

d) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{5} + 3\right) - 2 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}(x + \frac{5\cdot 3}{2\pi})\right) - 2$. Die Funktion wird zu $x = -\frac{15}{2\pi}$ verschoben und *dann* gestaucht mit $\omega = \frac{2\pi}{5}$.

e) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{3} - 1\right) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}(x - \frac{3}{\pi}\right)$. Die Funktion wird zu $x = \frac{3}{\pi}$ verschoben und *dann* gestaucht mit $\omega = \frac{\pi}{3}$.



Beispiel 4.25 Additonstheoreme Vorbereitung **ECQ2MU**

a) Wie hängen $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ und $\sin(\alpha)$ zusammen?

b) Wie hängen $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ und $\cos(\alpha)$ zusammen?

Lösung:

Wir plotten die Funktionen und sehen:

a) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$

b) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$

4.5 Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

Satz Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Es ist eine Kurzschreibweise, wenn wir $\pm$ verwenden. Gemeint ist, dass $\pm$ entweder alle oberen Zeichen ausgelsen werden, oder nur die unteren.

Beispiel 4.26 Additonstheoreme Vorbereitung **EBP1NU**

Argumentieren Sie anhand eines Zeigers am Einheitskreis

a) Berechnen Sie für $\alpha = \frac{\pi}{18}$ die Werte

$$\sin(\alpha),\ \cos(\alpha),\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}),\ \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}),\ \sin(-\alpha),\ \cos(-\alpha)$$

Welche Zusammenhänge erkennen Sie?

b) Wie lässt sich aus $\sin(-\alpha)$ das Vorzeichen aus dem trigonometrischen Ausdruck beseitigen?

c) Wie lässt sich aus $\cos(-\alpha)$ das Vorzeichen aus dem trigonometrischen Ausdruck beseitigen?

d) Vereinfachen Sie $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$

Lösung:

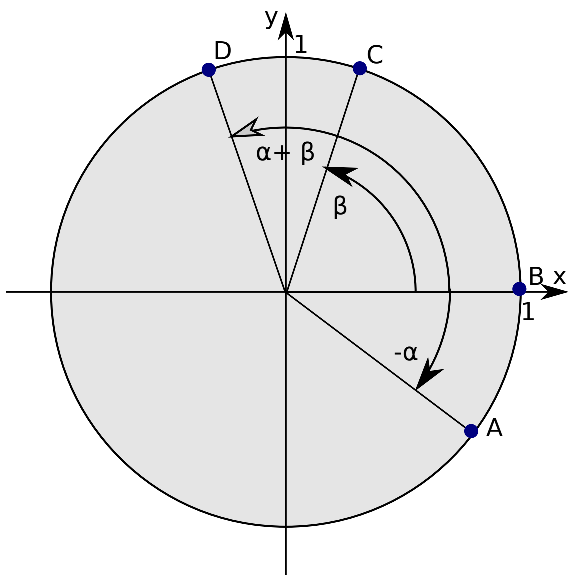
a) $\sin(\alpha) = 0.174,\ \cos(\alpha) = 0.985,\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 0.985$
$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -0.174,\ \sin(-\alpha) = -0.174,\ \cos(-\alpha) = 0.174$

b) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

c) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

d) $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

Beispiel 4.27 Herleitung Additionstheorem **IJ65F9**



a) Geben Sie die karthesischen Koordinaten der Punkte $\vec{A}, \ldots, \vec{D}$ an.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}, \; \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{C} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}, \; \vec{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix},$$

b) Verbinden Sie die Punkte in Gedanken miteinander. Zwei der Verbindungen haben die selbe Länge. Welche?

$$\vec{v} = \vec{C} - \vec{A}, \; \vec{w} = \vec{D} - \vec{B},$$

c) Wir benennen die Verbindungen, die die selbe Länge mit $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Berechnen Sie kartesischen Koordinaten dieser Vektoren.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) - \cos(-\alpha) \\ \sin(\beta) - \sin(-\alpha) \end{pmatrix}, \; \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) - 1 \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

d) Benutzen Sie die Symmetrie der Trigonometrischen Funktionen um negative Winkel in trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) - \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) + \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \; \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) - 1 \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

e) Geben Sie nun den folgenden Ausdruck an

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2$$

$$\big(\cos(\beta) - \cos(\alpha)\big)^2 + \big(\sin(\beta) + \sin(\alpha)\big)^2 = \big(\cos(\alpha+\beta) - 1\big)^2 + \big(\sin(\alpha+\beta)\big)^2$$

f) Wir notieren $\big(\sin(x)\big)^2 = \sin^2(x)$. Multiplizieren Sie den Term oben aus.

