BOOT - EUT

Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Dr. D. Adams
Institut für Geistes- und Naturwissenschaft
donat.adams@fhnw.ch
Büro: 5.1C19

Zürich, 15. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

KAPITEL 1

Brüche mit Parametern

Lernziele 1.0 Algebraische Terme und Brüche

- Die Studierenden können Terme ausmultiplizieren, u.a. auch Binome.
- Sie können Terme faktorisieren.
- Sie können Doppelbrüche auf einen Bruchstrich schreiben.
- Sie können Brüche (auch mit Parametern) addieren.

1.1 Algebraische Terme

Infobox 1.1 Ausmultiplizieren und faktorisieren

- Ausmultiplizieren:

$$(x+2)\cdot(x-7) = x^2 - 7x + 2x - 14 = x^2 - 5x - 14$$

- Binom

$$(x+2)^2 = x^2 + 2\cdot 2x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

- Binom

$$(x+2)\cdot(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

Wird der Prozess von rechts nach links gelesen, sprechen wir von **faktorisieren**.

Beispiel 1.1 Ausmultiplizieren **4L527D**

a) $(3x-4)\cdot(4x+1)$

b) $(4h-5)^2$

c) $(x+2i)\cdot(x-2i)$

d) $(a-b+c)^2$

Lösung:

a) $(3x-4)\cdot(4x+1)$

$$= 3x\cdot 4x + 3x\cdot 1 - 4\cdot 4x - 4\cdot 1 = 12x^2 + 3x - 16x - 4 = 12x^2 - 13x - 4$$

b) $(4h-5)^2$

$$= (4h-5)(4h-5) = 16h^2 - 20h - 20h + 25 = 16h^2 - 40h + 25$$

c) $(x+2i)\cdot(x-2i)$

$$= x^2 - (2i)^2 = x^2 - 4i^2$$

d) $(a-b+c)^2$

$$= (a-b+c)(a-b+c) = a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + ac - bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

Beispiel 1.2 Faktorisieren **1G2FL1**

a) $2x^2 - 14x + 24$

b) $a^4 - \frac{1}{16}$

Lösung:

a) $2x^2 - 14x + 24$

$$= 2(x^2 - 7x + 12) = 2(x-3)(x-4)$$

b) $a^4 - \frac{1}{16}$

$$= \left(a^2\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)$$

Weitere Faktorisierung des ersten Terms:

$$a^2 - \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)$$

Und zusammen:

$$a^4 - \frac{1}{16} = \left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)$$

1.2 Brüche

Infobox 1.2 Doppelbrüche

- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Dies gilt nur, falls keiner der Nenner 0 ist.

Beispiel 1.3 Bruchrechnen **Q2YL9S**

Überprüfe die Rechengesetze mit Zahlenbeispielen. Schreiben Sie dazu ganze Zahlen als Brüche z.B. $5 = \frac{10}{2}$ oder $2 = \frac{6}{3}$

Lösung:

a) $\frac{10}{2} \cdot \frac{15}{3} = \frac{10 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 25$. Ohne Rechengesetz:

$$\frac{10}{2} \cdot \frac{15}{3} = 5 \cdot 5 = 25$$

b) $\frac{\frac{12}{6}}{2} = \frac{12}{6 \cdot 2} = 1$. Ohne Rechengesetz:

$$\frac{\frac{12}{6}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

c) $\frac{4}{\frac{6}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$. Ohne Rechengesetz

$$\frac{4}{\frac{6}{3}} = \frac{4}{2} = 2$$

d) $\frac{\frac{8}{2}}{\frac{6}{3}} = \frac{8 \cdot 3}{2 \cdot 6} = \frac{4}{2} = 2$. Ohne Rechengesetz:

$$\frac{\frac{8}{2}}{\frac{6}{3}} = \frac{4}{2} = 2$$

Beispiel 1.4 Bruchrechnen **P1XQ8T**

Vereinfache. Schreibe die Ausdrücke zuerst auf einen Bruchstrich und kürze dann.

a) $1/3 \cdot 2/3$

b) $2/4 \cdot 6/7$

c) $\frac{6/3}{3/4}$

d) $\frac{11/12}{6/3}$

e) $x/a \cdot 2/3$

f) $2/a \cdot x/7$

g) $\frac{x/a}{3/4}$

h) $\frac{x/12}{6/a}$

Brüche können addiert werden, in dem sie gleichnamig gemacht werden. Dafür wird jeder Bruch mit den Nennern der anderen Brüche erweitert. Es lohnt sich zuerst zu untersuchen, ob ein Nenner einen schon einen anderen Nenner enthält. Dann genügt es mit einem dieser Faktoren zum zu erweitern.

Beispiel 1.5 Addition von Brüchen **FQHMKK**

Addiere die Brüche

$$A = \frac{2}{x^2 - 16} + \frac{3}{4 - x}$$

Lösung:

Wir bemerken, dass $x^2 - 16 = (x-4) \cdot (x+4)$ und $(4-x) = (-1) \cdot (x-4)$. Also ist der gemeinsame Nenner $x^2 - 16$. Wir erweitern

$$A = \frac{2}{x^2 - 16} + \frac{3 \cdot (-1) \cdot (x+4)}{(x-4) \cdot (x+4)} = \frac{2}{x^2 - 16} - \frac{3 \cdot (x+4)}{x^2 - 16}$$

Jetzt können wir den Ausdruck auf einen gemeinsamen Bruchstrich schreiben

$$A = \frac{2 - 3 \cdot (x+4)}{x^2 - 16} = \frac{2 - 3x - 12}{x^2 - 16} = \frac{-3x - 10}{x^2 - 16}$$

KAPITEL 2

Exponenten und Wurzeln

Lernziele 2.0 Exponenten und Wurzeln

- Die Studierenden können Terme mit Wurzeln vereinfachen
- Sie kennen die Potenzgesetze

2.1 Wurzeln

Satz 2.1 Rechengesetze für Wurzeln

Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

i) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot = \sqrt[n]{a \cdot b}$

ii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Aber $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ und $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.
Die Wurzelfunktion ist die Umkehrfunktion der Quadratfunktion, d.h. für $x > 0$

$$\sqrt{x^2} = x, \text{ aber auch } (\sqrt{x})^2 = x\ .$$

Beispiel 2.1 Wuzeln **QX3AAR**

Vereinfachen Sie so weit wie möglich

a) $\sqrt{80}$

b) $\sqrt{\frac{14}{81}}$

c) $\sqrt{(-3)^2}$

d) $\sqrt{x^2}$

e) $\sqrt{20a^4b^2}$

f) $\sqrt{4+9}$

Lösung:

a)
$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

b)
$$\sqrt{\frac{14}{81}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{14}}{9}$$

c) $\sqrt{(-3)^2} = 3$

d)
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

e)
$$\sqrt{20a^4b^2} = \sqrt{4 \cdot 5 \cdot a^4 \cdot b^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{b^2} = 2a^2b\sqrt{5}$$

f)
$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

2.2 Potenzgesetze

Definition 2.1 Potenz

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n}$$

Zahlenbeispiele sind $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ und $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Daraus ergeben sich die ersten Potenzgesetze.

Satz 2.2 Potenzgesetze 1

$$\begin{aligned} a^{n+m} &= a^n \cdot a^m \\ a^{n \cdot m} &= \left(a^n\right)^m \end{aligned}$$

Zunächst beschränkt man die Potenzgesetze auf $n, m \in \mathbb{N}$, also z.B. $n = 3$, $m = 4$.

Achtung, meistens ist $a^{n \cdot m} = a^n \cdot a^m$ oder $a^{n+m} = a^n + a^m$ falsch. Bei der Evaluation von Ausdrücken kennen sie bereits “Punkt vor Stricht”. Potenzen binden noch stärker als “Punkt”. Deshalb merken wir uns

Infobox 2.1 Prioritäten bei der Evaluation **79B4K6**

- Exponent vor Punkt
- und Punkt vor Strich

Beispiel 2.2 Zahlenbeispiele erfinden	W6Q5BR

Erfinden Sie Zahlenbeispiele, und überprüfen Sie gegebenenfalls mit dem Taschenrechner die Potenzgesetze.

Lösung:

Wir wählen $a = 5$, $n = 3$ und $m = 4$. Dann erhalten wir

$$5^{3+4} = 5^3 \cdot 5^4$$

Mit den Taschenrechner erhalten wir

$$78\,125 = 125 \cdot 625 \;\Rightarrow\; 78125 = 78125$$

Dann wählen wir $a = 2$, $n = 3$ und $m = 4$. So erhalten wir

$$2^{3\cdot 4} = \left(2^3\right)^4$$

Der Taschenrechner berechnet

$$4096 = \left(8\right)^4 \;\Rightarrow\; 4096 = 4096$$

Beispiel 2.3 Potenzgesetze	HLU3MW

Sind die folgenden Ausdrücke korrekt?

a) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^2 = 3^{11}$

b) $x^2 \cdot (x^3 + x^4) = x^9$

c) $a^{3m} \cdot a^{2m} \cdot a^m = a^{6m}$

d) $x^{m+4} = x^m + x^4$

e) $(a^6 + a^4)^2 = a^{12} + 2a^10 + a^8$

f) $5^{m+n} = 5^m \cdot 5^{\cdot}n$

g) $(x^8 + x^6 - x^5) : x^2 = x^6 + x^4 - x^3$

h) $5^3 \cdot 2^3 = 10^6$

i) $(2^3)^2 = 2^6$

j) $(x^3)^m = x^{3m}$

k) $(d^5 e^3)^3 = d^{15} \cdot e^9$

l) $5 \cdot (m^4 + n^5)^4 = 5 \cdot (m^{16} + n^{20})$

Lösung:

Korrekt sind a, c, e, f, g, i, j, k.

2.3 Folgerungen

Wir betrachten den Ausdruck

$$5^3 \cdot 2^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \quad \cdot \quad 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Den rechten Term können wir umgruppieren

$$5 \cdot 2 \quad \cdot \quad 5 \cdot 2 \quad \cdot \quad 5 \cdot 2 = (5 \cdot 2)^3$$

Betrachten wir diese Zeilen können wir daraus schliessen, dass

$$5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3$$

Wir haben ein allgemeines Gesetz gefunden!

Satz 2.3 Potenzgesetze 2

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$
$$a^m / b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

In Worten: Falls die Exponenten gleich sind, können wir zuerst Multiplizieren oder Dividieren und das Resultat potenzieren.

Weitere allgemeine Regeln finden wir wenn wir die Ausdrücke $3^2 = 3 \cdot 3$ und $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ betrachten. Beim ersten gibt es einen Faktor drei weniger, eshalb gilt,

$$3^3/3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

Wir erstellen eine Tabelle, in der wir schrittweise links und rechts die Exponenten um 1 erniedrigen:

$$\begin{aligned} 3^3/3 &= 3^2 = 9 \\ 3^2/3 &= 3^1 = 3 \\ 3^1/3 &= 3^0 \\ 3^0/3 &= 3^{-1} \end{aligned}$$

In der zweitletzen Linie können wir zunächst nur $3^1/3 = 1$ auswerten. Daraus schliessen wir, dass es sinnvoll ist

$$3^0 = 1$$

zu definieren. Damit können wir die letzte Zeile untersuchen: Wir berechnen zunächst links $3^0/3 = 1/3$ und schliessen wieder, dass es sinnvoll ist

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

zu definieren.

Jetzt wollen wir noch herausfinden, was eine sinnvolle Definition für $a^{1/n}$ sein könnte. Es gilt ja $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$. Das sollte auch für gebrochene Exponenten gelten, wie in

$$\left(3^5\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 3^1 = 3$$

Auf der anderen Seite haben wir bereits eine Funktion — nämlich die n-te Wurzel — die aus dem Ausdruck 3^n die 3 berechnet:

$$\sqrt[5]{3^5} = 3$$

Deshalb definieren wir

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3}$$

Die Verallgemeinerung dieser Überlegungen ergibt folgende Regeln:

Satz 2.4 Potenzgesetze 3

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \text{ für } a \neq 0 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^{1/n} &= \sqrt[n]{a} \end{aligned}$$

Beispiel 2.4 Potenzgesetze **AQBY5N**

Sind die folgenden Ausdrücke korrekt?

a) $5^2 \cdot 2^3 = 10^2$

b) $4^{x+1} \cdot 5^{x+1} = 20 \cdot 20^x$

c) $\frac{36^5}{18^5} = 2^5$

d) $\frac{24^4}{8^3} = 3^3$

e) $4^{-2} \cdot 4^{-3} = 4^{-6}$

f) $5^7 \cdot 5^{-3} = 5^4$

g) $7^3 \cdot 7^4 \cdot 7^{-12} \cdot 7^5 \cdot = 1$

h) $\frac{5^{13}}{5^7} = 5^6$

i) $\frac{5^{-13}}{5^7} = 5^{-20}$

j) $81^{1/4} = 3$

k) $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$

l) $2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3}$

Lösung:

Korrekt sind a,b,c, f, g, h, i, j, k, l.

KAPITEL 3

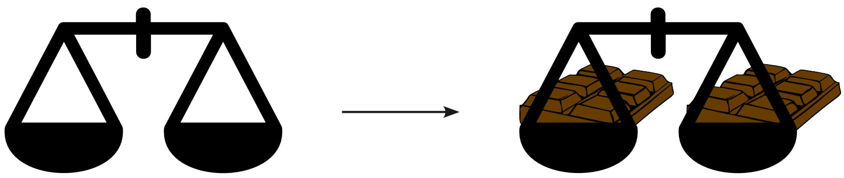
Gleichungen

Lernziele 3.0 Gleichungen

- Die Studierenden können lineare Gleichungen (auch mit Parametern) mit Äquivalenzumformung lösen.

3.1 Äquivalenzumformungen

Gleichungen stellen wir uns vor als eine Waage: auf der linken und auf der rechten Seite ist das selbe Gewicht. Solange wir auf beiden Seiten das selbe tun zum Beispiel eine Schokolade drauflegen, so lange bleibt die Waage im Gleichgewicht.



Um die Übersicht zu behalten führen wir auf der linken Seite ein Protokoll darüber, was wir jeweils links und rechts gleichzeitig tun. So können wir Gleichungen lösen .

Definition 3.1 Äquivalenzumformung

Ein **Vektor** ist durch eine Länge (Grösse) und Richtung gegeben.

- Addition und Subtraktion einer Zahl: $+p$ und $-p$
- Multiplikation $\cdot p$ und Division $: p$
- Ausserdem kann man auf beiden Seiten dieselbe Funktion angewendet werden, z.B. $\log(\ldots)$

Achtung: Schwierigkeiten entstehen dann, wenn man mit 0 multipliziert wird oder durch 0 dividiert wird. Zum Beispiel geht hier die gesamte Lösung der Gleichung verloren:

$$\begin{array}{rcl} x+4a & = & 2x \quad | \cdot 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

und hier entstehehen Ausdrücke, die nicht definiert sind:

$$\begin{array}{rcl} x+4a & = & 2x \quad | : 0 \\ ? & = & ? \end{array}$$

Diese Fälle müssen separat diskutiert werden.

Beispiel 3.1 Diskussion Sonderfälle **X7CZGI**

Lösen Sie nach x auf. Besprechen Sie die Sonderfälle.

$$2 + a \cdot x = 4a^2 \cdot x\ .$$

Lösung:
Wir lösen auf

$$\begin{array}{ccccc} 2 + a \cdot x & = & 4a^2 \cdot x & | & -a \cdot x \\ 2 & = & 4a^2 \cdot x - a \cdot x & & \\ 2 & = & (4a^2 - a) \cdot x & | & : (4a^2 - a) \\ \frac{2}{4a^2 - a} & = & x & | & \end{array}$$

Das ist die Lösung. Allerdings haben wir geteilt durch $(4a^2 - a)$. Wir müssen separat betrachten, was passiert, wenn diese Klammer gleich 0 ist. Dafür gehen wir zurück zur Gleichung, bevor durch $4a^2 - a$ geteilt wird und setzen für den Klammerausdruck 0 ein:

$$2 = 0 \cdot x$$

Da gibt es keine Lösung. Jetzt überlegen wir uns noch, welche Werte a annehmen muss, damit die Klammer 0 ergibt:

$$4a^2 - a = 0$$

d.h. $a(4a - 1) = 0$, was bedeutet, dass $a = 0$ oder $a = 1/4$. Also ist das Endresultat

$$x = \frac{2}{4a^2 - a} \text{ für } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{4}\}$$

Besonders wichtig sind lineare Gleichungen.

Beispiel 3.2 Lineare Gleichungen lösen **795806**

Lösen Sie nach x auf

$$x + 4a = a - 2x\ .$$

Lösung:

Wir bringen alle Terme, die x enthalten, nach links und alle Terme, die x nicht enthalten nach rechts:

$$\begin{array}{rcll} x+4a &=& a-2x & \mid \quad -4a+2x \\ x+2x &=& a-4a & \\ 3x &=& -3a & \mid \quad :3 \\ x &=& -a & \end{array}$$

Infobox 3.1 Lineare Gleichungen

Die lineare Gleichung in x

$$p \cdot x = a - q \cdot x$$

wird mit folgenden Schritten gelöst:

- Alle Terme, die x enthalten, nach links bringen und alle Terme, x nicht enthalten nach rechts bringen, hier $+q \cdot x$:
- Links die Lösung Variable ausklammern

$$x \cdot (p+q) = a$$

- Auf beiden Seiten durch die Klammer teilen, hier $:(p+q)$:

$$x = \frac{a}{p+q}$$

Dieses Verfahren ist eines der wichtigsten für die Grundlagen der Naturwissenschaften zum Beispiel für die Physik.

Beispiel 3.3 Lineare Gleichung mit Parameter lösen **123456**

Lösen Sie die Gleichung nach x auf:

$$2x + 3a = 5 - a$$

3.2 Umkehrfunktionen

Infobox 3.2 Gleichungen lösen

Eine Gleichung kann gelöst werden durch Anwendung der Umkehrfunktion.
Umkehrfunktionen: Sei g die Umkehrfunktion von g, dann gilt

$$g(f(x)) = x \text{ und } f(g(x)) = x$$

sofern $f(x)$ in der Definitionsmenge von $g(x)$ liegt und sofern $g(x)$ in der Definitionsmenge von $f(x)$ liegt.

Paare von Umkehrfunktionen (für $x > 0$):

- $\sqrt{x}$ und x^2
- $x^{\frac{1}{n}}$ und x^n
- e^x und $\ln(x)$

D.h. die Wurzelfunktion ist die Umkehrfunktion der Quadratfunktion, also für $x > 0$

$$\sqrt{x^2} = x \text{ aber auch } (\sqrt{x})^2 = x\ .$$

Beispiel 3.4 Umkehrfunktion **686907**

Lösen Sie nach y auf

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + C\ .$$

Lösung:

Wir vereinfachen zuerst

$$\begin{aligned} 2y^{\frac{1}{2}} &= \tfrac{x^2}{2} + C & | &\quad \cdot\tfrac{1}{2} \\ y^{\frac{1}{2}} &= \tfrac{x^2}{4} + C/2 & | &\quad (\ldots)^2 \\ y &= \left(\tfrac{x^2}{4} + C/2\right)^2 \end{aligned}$$

Satz 3.1 Produkte, Brüche, Potenzen und Wurzeln

Seien a und b reelle, positive Zahlen, und $x \in \mathbb{R}$ dann gilt

i) $|x| = b \Rightarrow x = \pm b$

ii) $x^2 = b \Rightarrow x = \pm\sqrt{b}$

Beispiel 3.5 Umkehrfunktion **PRNF84**

Lösen Sie formal nach y auf, ohne Berücksichtigung der Sonderfälle.

a) $\sqrt{y} = 2$

b) $y^2 = 2$

c) $\sqrt{y} = x + 3$

d) $y^2 = 5 - x$

e) $y^2 - x + 1 = 0$

f) $\sqrt{y} = x + 1$

KAPITEL 4

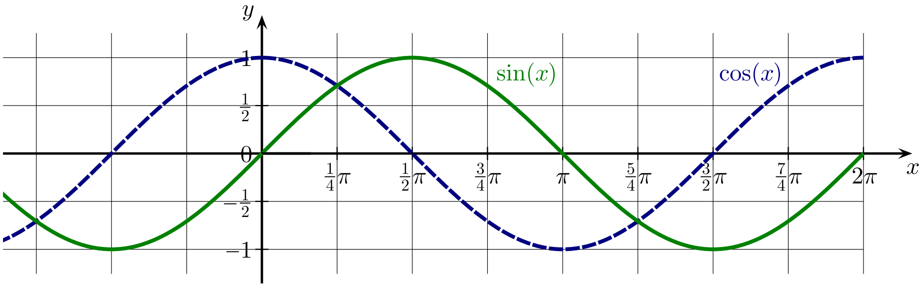
Funktionen

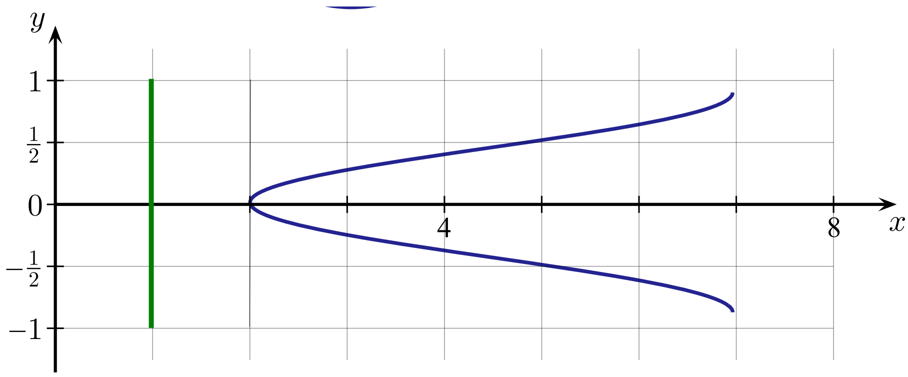
Lernziele 4.0 Funktionen

- Die Studierenden können Graphen von Funktionen erkennen.
- Sie können Funktionen über Transformationen
  - in Richtung der y-Achse verschieben
  - in Streckung in Richtung der y-Achse strecken
  - in Richtung der x-Achse strecken

Infobox 4.1 Funktionen

- Die Zuordnung $x \mapsto y = f(x)$ heisst $f(x)$ Funktion. Dabei ist x die freie Variable (Input) und y die abhängige Variable (Output).
- Wir nennen x das **Argument** von f und y den **Funktionswert**.