$$\begin{aligned} & \cos^2(\beta) + \cos^2(\alpha) - 2\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\alpha) + 2\sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) \\ = \; & \cos^2(\alpha+\beta) + 1^2 - 2\cos(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

g) Benutzen Sie $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (3 mal anwenden) um den Ausdruck weiter zu vereinfachen.

$$1 + 1 - 2\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) + 2\sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) = 1 + 1 - 2\cos(\alpha+\beta)$$

h) Lösen Sie nach $\cos(\alpha+\beta)$ auf.

$$\begin{aligned} 2 - 2\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) + 2\sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) &= 2 - 2\cos(\alpha+\beta) \\ -2\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) + 2\sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) &= -2\cos(\alpha+\beta) \\ \cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) &= \cos(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Beispiel 4.28 Ausdruck für $\cos(\alpha-\beta)$ **KNUQTG**

$$\cos(\alpha+\gamma) = \cos(\gamma)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\gamma)\cdot\sin(\alpha)$$

a) Setzen Sie in den Ausdruck den Winkel $\gamma = -\beta$ ein.

$$\cos\big(\alpha + (-\beta)\big) = \cos(-\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(-\beta)\cdot\sin(\alpha)$$

b) Benutzen Sie die Symmetrien-Eigenschaften um die negativen Winkel in den einfachen trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) + \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)$$

Beispiel 4.29 Additionstheorem $\sin(\alpha+\gamma)$ **8FY7QU**

$$\cos(\alpha+\gamma) = \cos(\gamma)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\gamma)\cdot\sin(\alpha)$$

a) Setzen Sie in den Ausdruck den Winkel $\gamma = \beta + \frac{\pi}{2}$ ein.

b) Benutzen Sie $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ und $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ um die Summen von Winkeln in den einfachen trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

c) Beseitigen Sie Summen von Winkeln in den einfachen trigonometrischen Funktionen.

d) Ersetzen Sie im letzten Ausdruck $\alpha+\beta$ durch $\alpha-\beta$ und beseitigen sie negative Winkel in den einfachen trigonometrischen Ausdrücken.

Lösung:

a) $\gamma = \beta + \frac{\pi}{2}$ einsetzen:

$$\cos(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\beta + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta + \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(\alpha)$$

b) Summen von Winkeln beseitigen

$$-\sin(\alpha + \beta) = -\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

also

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

c) $\alpha - \beta$ einsetzen

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(-\beta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(-\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

Vereinfachen

$$\sin(\alpha - \beta) = -\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

Beispiel 4.30 Darstellung $\cos^2(\alpha)$ **AT9S8M**

Zeigen Sie, dass gilt

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha) + 1\right]$$

Werten Sie dazu

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

für $\beta = \alpha$ aus.

Lösung:

$$\begin{array}{ccccc} \cos(2\alpha) & = & \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & & | + 1 \\ \cos(2\alpha) + 1 & = & 2\cos^2(\alpha) & & | \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha) + 1\right] & = & \cos^2(\alpha) & & \end{array}$$

4.6 Arkus-Funktionen

Definition Arkustangens-Funktion

Die Arkustangens-Funktion ordnet den Komponenten x und y den Winkel φ zu.

$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 180^\circ & x < 0 \end{cases}$$

Dabei sind x, $y \in \mathbb{R}$

Wir nennen die Komponenten $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ auch **Kartesische Koordinaten**. Für jeden Vektor können wir daraus Betrag und φ (den Winkel, den $\vec{v}$ mit der x-Achse einschliesst) berechnen. Das Paar v und φ bestimmt einen Vektor eindeutig. Wir nennen dieses Zahlenpaar die **Polar-Koordinaten** des Vektors $\vec{v}$.

Beispiel 4.31 Kartesische- $\to$ Polar-Koordinaten **R3601V**

Berechnen Sie die Polarkoordinaten

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7.96956 \\ -0.697246 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $a = 8,\ \varphi = -5^\circ$

b) $b = 1,\ \varphi = 60^\circ$

c) $c = 2,\ \varphi = -60^\circ$

d) $d = 10,\ \varphi = 120^\circ$

e) $e = 2,\ \varphi = 15^\circ$

f) $f = \sqrt{2},\ \varphi = 270^\circ$

Infobox Inverse trigonometrische Funktionen

- Der Zwischenwinkel zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ wird berechnet über

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \odot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$

  Dabei erhalten wir korrekterweise einen Winkel $0 \le \varphi < 180^\circ$ zwischen den Vektoren, und es wird korrekterweise kein Drehsinn berücksichtigt.