Vergleichen wir die beiden Graphiken oben. Die Funktion $\sin(x)$ ergibt für *jeden Input einen* Output, z.B. für $x = \frac{1}{2}\pi$ erhalten wir $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$. Deshalb ist es eine Funktion. Die Graphen in der zweiten Darstellung sind hingegen keine Funktionen. Folgen wir z.B. dem blauen Graphen, erhalten wir für $x = 5$, die beiden 'Antworten' $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Deshalb stellt der blaue Graph keine Funktion dar.
Der grüne Graph, definiert durch $x = 1$, 'produziert' für den Input $x = 1$, viele Antworten, nämlich alle Zahlen zwischen -1 und 1. Deshalb stellt auch der grüne Graph keine Funktion dar.
Fazit: Wir können uns Funktionen als Maschinen vorstellen, die zu jedem Input (x) einen Output y produzieren.

4.1 Transformationen von Funktionen

Beispiel 4.1 Transformationen mit Geogebra **G3226M**

Betrachten Sie das File auf `https://www.geogebra.org/m/nmkfm3v4`.

a) Probieren Sie zunächst alle Knöpfe ($f(x) = x^2$, $f(x) = x$, ... und Schieberegler A-D aus. Beobachten Sie, was sich dabei verändert.

b) Wählen Sie jetzt $f(x) = x^2$ aus, verändern die Schiebereglern bis die Funktion $f(x) = 1 \cdot (1x)^2 + 2$ erscheint. Was passiert mit dem Graphen, wenn Sie den Regler B verschieben? Was passiert mit dem Ausdruck $f(x) = 1 \cdot (1x)^2 + 2$? Welchen Zusammenhang erkennen Sie?

c) Wählen Sie jetzt $f(x) = \sin(x)$ aus, verändern die Schiebereglern bis die Funktion $f(x) = 1 \cdot \sin(1x)$ erscheint. Was passiert mit dem Graphen, wenn Sie den Regler A verschieben? Was passiert mit dem Ausdruck $f(x) = 1 \cdot \sin(1x)$? Welchen Zusammenhang erkennen Sie?

d) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Satz 'Transformationen' (unten). Finden Sie dort Ihre Resultate aus b) und c)?

e) Welchen Regler benutzen Sie für die Verschiebung in Richtung x-Achse?

f) Welchen Regler benutzen Sie für die Stauchung in Richtung der x-Achse?

Satz 4.1 Transformationen

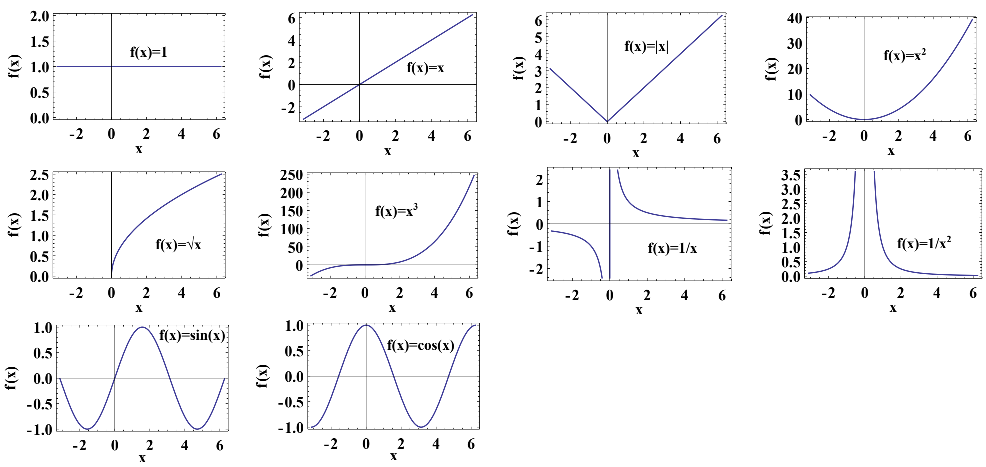
Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kann wie folgt transformiert werden:

- $f(x) + c$ Verschiebung in Richtung der y-Achse ($c > 0$)
- $a \cdot f(x)$ Streckung in Richtung der y-Achse ($a > 1$).
- $f(x - c)$ Verschiebung in Richtung der **positiven** x-Achse ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ **Stauchung** in Richtung der x-Achse ($a > 1$).

Die Transformationen entlang der y-Achse sind intuitiv, die entlang der x-Achse gehen oft gegen unsere Intuition.

Infobox 4.2 Folgerungen Transformationen

- $f(x + c)$ Verschiebung der x-Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Streckung in Richtung der x-Achse ($0 < a < 1$).



Die zehn Graphen oben zeigen die Funktionen die in der Mathematik oft verwendet werden. Sie sollten schon mit den Charakteristiken dieser Graphen vertraut sein. Das wird Ihnen helfen, die Graphen der etwas komplizierteren Funktionen, besser zu verstehen.

KAPITEL 5

Logarithmen Einführung

Lernziele 5.0 Logarithmen

- Die Studierenden kennen die Definition des Logarthmus das erste Logarithmengesetz.
- Sie können einfache Exponentialgleichungen durch Logarithmieren lösen.

5.1 Definition Logarithmus

Der Logarithmus ist eine neue Art, eine Gleichung mit Exponenten zu schreiben. Betrachten wir das Beispiel:

$$2^3 = 8$$

Diese Gleichung sagt aus, dass 2 hoch 3 gleich 8 ist. Diese Aussage können wir auch mit einem Logarithmus ausdrücken. Wir schreiben:

$$\log_2 8 = 3$$

In Worten bedeutet dies: Der Logarithmus von 8 zur Basis 2 ist gleich 3. Der Logarithmus fragt nach der Zahl, die man bei der 2 in den Exponenten schreiben muss, damit 8 entsteht.

Definition 5.1 Logarithmus **8QQ6WM**

$a, b, c \in \mathbb{R}$; $a, c > 0$, $a \neq 1$:

$$x = \log_a(c) \text{ immer wenn } a^x = c\,.$$

Benennung:

- a Basis

- c Argument des Logarithmus (auch *Numerus*)

Ausserdem nennen wir

- $x = \log_a(c)$ die **Logarithmenschreibweise**,
- $a^x = c$ die **Exponentialschreibweise**.

In Worten: x ist der Logarithmus von c zur Basis a. Der Logarithmus "fragt" "a hoch wieviel gibt c?" Stimmen Basis und Argument überein wie in

$$\log_3(3),\ \log_{10}(10),\ \log_a(a)$$

erhalten wir immer 1, denn z.B. $3^1 = 3$ und allgemein $a^1 = a$.

Infobox 5.1 **2BL94G**

$$\log_a(a) = 1 \text{ für } a > 0$$

Beispiel 5.1 Umwandlung von Exponential- in Logarithmenschreibweise **X5PTDX**

Schreiben Sie die zweite Form der Gleichung.

a) Exponentialform: $5^3 = 125$

b) Logarithmische Form: $\log_3 9 = 2$

c) Exponentialform: $5^2 = 25$

Lösung:

a) Logarithmische Form: $\log_5 125 = 3$

b) Exponentialform: $3^2 = 9$

c) Logarithmische Form: $\log_5 25 = 2$

Beispiel 5.2 Umwandlung von Exponential- in Logarithmenschreibweise **JIHJ3V7**

Schreiben Sie die zweite Form der Gleichung.

a) Exponentialform: $12^2 = 144$

b) Logarithmische Form: $\log_2(64) = 6$

c) Exponentialform: $3^4 = 81$

Diese Umwandlungen bieten auch die Möglichkeit, Logarithmen im Kopf zu berechnen. Betrachten wir $\log_3 3^5$. Dies kann in der Exponentialform geschrieben werden als $3^x = 3^5$. Da die Basen gleich sind, folgt $x = 5$.

Allgemein sehen wir $\log_a a^b = b$ denn aus $a^x = a^b$ folgt $x = b$. Wir halten fest:

Infobox 5.2 Logarithmus, wenn die Basen übereinstimmen.

$$\log_a a^b = b$$

für $a > 0$ und $a \neq 1$.

Logarithmengesetz

Ein wichtiges Logarithmengesetz ist:

Infobox 5.3 Logarithmengesetz

$$\log_{10}(b^c) = c \cdot \log_{10}(b)$$

für $b > 0$.

Herleitung

Wir können diese Regel durch die folgenden Überlegungen beweisen. Wir wissen

$$\log_{10}(10^3) = 3$$

Ausserdem

$$\log_{10}\left((10^3)^2\right) = \log_{10}\left(10^{2\cdot 3}\right) = 2 \cdot 3 = 2 \cdot \log_{10}(10^3)$$

Betrachten wir nur den ersten und den letzten Ausdruck, sehen also, dass der Exponent vor den Logarithmus geschrieben werden kann.

Verallgemeinerung

Allgemein gilt, dass jede Zahl $b > 0$ zur Basis 10 geschrieben werden kann. Zum Beispiel:

$$b = 125 \approx 10^{2.1}$$

Die 2.1 erhalten wir, indem wir $\log_{10}(125) = 2.1$ berechnen. Zusammengenommen schreiben wir also

$$b = 10^{\log_{10}(b)}$$

falls $b > 0$. Damit können wir also schreiben

$$\begin{aligned}
\log_{10}\left(b^c\right) &= \log_{10}\left((10^{\log_{10}(b)})^c\right) \\
&= \log_{10}\left((10^{c\cdot\log_{10}(b)})\right) \\
&= c \cdot \log_{10}(b)
\end{aligned}$$

Mit dieser Regel können wir Exponentialgleichungen lösen.