Beispiel 4.32 Neigungswinkel **084725**

Berechne den Neigungswinkel für ein Gelände mit 5%, 50%, 100% und 200% Neigung.

Lösung:

Bei einer Neigung von 5% ist das Gelände parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 100 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Neigunswinkel ist also

$$\varphi = \arctan(\frac{5}{100}) = 2.86^\circ$$

Analog

$$\begin{aligned}\varphi_{50} &= \arctan(\tfrac{50}{100}) = 26.57^\circ\\ \varphi_{100} &= \arctan(\tfrac{100}{100}) = 45^\circ\\ \varphi_{200} &= \arctan(\tfrac{200}{100}) = 63.43^\circ\end{aligned}$$

4.7 Zerlegung und Überlagerungen von Schwingungen

Kosinus

Satz Zerlegung der Kosinus-Schwingungen

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

kann geschrieben werden als

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)\ .$$

mit

- $a = A \cdot \cos(\varphi)$
- $b = -A \cdot \sin(\varphi)$.

Beispiel 4.33 Zerlegung der Cosinus-Schwingungen **NFCHGJ**

Gegeben $f(t) = \sqrt{41} \cdot \cos(1 \cdot t - 0.674741)$ Zerlegen Sie das Signal in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)\ .$$

Lösung:

Wir berechnen $b = -\sqrt{41} \cdot \sin(-0.674741) = 4$ und $a = \sqrt{41} \cdot \cos(-0.674741) = 5$. Also

$$f(t) = 5 \cdot \cos(1 \cdot t) + 4 \cdot \sin(1 \cdot t)$$

Beispiel 4.34 Zerlegung der Sinus-Schwingungen **DR61E5**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)\ .$$

a) $f(t) = \sqrt{5} \cdot \cos(4t + 1.10715)$

b) $f(t) = 5 \cdot \cos(5t + \frac{\pi}{2})$

c) $f(t) = \sqrt{74} \cdot \cos(2t + 0.950547)$

Lösung:
Wir benutzen $a = A \cdot \cos(\varphi)$ und $b = -A \cdot \sin(\varphi)$.

a) Wir berechnen $b = -\sqrt{5} \cdot \sin(1.10715) = -2$ und $a = \sqrt{5} \cdot \cos(1.10715) \cdot 1 = 1$. Also

$$f(t) = 1 \cdot \cos(4 \cdot t) - 2 \cdot \sin(4 \cdot t)$$

b) Wir berechnen $b = 5 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = -5$ und $a = 5 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$f(t) = 5 \cdot \cos(5 \cdot t) + 0$$

c) Wir berechnen $b = \sqrt{74} \cdot \sin(0.950547) = 5$ und $a = \cos(0.950547) \cdot 1 = 7$. Also

$$f(t) = 7 \cdot \cos(2 \cdot t) + 5 \cdot \sin(2 \cdot t)$$

Satz Überlagerung gleichfrequenter $\cos$ / $\sin$ Schwingungen zu $\cos$

Für die Überlagerung

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

gilt

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit

- Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder gleichbedeutend, Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Nullphasenwinkel $\varphi = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \begin{cases} \pi & (a < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel 4.35 Überlagerung gleichfrequenter $\cos$ / $\sin$ Schwingungen IYPB5L

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t\varphi)$$

an.

$$f(t) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \cos(t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(t)$$

Lösung:
Wir lesen aus $\omega = 1$ ($f = \frac{1}{2\pi}$) und erhalten $A = \sqrt{\frac{75+25}{4}} = 5$ und $\varphi = -\arctan(\frac{5}{5 \cdot \sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$. Also

$$f(t) = \underbrace{5}_{=A} \cdot \cos(\underbrace{1}_{\omega} \cdot t \underbrace{-\frac{\pi}{6}}_{=\varphi})$$

Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude der Superposition.

Beispiel 4.36 Überlagerung gleichfrequenter $\cos$ / $\sin$ **Schwingungen** **AU8VZS**

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t \varphi)$$

an.

a) $f(t) = 1.76336 \cdot \cos(18t) + 2.42705 \sin(18t)$

b) $f(t) = \cos(10t) + \sqrt{3} \cdot \sin(10t)$

c) $f(t) = 3.36588 \cdot \cos(7t) + 2.16121 \cdot \sin(7t)$

Lösung:

a) Wir lesen aus $\omega = 18$ ($f = \frac{9}{\pi}$) und erhalten

$$A = \sqrt{(1.76336)^2 + (2.42705)^2} = 3$$

und

$$\varphi = -\arctan(\frac{2.42705}{1.76336}) \approx -0.942476 \ .$$

Also

$$f(t) = 3 \cdot \cos(18 \cdot t - 0.942476)$$

b) Wir lesen aus $\omega = 10$ ($f = \frac{5}{\pi}$)und erhalten

$$A = \sqrt{1^2 + 3} = 2$$

und

$$\varphi = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{1}) = -\frac{\pi}{3} \ .$$

Also

$$f(t) = 2 \cdot \cos(10 \cdot t - \frac{\pi}{3})$$

c) Wir lesen aus $\omega = 7$ ($f = \frac{7}{2\pi}$)und erhalten

$$A = \sqrt{(3.36588)^2 + (2.16121)^2} = 4$$

und

$$\varphi = \arctan(\frac{2.16121}{3.36588}) \approx -0.570797 \ .$$

Also

$$f(t) = 4 \cdot \cos(7 \cdot t - 0.570797)$$

Sinus

Satz Zerlegung der Sinus-Schwingungen

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

kann geschrieben werden als

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

mit

- $a = A \cdot \sin(\varphi)$
- $b = A \cdot \cos(\varphi)$.

Beispiel 4.37 Zerlegung der Sinus-Schwingungen

Gegeben $f(t) = \sqrt{41} \cdot \sin(1 \cdot t - 0.674741)$ Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

Lösung:

Wir berechnen $b = \sqrt{41} \cdot \cos(-0.674741) = 5$ und $a = \sqrt{41} \cdot \sin(-0.674741) = -4$. Also

$$f(t) = -4 \cdot \cos(1 \cdot t) + 5 \cdot \sin(1 \cdot t)$$

Beispiel 4.38 Zerlegung der Sinus-Schwingungen **Z4DX95**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

a) $f(t) = \sqrt{5} \cdot \sin(4t + 1.10715)$

b) $f(t) = 5 \cdot \sin(5t + \frac{\pi}{2})$

c) $f(t) = \sqrt{74} \cdot \sin(2t + 0.950547)$

Lösung:

Wir benutzen $a = A \cdot \sin(\varphi)$ und $b = A \cdot \cos(\varphi)$.

a) Wir berechnen $b = \sqrt{5} \cdot \cos(1.10715) = 1$ und $a = \sin(1.10715) \cdot 1 = 2$. Also

$$f(t) = 2 \cdot \cos(4 \cdot t) + 1 \cdot \sin(4 \cdot t)$$

b) Wir berechnen $b = 5 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $a = 5 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = 5$

$$f(t) = 5 \cdot \cos(5 \cdot t) + 0$$

c) Wir berechnen $b = \sqrt{74} \cdot \cos(0.950547) = 5$ und $a = \sin(0.950547) \cdot 1 = 7$. Also

$$f(t) = 7 \cdot \cos(2 \cdot t) + 5 \cdot \sin(2 \cdot t)$$

Satz Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ **Schwingungen**

Für die Überlagerung

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

gilt

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit

- Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder gleichbedeutend, Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Nullphasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \begin{cases} \pi & (b < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel 4.39 Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ **Schwingungen**

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t\varphi)$$

an.

$$f(t) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \cos(t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(t)$$

Lösung:

Wir lesen aus $\omega = 1$ ($f = \frac{1}{2\pi}$) und erhalten $A = \sqrt{\frac{75+25}{4}} = 5$ und $\varphi = \arctan(\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{5}) = \frac{\pi}{3}$. Also

$$f(t) = \underbrace{5}_{A} \cdot \sin(\underbrace{1}_{\omega} \cdot t + \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\varphi})$$

Beispiel 4.40 Überlagerung gleichfrequenter $\cos / \sin$ **Schwingungen** **SXWHB9**

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t\varphi)$$

an.