Anwendungen

Beispiel 5.3 Exponentialgleichung **YKR863**

Lösen Sie nach x auf.

$$3^x = 8$$

Lösung:

Wir logarithmieren auf beiden Seiten, schreiben den Exponenten vor den Logarithmus und lösen nach x auf:

$$\begin{array}{rcll} 3^x & = & 8 & \mid \log_{10}(\ldots) \\ \log_{10}(3^x) & = & \log_{10}(8) & \\ x \cdot \log_{10}(3) & = & \log_{10}(8) & \mid : \log_{10}(3) \\ x & = & \frac{\log_{10}(8)}{\log_{10}(3)} \approx 1.92 & \end{array}$$

Achtung

Beachten Sie, dass $3^x = 8$ nicht dasselbe ist wie $x^3 = 8$. Letzteres kann durch Ziehen der dritten Wurzel gelöst werden

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Für $3^x = 8$ benötigen wir jedoch den Logarithmus, um die Lösung zu finden. Heute verwenden wir Taschenrechner, die den Logarithmus zur Basis 10 (oder auch zur Basis e) berechnen können. Früher wurden dafür Logarithmentafeln verwendet.

Beispiel 5.4 Exponentialgleichungen **QAVZR1**

a) $3^x - 2 = 12$

b) $3^{1-x} = 2$

c) $6^{1-x} = 10^x$

d) $5^{2x} - 2 \cdot 5^x = 15$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} 3^x - 2 &= 12 \\ 3^x &= 14 \\ \log_{10}(3^x) &= \log_{10}(14) \\ x &= \frac{\log_{10}(14)}{\log_{10}(14)} \approx 2.402 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3^{1-x} &= 2 \\ \log_{10}(3^{1-x}) &= \log_{10}(2) \\ (1-x)\cdot\log_{10}(3) &= \log_{10}(2) \\ x &= 1 - \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(3)} \approx 0.369 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 6^{1-x} &= 10^x \\ \log_{10}(6^{1-x}) &= \log_{10}(10^x) \\ (1-x)\log_{10}(6) &= x\log_{10}(10) \\ \log_{10}(6) - x\log_{10}(6) &= x \\ \log_{10}(6) &= x\log_{10}(6) + x \\ \log_{10}(6) &= x(\log_{10}(6)+1) \\ x &= \frac{\log_{10}(6)}{\log_{10}(6)+1} \approx 0.431 \end{aligned}$$

d) Wir substituieren

$$y = 5^x$$

, dann wird die Gleichung:

$$y^2 - 2y = 15$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, die wir mit der Mitternachtformel oder durch Faktorisierung lösen:

$$\begin{aligned} y^2 - 2y - 15 &= 0 \\ (y-5)(y+3) &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$y = 5$$

und

$$y = -3$$

. Da

$$y = 5^x$$

positiv sein muss, nehmen wir nur

$$y = 5$$

.

$$5^x = 5 \implies x = 1$$

Die Lösung ist

$$x = 1$$

.

KAPITEL 6

Trigonometrie

Lernziele 6.0 Trigonometrie

- Die Studierenden kennen die Definition von Sinus, Kosimus und Tangens und können mit dem Taschenrechner die Funktionswerte berechnen (Grad und Bogenmass).
- Sie kennen an einem rechwinkligen Dreieck Ankathete, Gegenkathete und Hypothenuse benennen.
- Sie können einfache Gleichungen, die trigonometrische Funktionen enthalten, lösen.
- Sie kennen die Umkehrfunktionen von Sinus, Kosimus und Tangens, also $\arcsin$, $\arccos$, und $\arctan$.
- Sie kennen mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen Seiten und Winkel im rechtwinkligen Dreieck berechnen.

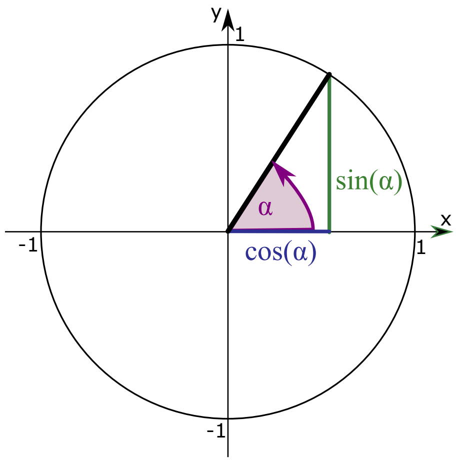
6.1 Definitionen von Sinus, Kosimus und Tangens

Die trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Kosinus* beschreiben die Höhe und die Länge des Schattens (auf die x-Achse) eines Zeigers, der um den Winkel α gedreht wurde:

$$\sin(\alpha) = \text{Höhe}, \quad \cos(\alpha) = \text{Länge des Schattens}.$$

Der Zeiger hat die Länge 1.

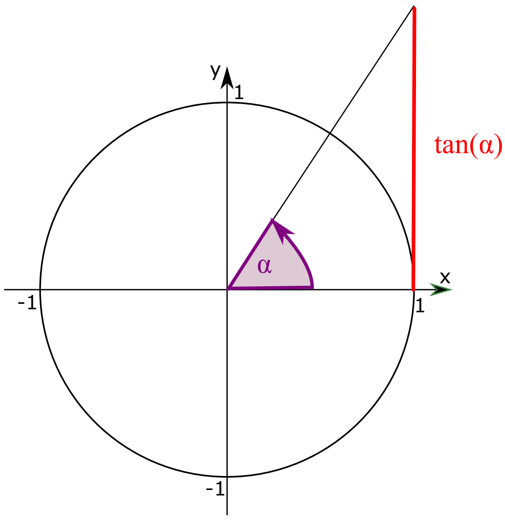
Definition 6.1 Sinus und Kosinus



Der *Tangens* gibt eine Länge ausserhalb des Kreises an. Zum Beispiel beschreibt der Tangens die Höhe einer Leiter, die 1 Meter von einer Wand entfernt steht und um den Winkel α geneigt ist:

$$\tan(\alpha) = \text{Höhe der Leiter.}$$

Definition 6.2 Tangens



Infobox 6.1 Winkel haben eine Richtung

In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeigersinn gemessen, d.h. $10°$ ist im Gegenuhrzeigersinn und $-10°$ ist im Uhrzeigersinn.

Beispiel 6.1 Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen K4PJLD

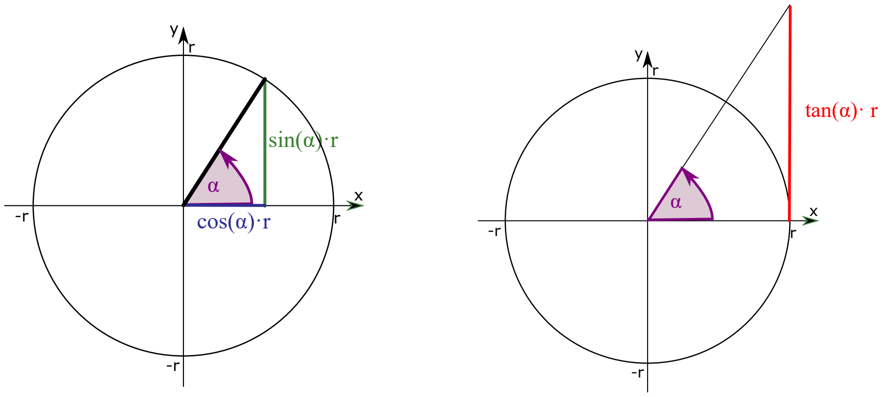
Welche Vorzeichen haben $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für die folgenden Winkel?

a) $\frac{9}{0}^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$

b) $\frac{2}{7}0^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$

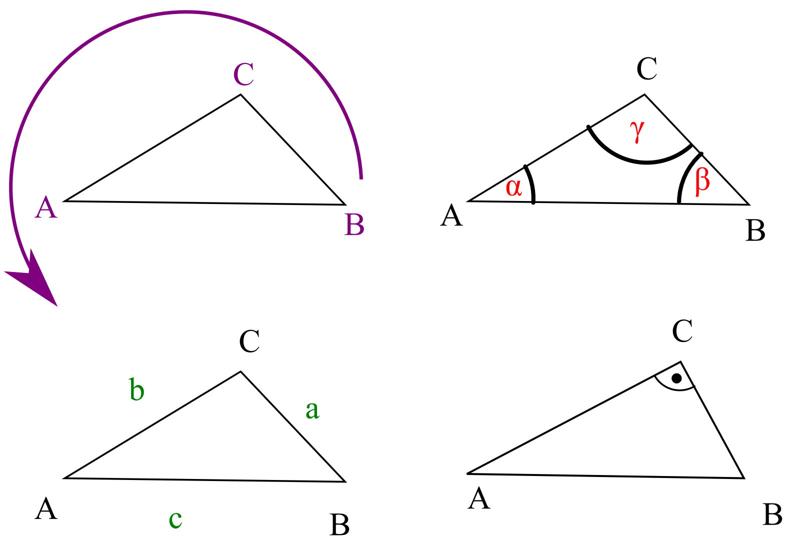
Wie lassen sich Sinus, Kosinus und Tangens in einem Kreis mit einem grösseren Radius verwenden? Wenn alle Längen des Dreiecks proportional vergrössert werden, entsteht ein ‘aufgeblasenes’ Dreieck. Für einen Kreis mit dem Radius r gelten daher folgende Beziehungen:

Infobox 6.2 Trigonometrische Funktionen allgemein



6.2 Geometrie und Konventionen

Konventionen bei Dreiecken

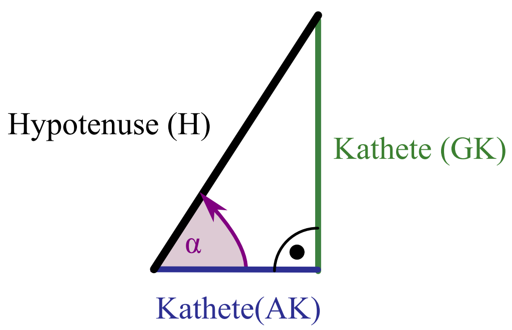


Gemäss der Konvention werden die Ecken eines Dreiecks im Gegenuhrzeigersinn mit den Grossbuchstaben A, B und C beschriftet. Die Winkel an diesen Ecken werden mit den entsprechenden griechischen Kleinbuchstaben α, β und γ beschriftet. Die Seiten werden ebenfalls mit den Kleinbuchstaben a, b und c bezeichnet, wobei die Seite a gegenüber der Ecke A, die Seite b gegenüber der Ecke B und die Seite c gegenüber der Ecke C liegt. Beim rechtwinkligen Dreieck ist die Ecke mit dem rechten Winkel C.

Konventionen bei rechtwinkligen Dreiecken

Definition 6.3 Hypotenuse und Katheten

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die Seite, die dem rechten Winkel ($90°$) gegenüberliegt, die **Hypotenuse**. Die beiden anderen Seiten nennt man **Katheten**.
Ist in einem rechtwinkligen Dreieck noch ein Winkel gegeben, dann berührt die **Ankathete** den Winkel, die **Gegenkathete** hingegen nicht.



Es gelten auch die folgenden Relationen und sie besonders nützlich für die Anwendungen bei Aufgaben mit rechtwinkligen Dreiecken. Sie ergeben sich aus der Definition der trigonometrischen Funktionen, die nach $\sin$, $\cos$ oder $\tan$ aufgelöst werden.

Infobox 6.3 Relationen am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(\alpha) = \frac{GK}{H}; \; \cos(\alpha) = \frac{AK}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$$

Mit den Abkürzungen AK für Ankathete, GK für Gegenkathete und H für Hypotenuse.

[**?**, Bd. 1 III 9.1]

Zunächst ohne Beweis gilt ausserdem:

Infobox 6.4 Geometrie Dreieck

- Die Winkelsumme in jedem Dreieck $180°$ beträgt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \; .$$

- Für rechtwinklige Dreiecke gilt der Satz des Pythagoras:
$$c^2 = a^2 + b^2 \, .$$

Taschenrechner

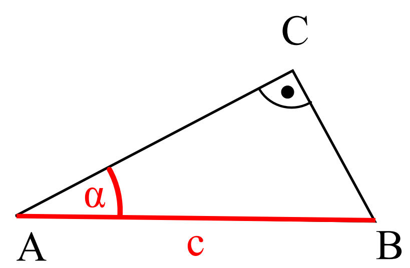
Der TI-30 Taschenrechner hat zwei Einstellungen (`mode`):

- `mode = deg`: Bei der Berechnung von $\sin(15)$ wird angenommen, dass das Argument 15 eigentlich $15°$ bedeutet. Bei der Berechnung von $\arctan(1)$ wird das Resultat in Grad angegeben.
- `mode = rad`: Bei der Berechnung von $\sin(15)$ wird angenommen, dass das Argument im Bogenmass (siehe unten) gegeben ist. Bei der Berechnung von $\arctan(1)$ wird das Resultat im Bogenmass angegeben.

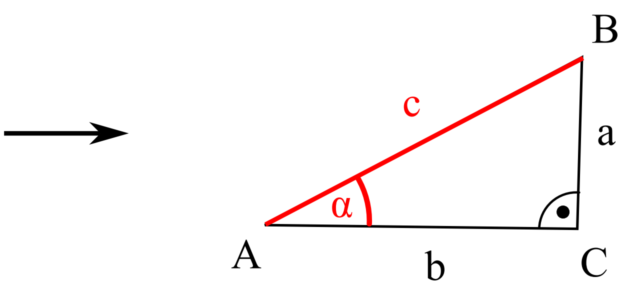
6.3 Berechnung von Seiten im rechtwinkligen Dreieck

Beispiel 6.2 Seitenlängen berechnen, `mode = deg` **VC3J3P**

Berechnen Sie alle Seitenlängen eines Dreiecks mit $\alpha = 36°$ und $c = 8.6$ cm.



Lösung:



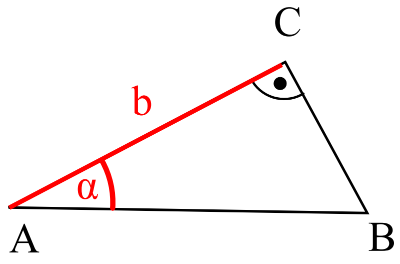
Wir drehen und spiegeln das Dreieck, bis es der Darstellung bei der

Definition der trigonometrischen Funktionen entspricht. Dann verwenden wir die Definitionen von Sinus und Kosinus:

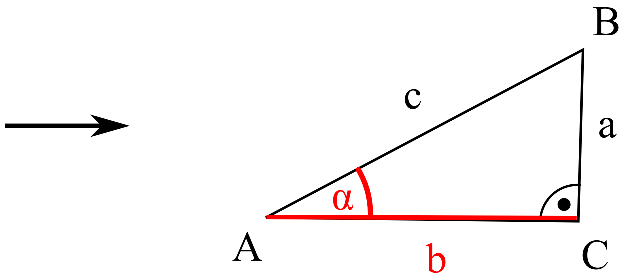
$$\begin{aligned} a &= \sin(36^\circ) \cdot 8.6\,\text{cm} \approx 5.05 \\ b &= \cos(36^\circ) \cdot 8.6\,\text{cm} \approx 6.96 \end{aligned}$$

Beispiel 6.3 Seitenlängen berechnen 2, `mode = deg` **EHRB8Q**

Berechnen Sie alle Seitenlängen eines Dreiecks mit $\alpha = 36^\circ$ und $b = 4.5$ cm.



Lösung:



Wir drehen und spiegeln das Dreieck, bis es der Darstellung bei der Definition der trigonometrischen Funktionen entspricht. Dann verwenden wir die Definitionen von Sinus und Kosinus. Der Kosinus verbindet b und c:

$$b = \cos(36^\circ) \cdot c \;\Rightarrow\; c = \frac{b}{\cos(36^\circ)} \approx 5.56\,\text{cm}$$

Der Kosinus verbindet a und c:

$$a = \cos(36^\circ) \cdot c \approx 3.27\,\text{cm}$$

Beachten Sie, dass die trigonometrischen Funktionen positiv oder negativ sein können. Ist die Höhe nach ‘unten’ oder fällt der Schatten auf die linke seite der Achse, ist das Vorzeichen negativ:

- $0 < \alpha < 90°$: $\sin(\alpha) > 0$ und $\cos(\alpha) > 0$
- $180° < \alpha < 225°$: $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) < 0$

6.4 Arkustangens

Die Arkustangens-Funktion, $\arctan$, ist die Umkehrfunktion des Tangens. Sie wird verwendet, um Winkel aus bekannten Werten für $\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{AK}}$ zu bestimmen. Es gilt

$$\tan(\arctan(\alpha)) = \alpha \quad \text{und} \quad \arctan(\tan(\alpha)) = \alpha.$$

Beispiel 6.4 Gleichung mit $\arctan$, mode = deg **TGG9G7**

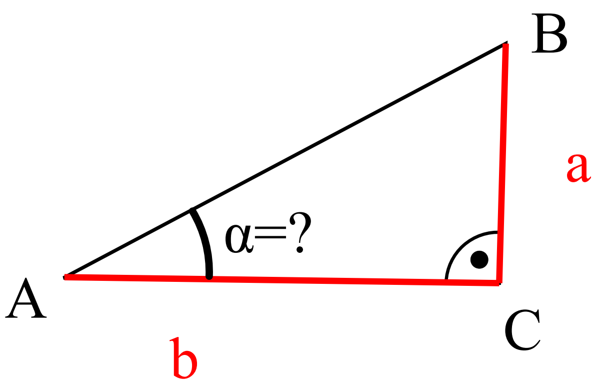
Lösen Sie die Gleichung $\tan(\alpha) = 1$: **Lösung:**

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= 1 \quad | \arctan(\ldots) \\ \arctan(\tan(\alpha)) &= \arctan(1) \\ \alpha &= \arctan(1) = 45° \end{aligned}$$

Im Bogenmass $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Beispiel 6.5 Dreiecksberechnung mit $\arctan$, mode = deg **VBYM-WI**

$$a = 105, \ b = 247.4$$



Lösung:
Wir haben $a = \tan(\alpha) \cdot b$ und lösen auf nach α:

$$\begin{aligned} a &= \tan(\alpha) \cdot b \quad | : b \\ a/b &= \tan(\alpha) \quad | \arctan(\ldots) \\ \alpha &= \arctan(a/b) = \arctan\left(\frac{105}{247.4}\right) \approx 23° \end{aligned}$$

Im Bogenmass $\alpha = 0.401$

Beispiel 6.6 Gleichungen mit $\arctan$**, `mode = deg`** **6WY2G6**

Lösen Sie die Gleichungen nach α.

a) $\tan(\alpha) = 0.087$

b) $\tan(\alpha) = 0.268$

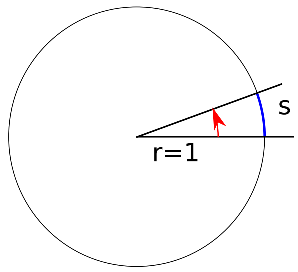
c) $\tan(\alpha) = 1.732$

d) $\tan(\alpha) = 57.29$

6.5 Das Bogenmass

Beispiel 6.7 Kreisbogen **EMSJBG**

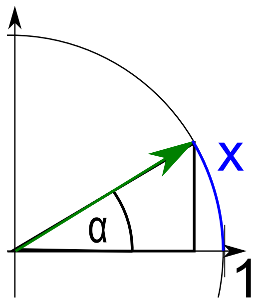
Wir messen auf einem Kreis (Radius 1) einen Kreisbogen von 0.174533. Wie gross ist der darunterliegende Winkel in Grad.



Definition 6.4 Bogenmass

Unter dem Bogenmass x eines Winkels α (in Grad) verstehen wir die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$



Beispiel 6.8 Rechne die Masseinheit um **245307**

Berechne die Winkel $x = \frac{\pi}{7}$ und $\varphi = 12°$ in beiden Masseinheiten.
Lösung:
Wir beginnen mit der Feststellung, dass ein voller Kreis in den beiden Masseinheiten 2π oder 360° entspricht:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
$\frac{\pi}{7}$	

Danach berechnen wir den Quotienten der dritten und zweiten Zeile ist in allen Winkel-Einheiten gleich, also

$$f = \frac{\frac{\pi}{7}}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°} .$$

Also

$$\alpha = \frac{360°}{14} = 25.71° .$$

Gleich verfahren wir bei der Umrechnung von Winkelgrad in Bogenmass:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	$360°$
	$12°$

Der Quotient der dritten und zweiten Zeile ist

$$f = \frac{12°}{360°} = \frac{x}{2\pi} .$$

Also

$$x = \frac{2\pi}{30} = 0.209 .$$

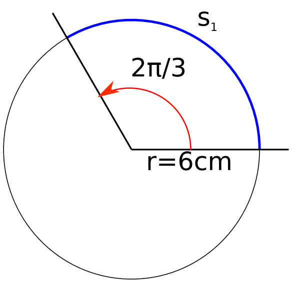
Beispiel 6.9 Bogenmass **TC2EE3**

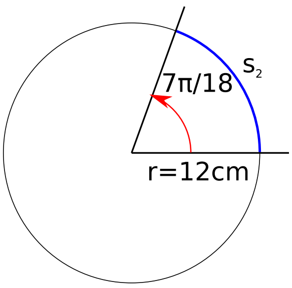
Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass x oder im Winkelmass α.