a) $f(t) = 1.76336 \cdot \cos(18t) + 2.42705 \sin(18t)$

b) $f(t) = \cos(10t) + \sqrt{3} \cdot \sin(10t)$

c) $f(t) = 3.36588 \cdot \cos(7t) + 2.16121 \cdot \sin(7t)$

Lösung:

a) Wir lesen aus $\omega = 18$ ($f = \frac{9}{\pi}$) und erhalten

$$A = \sqrt{(1.76336)^2 + (2.42705)^2} = 3$$

und

$$\varphi = \arctan(\frac{1.76336}{2.42705}) \approx \frac{\pi}{5} .$$

Also

$$f(t) = 3 \cdot \sin(18 \cdot t + \frac{\pi}{5})$$

b) Wir lesen aus $\omega = 10$ ($f = \frac{5}{\pi}$)und erhalten

$$A = \sqrt{1^2 + 3} = 2$$

und

$$\varphi = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6} .$$

Also

$$f(t) = 2 \cdot \sin(10 \cdot t + \frac{\pi}{6})$$

c) Wir lesen aus $\omega = 7$ ($f = \frac{7}{2\pi}$)und erhalten

$$A = \sqrt{(3.36588)^2 + (2.16121)^2} = 4$$

und

$$\varphi = \arctan(\frac{3.36588}{2.16121}) \approx 1 .$$

Also

$$f(t) = 4 \cdot \sin(7 \cdot t + 1)$$

4.8 Übungen

Beispiel 4.41 Phasenwinkel beim Sinus **QSB28F**

Allgemein gilt

$$A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

a) Für $A = 10$ und $\varphi = 2$ berechne a und b

b) Berechne nun allgemein für A und φ die entsprechenden Amplituden a und b.

Lösung:
Wir benutzen das Additionstheorem für die Sinusfunktion

$$A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \{\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\varphi)\}$$

Wir vergleichen mit dem Ausdruck in der Aufgabenstellung (Koeffizientenvergleich) und sehen

$$A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \sin(\omega \cdot t) \cdot \underbrace{A \cdot \cos(\varphi)}_{=b} + \cos(\omega \cdot t) \cdot \underbrace{A \cdot \sin(\varphi)}_{=a}$$

Mit den gegebenen Zahlen erhalten wir also

$$a = 10 \cdot \sin(2) = 9.09297 \text{ und } b = 10 \cdot \cos(2) = -4.16147$$

d.h.

$$10 \cdot \sin(\omega \cdot t + 2) = 9.09297 \cdot \cos(\omega \cdot t) - 4.16147 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Beispiel 4.42 Phasenwinkel beim Cosinus und beim Sinus **R2KFYJ**

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $A\cos(\omega t + \varphi)$

a) $1.36079\cos(t\omega) - 2.67362\sin(t\omega)$

b) $-1.13601\cos(t\omega) - 4.86924\sin(t\omega)$

c) $-9.36457\cos(t\omega) + 3.50783\sin(t\omega)$

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $A\sin(\omega t + \varphi)$

d) $0.850987\sin(t\omega) - 2.87677\cos(t\omega)$

e) $-8.49737\sin(t\omega) - 9.83843\cos(t\omega)$

f) $30.0068\cos(t\omega) - 13.7328\sin(t\omega)$

Lösung:

a) $3\cos(t\omega + 1.1)$

b) $5\cos(t\omega + 1.8)$

c) $10\cos(t\omega + 3.5)$

d) $3\sin(t\omega + 5) = 3\sin(t\omega - 1.28318)$

e) $13\sin(t\omega + 4)$

f) $33\sin(tw + 2)$

Beispiel 4.43 Phasenwinkel beim Cosinus und beim Sinus **TEA3WI**

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $a\cos(t\omega) + b\sin(t\omega)$

a) $8.544\cos(\omega t - 1.21203)$

b) $5.83095\cos(\omega t + 5.25281)$

c) $2.82843\cos(\omega t + 5.49779)$

d) $12.0416\cos(\omega t - 0.844154)$

e) $10.6301\sin(\omega t + 5.56436)$

f) $2.82843\sin(\omega t - 0.785398)$

g) $9.21954\sin(\omega t - 0.86217)$

h) $9.43398\sin(\omega t + 5.27099)$

Lösung:

```
%syms w t
%li=8.544*cos(w*t-1.21203)    ;
%vpa(expand(li))
%  3*cos (t*w)+ 8*sin(t*w)
```

a) $3\cos(t\omega) + 8\sin(t\omega)$

b) $3\cos(t\omega) + 5\sin(t\omega)$

c) $2\cos(t\omega) + 2\sin(t\omega)$

d) $8\cos(t\omega) + 9\sin(t\omega)$

e) $-7\cos(t\omega) + 8\sin(t\omega)$

f) $-2\cos(t\omega) + 2\sin(t\omega)$

g) $-7\cos(t\omega) + 6\sin(t\omega)$

h) $-8\cos(t\omega) + 5\sin(t\omega)$

C