α	$111°$		$120°$		$-15°$
x		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

Beispiel 6.10 Bogenmass **335331**

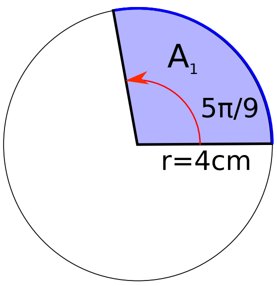
Berechne die Bogenlänge s.

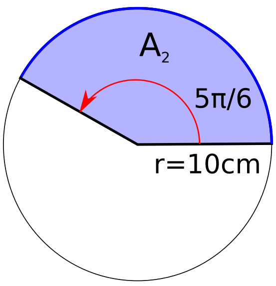




Beispiel 6.11 Bogenmass **845541**

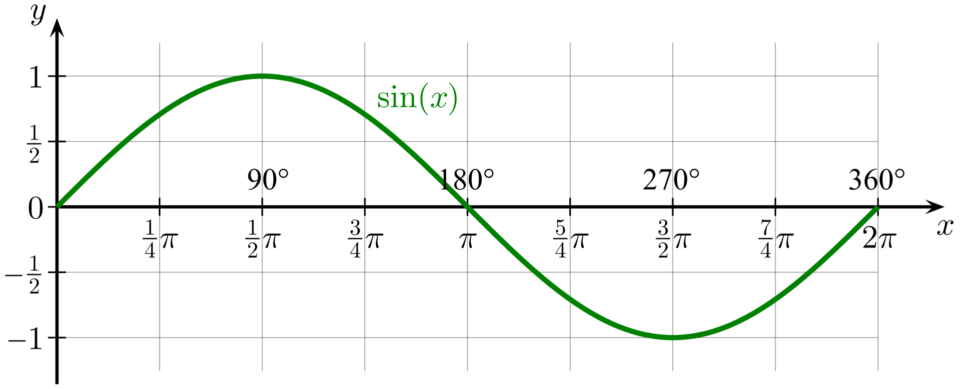
Berechne die Fläche des Kreissektors A.

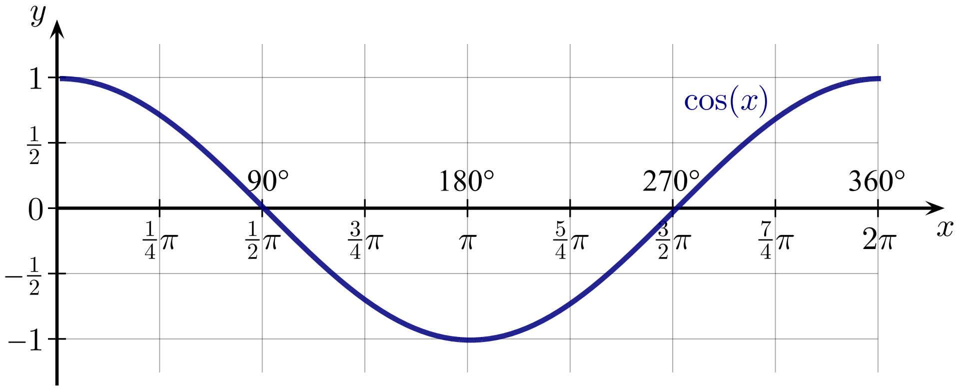




6.6 Die Graphen von trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen werden häufig zur Modellierung von Wellen verwendet. Dabei wird das Argument der Funktion meist im Bogenmass gemessen. Zum Beispiel sehen die Funktionsgraphen für Sinus und Kosinus im Bogenmass wie folgt aus:





Beispiel 6.12 Verschiedene Winkel - gleicher Sinuswert , `mode = deg` **SM6EZW**

Fassen Sie die Winkel mit den gleichen Sinuswerten zusammen.

$$42°, 98°, -14°, 14°, -318°, 374°, 458°, -374°$$

Lösung:

$\sin(\alpha)$	α_1	α_2
0.24	14°	374 °
-0.24	-14°	-374°
0.67	42°	-318°
0.99	98°	458°

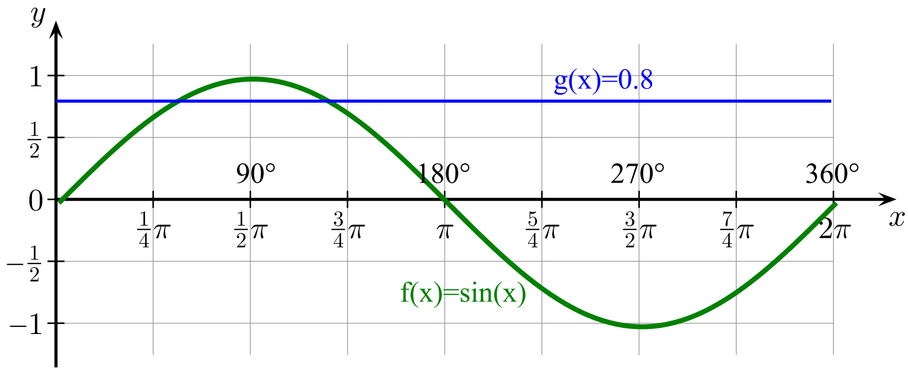
Beispiel 6.13 Gleichung mit $\sin$ **, `mode = rad`** **9VXBNS**

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\sin(x) = 0.8$$

im Intervall $x \in [0, 2\pi[$.

Lösung:



Oben wurde die Aufgabe in eine Grahik übersetzt. Wir sichen die Schnittpunkte $f(x) = g(x)$, davon gibt es zwei. Einen finden wir über

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= 0.8 \quad | \arcsin(\ldots) \\
\arcsin(\sin(x)) &= \arcsin(0.8) \\
x &= \arcsin(0.8) = 0.927 < \frac{\pi}{2} \approx 1.57
\end{aligned}$$

Es ist der Schnittpunkt links in der Graphik. Den zweiten finden wir, indem wir indem wir den Wert an $\pi/2$ spiegeln: $\Delta x = 0.643$ und damit $x_2 = \frac{\pi}{2} + \Delta x = 2.21$

Teil II

Weiterführung

KAPITEL 21

Gleichungen 2

Lernziele 21.0 Gleichungen

- Sie können in Termen gemeinsame Faktoren ausklammern oder diese mit Hilfe von binomische Formeln faktorisieren.
- Sie können quadratische Gleichungen lösen.
- Sie können Bruchterme addieren und Gleichungen mit Brüchen lösen.
- Sie können mit einer Substitution den Grad einer Gleichung verringern.
- Die Studierenden können Ungleichungen lösen und die Lösungsmenge mit Hilfe von Intervallen angeben.

21.1 Quadratische Gleichungen

Satz 21.1 Lösungsformel quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die quadratischen Gleichungen gibt es zwar eine Lösungsformel, die praktisch ist und die Lösung für alle quadratischen Gleichungen ergibt. Doch erzeugt sie auch den grössten Rechenaufwand. Deshalb ist es nützlich die Lösungsformel zu vermeiden wenn immer möglich.

Infobox 21.1 Quadratische Gleichungen ohne Lösungsformel

- Es gibt keinen Term der ein x enthält, d.h. $b = 0$, z.B. $24{+}2x^2 = 74$

$$\begin{aligned} 24 + 2x^2 &= 74 \quad | - 24 \\ 2x^2 &= 50 \quad | : 2 \\ x^2 &= 25 \quad | \sqrt{\ldots} \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

- Alle Terme enthalten x, z.B. $10x = 5x^2$

$$\begin{aligned} 10x &= 5x^2 \quad | - 10x \\ 5x^2 - 10x &= 0 \quad | - 24 \\ 5x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

  Also sind $x = 0$ und $x = 2$ die Lösungen.

- Faktorisierung:

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

  Wir finden schnell zwei Zahlen, deren Produkt -12 und deren Summe -4 ergibt. Vorgehen: Ganze Zahlen, deren Produkt 12 ergibt, sind die Paare $(1; 12)$, $(2; 6)$, $(3; 4)$.
  Aus diesen Paaren wählen wir jenes aus, wo die Differenz 4 ist, d.h. $(2; 6)$. Also

$$(x \pm 2) \cdot (x \pm 6) = 0$$

  Schliesslich wählen wir die Vorzeichen korrekt:

$$(x + 2) \cdot (x - 6) = 0$$

21.2 Ausdrücke mit Brüchen

21.2.1 Definitionsereich von Gleichungen mit Brüchen

Die Division durch 0 ist das typische Problem bei Ausdrücken mit Brüchen. So wird der Definitionsereich einer Bruchgleichung definiert es ist hier zum Beispiel er ohne die Stellen wo die Männer null sind.

Beispiel 21.1 Definitionsbereich **FQHMID**

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Gleichung

$$\frac{2}{x^2 - 25} - \frac{3}{5 + x} + \frac{1}{5 - x} = 0$$

Die Nenner sind 0, falls

$$x = 5 \text{ oder } x = -5$$

Also ist der Definitionsbereich der Gleichung

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$$

21.2.2 Gleichungen mit Brüchen

Kommen Brüche in einer Gleichung vor, ist der erste Schritt die Multiplikation mit allen Nennern. So erhalten wir eine Gleichung ohne Brüche.

Beispiel 21.2 Gleichungen mit Brüchen **GPJNLC**

Löse die Gleichung

$$\frac{2}{x^2-25} - \frac{3}{5+x} + \frac{1}{5-x} = 0$$

Lösung:

Durch Multiplikationen wollen wir alle Nenner loswerden. Dabei fällt uns auf, dass $(x+5)\cdot(x-5) = x^2-25$, d.h. es reicht mit $(x+5)\cdot(x-5) = x^2-25$ zu multiplizieren. So erhalten wir

$$\frac{2\cdot(x^2-25)}{x^2-25} - \frac{3\cdot(x+5)\cdot(x-5)}{5+x} + \frac{(x+5)\cdot(x-5)}{5-x} = 0$$

Wir kürzen, so ergibt sich

$$2 - 3\cdot(x-5) - 1\cdot(x+5) = 0$$

Ausmultiplizieren:

$$2 - 3x + 15 - x - 5 = 0 \;\Rightarrow\; -4x = -12 \;\Rightarrow\; x = 3$$

Wir sehen hier: Besondere Aufmerksamkeit sollten wir dem Ausdruck widmen, mit dem wir erweitern. Enthält ein einfacher Ausdruck schon die anderen mit höheren Potenzen von x? Falls ja, dann genügt es mit dem einfachen zu multiplizieren.

21.3 Substitution

Enthält eine Gleichung zum Beispiel nur gerade Potenzen, z.B.

$$2x^4 - 5x^2 = 6\ ,$$

dann können wir $x^2 = u$ 'einpacken' (Fachausdruck: substituieren). So entsteht eine Gleichung, die einen tieferen Grad hat, und die wir dann eher lösen können — hier

$$2u^2 - 5u = 6$$

was mit der Mitternachtsformel gelöst werden kann.

Beispiel 21.3 Beispiel Substitution **LYD13Q**

Löse die Gleichung

$$x^4 - 5x^2 = 36$$

Lösung:

Die Gleichung enthält nur gerade Potenzen x^4, x^2 und $x^0 = 1$. Deshalb substituieren wir $u = x^2$.

$$u^2 - 5u = 36 \;\Rightarrow\; u^2 - 5u - 36 = 0$$

Wir faktorisieren

$$(u+4)\cdot(u-9) = 0$$

und erhalten die Lösungen $u_1 = 4$ und $u_2 = -9$.
Schliesslich ersetzen wir in den beiden Lösungen wieder u mit x^2. Deshalb wird dieser Schritt Resubstitution genannt:
Erste Gleichung für $u_1 = 4$:

$$x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = 2,\; x = -2$$

Zweite Gleichung für $u_2 = -9$:

$$x^2 = -9$$

Hier gibt es keine Lösung. Deshalb ist die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung

$$x_1 = 2,\; x_2 = -2$$

21.4 Mengen und Intervalle

Wir können Mengen in aufzählender Form angeben, z.B.

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Um anzugeben, dass weitere Zahlen zur Menge gehören, benutzen wir Punkte, z.B.

$$B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Besteht die Menge nicht aus einzelnen Zahlen sondern aus Intervallen, schreiben wir z.B.

$$C = \left\{x \middle| 0 < x < 5\right\}$$

Es gehöre z.B. 1, 1.01, 1.001, 1.0001 zur Menge. Aber Achtung: in C ist zwar 0.0000001 drin, nicht aber 0. Und genau gleich gilt an der oberen Grenze: 4.999999 liegt in C, nicht aber 5. Dies ist gleichbedeutend zu

$$C =]0; 5[$$

d.h. die nach aussen geklappten Klammern bedeuten, dass die Grenze nicht zum Intervall gehört.

Definition 21.1 Offene und geschlossene Intervalle

Wir nennen
$$C =]0;5[$$
ein *offenes Intervall*.
$$D = [0;5[$$
ist ein halboffenes Intervall und
$$E = [0;5]$$
ein geschlossenes Intervall.

Wir können Mengen voneinander subtrahieren oder Mengen miteinander vereinigen. Z.B. $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ und
$$\mathbb{R}\backslash]0;5[=]-\infty;0] \cup [5;\infty[$$
dabei bedeutet

- $A \setminus B$: Nimm von A die Menge B weg.
- $C \cup D$: Füge die Mengen C und D zusammen

Zu "Unendlich" (∞) gehört immer ein offenes Symbol. Wir schreiben also $[5;\infty[$ und nicht $[5;\infty]$.

21.5 Ungleichungen

Ungleichung lösen wir, indem wir zunächst die *Gleichung* lösen. Durch diese Lösungen wird der Zahlenstrahl zerschnitten. Achtung, auch Definitionslücken zerschneiden den Zahlenstrahl. Anschliessend untersuchen wir jeden Abschnitt, ob er zur Lösungsmenge gehört. Dabei darf ein beliebiges Element aus diesem Intervall in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt werden. Entsteht eine wahre Aussage, gehört das ganze Intervall zur Lösungsmenge sonst nicht. Besondere Beachtung haben die Grenzen. Auch sie setzen wir in die ursprüngliche Gleichung ein und bestimmen so, ob sie zur Lösungsmenge gehören oder nicht.

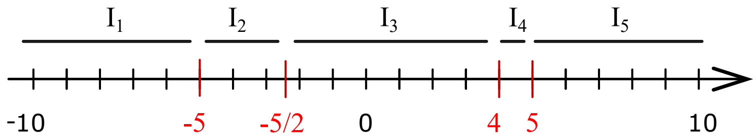
Beispiel 21.4 Ungleichung **P5LJ4Z**

Bestimme die Lösungsmenge
$$\frac{3}{5+x} + \frac{1}{5-x} > 4/3$$

Lösung:

Wir stellen fest, dass die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{-5;5\}$ ist — wir merken uns die Definitionslücken. Danach lösen wir die Gleichung
$$\frac{3}{5+x} + \frac{1}{5-x} = 4/3$$

und erhalten $x_1 = -5/2$ und $x_2 = 4$. Der Zahlenstrahl ist also



Wir untersuchen, ob die Intervalle in der Lösungsmenge liegen. Dafür genügt es einen Punkt auf dem Intervall zu untersuchen.

- $x = -6$, so erhalten wir $\frac{3}{5+(-6)} + \frac{1}{5-(-6)} = -3 + \frac{1}{11} < 4/3$. Also ist I_1 nicht in der Lösungsmenge.
- $x = -3$, so erhalten wir $\frac{3}{5+(-3)} + \frac{1}{5-(-3)} = 3/2 + 1/8 = 13/8 > 4/3$. Also ist I_2 in der Lösungsmenge.
- $x = 0$, so erhalten wir $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 4/5 < 4/3$. Also ist I_3 nicht in der Lösungsmenge.
- $x = 4.9999$, so erhalten wir $\frac{3}{5+4.9999} + \frac{1}{5-4.9999} > 1/0.0001 > 4/3$. Also ist I_4 in der Lösungsmenge.
- $x = 6$, so erhalten wir $\frac{3}{5+6} + \frac{1}{5-6} = 3/11 + \frac{1}{-1} < 4/3$. Also ist I_5 nicht in der Lösungsmenge.

Die Lösungsmenge ist also von der Form

$$L = I_2 \cup I_4 = \big(-5; -\frac{5}{2}\big) \cup \big(4; 5\big)\ .$$

Bei $x = -5/2$ und $x = 4$ gilt das Gleichheitszeichen, also gehören diese Grenzen nicht zur Lösungsmenge. Bei $x = -5$ und $x = 5$ ist der Ausdruck $\frac{3}{5+x} + \frac{1}{5-x}$, nicht definiert, also gehören auch diese Grenzen nicht zur Lösungsmenge. Damit erhalten wir

$$L \ = \big]-5; -\frac{5}{2}\big[\quad \cup \quad \big]4; 5\big[\ .$$

KAPITEL 22

Exponenten und Logarithmen

Lernziele 22.0 Exponenten und Logarithmen

- Die Studierenden kennen den natürlichen Logarithmus und seine Beziehung zur Eulerschen Zahl e.
- Sie verstehen den Unterschied zwischen dem binären Logarithmus, dem dekadischen Logarithmus und dem natürlichen Logarithmus.
- Sie können den Logarithmus einer beliebigen Basis mithilfe eines anderen Logarithmus berechnen.
- Sie verstehen die Logarithmengesetze (Produkt, Quotient, Potenz) und können sie anwenden.
- Sie können Logarithmen- und Exponentialgleichungen lösen.

22.1 Der Logarithmus mit der Basis e

Der natürliche Logartihmus ist $\ln(x) = \log_e(x)$ mit $e \approx 2.71828$ die Eulersche Zahl. Dann gibt es den binären Logarithmus $\operatorname{lb}(x) = \log_2(x)$, der u.a. in der Informatik benutzt wird. Manchmal wird $\log_{10}(x) = \lg(x)$ geschrieben. Der Ausdruck $\log(x)$ ohne Angabe der Basis kann zwei Bedeutungen haben. Entweder $\log(x) = \log_{10}(x)$, oder die Bedeutung $\log(x) = \log_e(x)$, die oft in englisch-sprachiger Software und Literatur benutzt wird. Indem Sie $\log(10)$ auswerten, erhalten Sie Auskunft darüber, wie $\log(x)$ in der Software, die Sie benützen, implementiert ist.

Mit nur *einem* Logarithmus, kann der Logarithmus zu einer beliebigen Basis berechnet werden:

Infobox 22.1 Es genügt *ein* Logarithmus **TIFZ1S**

$$\log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}$$

für $a, b, c > 0;\ a \neq 1,\ b \neq 1$

Deshalb genügt es in einer Software den Logarithmus zu einer einzigen Basis z.B. $\ln(x)$ zu implementieren. Auch in analytischen Rechnungen ist es oft übersichtlich, nur mit $\ln(x)$ zu arbeiten, statt mit Logarithmen mit verschiedenen Basen.

Beispiel 22.1 Herleitung zu '*Ein* Logarithmus genügt' **QRRY58**

$$c = a^{\log_a(c)} \text{ und } a, b, c > 0;\ a \neq 1;\ b \neq 1$$

Logarithmieren Sie links und rechts zur Basis b. Zeigen Sie so, dass das obige Gesetz korrekt ist.

Lösung:

Logarithmieren

$$\log_b(c) = \log_b\left(a^{\log_a(c)}\right)$$

Bei diesem Ausdruck wenden wir die Logarithmengesetze an

$$\log_b(c) = \log_a(c) \cdot \log_b(a)$$

und lösen nach $\log_a(c)$ auf

$$\begin{aligned} \log_b(c) &= \log_a(c) \cdot \log_b(a) \quad | : \log_b(a) \\ \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)} &= \log_a(c) \end{aligned}$$

Logarithmus als Funktion

$\ln(x)$ und $\exp(x)$ sind inverse Funktionen, deshalb $\ln\big(\exp(x)\big) = x$ und $\exp\big(\ln(x)\big) = x$. Dies gilt übrigens für alle Basen $a \neq 0$:

$$\log_a\left(a^x\right) = x \text{ und } a^{\log_a(x)} = x\ .$$

Der Logarithmus ergibt den Exponenten. Dies hilft oft beim Rechnen mit Logarithmen.

Satz 22.1 Logarithmengesetze (Auswahl)

$$\begin{aligned} \log_a(u \cdot v) &= \log_a(u) + \log_a(v) \\ \log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a(u) - \log_a(v) \\ \log_a\left(u^w\right) &= w \log_a(u) \end{aligned}$$

für $a \neq 1$, $u, v > 0$ und $w \in \mathbb{R}$.

Achtung: Meistens ist $\log_a(u+v) = \log_a(u) + \log_a(v)$ falsch.
Wir können z.B. auf folgende Art zeigen, dass das erste Gesetzt plausibel

ist, d.h. Sinn macht: Wir schreiben die Ausdrücke links und rechts in den Exponenten von a:

$$a^{\log_a(u\cdot v)} = a^{\log_a(u)+\log_a(v)}$$

Dann wenden wir rechts ein Potentialgesetz an

$$a^{\log_a(u\cdot v)} = a^{\log_a(u)} \cdot a^{\log_a(v)}$$

und

$$a^{\log_a(u\cdot v)} = a^{\log_a(u)} \cdot a^{\log_a(v)}$$

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus heben sich gegenseitig auf, und wir erhalten

$$u \cdot v = u \cdot v$$

Es entsteht ein wahrer Ausdruck. Diese Umformungen kann man sich auch rückwärts ausgeführt denken. So können von unten nach oben die Logarithmengesetze hergeleitet werden.

Beispiel 22.2 Logarithmengesetze **XT95CL**

Berechnen Sie $a^{\cdots}$ für die weiteren Logarithmengesetze. Dabei ist $a \neq 0$, die Basis des Logarithmus, und $\ldots$ steht für die den Ausdruck, der, links bzw. rechts des des Gleichheitszeichens steht. Zeigen Sie so, dass die weiteren Logarithmengesetze plausibel sind.

Beispiel 22.3 Logarithmengesetze **FF2BJZ**

Welche der folgenden Ausdrücke sind korrekt?

$$a, b, c > 0; \; x, y > 1$$

a) $\log_{10}(\frac{1}{27}) + \log_{10}(9) = \frac{1}{9}$

b) $\lg(a) + \lg(b) = \lg(a \cdot b)$

c) $\ln(\frac{b}{c}) + \ln(c) = \ln(b)$

d) $\log(x+y) - \log(x) = \log(y)$

e) $\log_{10}(x^2) + \log_{10}(\frac{1}{x^2}) = 0$

f) $\left(\lg(1)\right)^2 = 1$

g) $\frac{1}{2}\ln(4) - \ln(2) = 1$

h) $\frac{1}{3}\log_{10}(x^2y^{-2}) - \frac{1}{3}\log_{10}(x^{-1}y) = \log_{10}\left(\frac{x}{y}\right)$

i) $\ln(5k^3) = 3 \cdot \ln(5k)$

j) $\log_{10}(a^2 - b^2) = 2 \cdot \frac{a}{b}$

k) $\log_4(\sqrt[4]{b\sqrt[3]{c}}) = \frac{1}{4} \cdot \log_4(b) + \frac{1}{12}\log_4(c)$

l) $\log_a(x^{\log_a(x)}) = (\log_a(x))^2$

m) $\log_a(u+v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

Lösung:
Korrekt sind b, c, e, f, h, k und l.

22.2 Logarithmus im Kopf berechnen (Spezialfälle)

Wir berechnen z.B. auf dem Taschenrechner

$$\log_{10}(100) = 2$$

Wir hier noch einmal wie die Logarthmusfunktion definiert ist: Setzt man das Resultat in den Exponenten der Basis erhält man das Argument, d.h. $10^2 = 100$. Der Logartihmus gibt eine Zahl x. Wir können so in speziellen Fällen den Logarithmus im Kopf berechnen. Dazu benützen wir die Logarithmengesetze, z.B. für

$$\log_3(81) \text{ schreiben wir } \log_3(3^4) = 4\log_3(3)$$

Sind Argument und Basis gleich, heben sich $\log$ und die Exponentialfunktion auf, also

$$\log_3(3^4) = 4\log_3(3) = 4\ .$$

Kurz gesagt: Einen Logartithmus werten wir aus, indem wir das Argument mit Hilfe der Basis und einem Exponenten schreiben. Dann ist der Wert des Logarithmus einfach dieser Exponent.

Beispiel 22.4 Logarithmus im Kopf **H4TD4E**

Berechnen Sie $\log_2(\frac{1}{32})$ ohne elektronische Hilfsmittel.

22.2.1 Exponential-Gleichungen

Befindet sich die Unbekannte im Exponenten, so können wir durch Logarithmen auf beiden Seiten meist eine lineare Gleichung erhalten. Dabei lohnt es sich, vor dem logarithmischen die Gleichung in die folgende Form zu bringen

$$\log_a(f(x)) = C$$

wobei die Unbekannte auf der einen Seite der Gleichung auftritt.

Beispiel 22.5 Exponential-Gleichung **CCKBM9**

Für welche x stimmt die Gleichung.

$$3 \cdot 7^x = 5^x$$

Lösung:

$$
\begin{array}{rcll}
3 \cdot 7^x & = & 5^x & \mid \quad : 7^x \\
3 & = & \frac{5^x}{7^x} & \\
3 & = & \left(\frac{5}{7}\right)^x & \mid \quad \ln(\ldots) \\
\ln(3) & = & \ln\left(\frac{5}{7}\right)^x & \\
\ln(3) & = & x \cdot \ln\left(\frac{5}{7}\right) & \mid \quad : \ln\left(\frac{5}{7}\right) \\
x & = & \frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{5}{7}\right)} \approx -3.265 &
\end{array}
$$

Manchmal treffen wir auf Logarithmengleichungen.

Beispiel 22.6 Logarithmengleichung 1 **CWSTW9**

Für welche x ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$\log_{10}(3x+2) = 0.75$$

Lösung:

Wir schreiben beide Seiten in den Exponenten von 10 (das ist die Basis, des Logarithmus, der in der Aufgabenstellung gegeben ist):

$$
\begin{array}{rcll}
\log_{10}(3x+2) & = & 0.75 & \mid \quad 10^{\cdots} \\
10^{\log_{10}(3x+2)} & = & 10^{0.75} & \\
3x+2 & = & 10^{0.75} & \mid \quad -2 \\
3x & = & 10^{0.75} - 2 & \mid \quad : 3 \\
x & = & \frac{10^{0.75}-2}{3} \approx 1.2078 &
\end{array}
$$

Indem wir die linke und und die rechte Seite in den Exponenten einer Zahl b schreiben, entledigen wir uns des Logarithmus. Die Zahl b ist gegen durch die Basis des Logarithmus, der in der Aufgabe vorkommt.

Beispiel 22.7 Logarithmengleichung 2 **S8YTLD**

Für welche x ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$\log_4(9x) = \log_2(x)$$

Lösung:

Die erste Schwierigkeit ist, dass die Logarithmen nicht die selbe Basis haben. Wir führen deshalb einen Basiswechsel durch:

$$\log_4(9x) = \frac{\log_2(9x)}{\log_2(4)} = \frac{\log_2(9x)}{2}$$

Wir bringen als nächstes alle Ausdrücke, die x enthalten, nach links. Wir wählen hier die Subtraktion — und nicht die Division — um anschliessend die Logarithmen zusammenfassen zu können.

$$\begin{aligned}
\frac{\log_2(9x)}{2} &= \log_2(x) \quad | -\log_2(x) \\
\frac{\log_2(9x)}{2} - \log_2(x) &= 0 \\
\log_2\left((9x)^{1/2}\right) - \log_2(x) &= 0 \\
\log_2\left(\frac{(9x)^{1/2}}{x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Der Logarithmus kann nur dann 0 ergeben, wenn das Argument 1 ist, also

$$\begin{array}{rcccl}
\frac{(9x)^{1/2}}{x} & = & 1 & & \\
\frac{3x^{1/2}}{x} & = & 1 & | & \\
\frac{3x^{1/2}}{x^{1/2} \cdot x^{1/2}} & = & 1 & | & \\
\frac{3}{x^{1/2}} & = & 1 & | & \cdot x^{1/2} \\
3 & = & x^{1/2} & | & (\ldots)^2 \\
9 & = & x & &
\end{array}$$

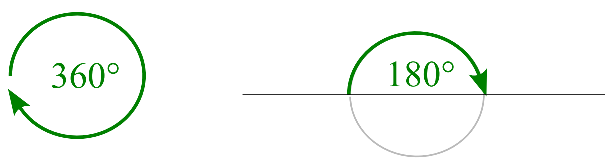
KAPITEL 23

Geometrie

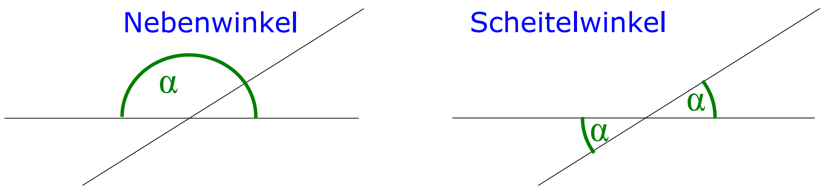
Lernziele 23.0 Geometrie

- Die Studierenden kennen Nebenwinkel, Gegenwinkel, Stufenwinkel und Scheitelwinkel und können damit Winkel an parallelen Geraden berechnen.
- Sie wissen, dass die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck 180° beträgt und können damit Winkel am Dreieck berechnen.
- Sie kennen ähnliche Dreiecke und die Ähnlichkeit benutzen um Eigenschaften von einem Dreieck auf ein anderes, ähnliches Dreieck zu übertragen.
- Sie kennen den Satz Pythagoras und und können damit Seiten am rechtwinkligen Dreieck berechnen.

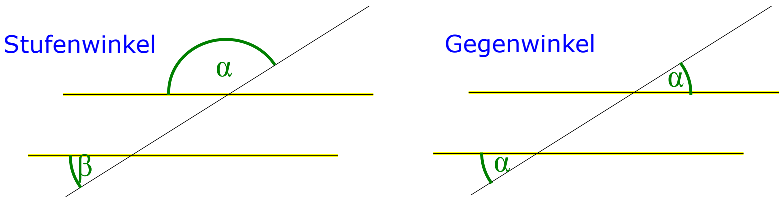
23.1 Winkel bei parallelen Geraden



Welche Zusammenhänge gibt bei den Winkeln an parallelen Geraden? Die Zusammenhänge sind intuitiv und schnell hergeleitet. Eine ganze Drehung (ein Kreis) entspricht 360°. Wenn wir ihn mit Hilfe einer Geraden teilen, erhalten wir 180° für jedes Stück.



Unterteilen wir diesen halben Kreis beliebig in zwei Stücke, ist ihre Summe 180°. So erhalten wir *Nebenwinkel*. Nun stell mir fest, dass der Schnittpunkt der Geraden ein Spiegelpunkt ist. Deshalb können die Winkel von einer Seite der Geraden auf die andere übertragen werden, so erhalten wir *Gegenwinkel*.



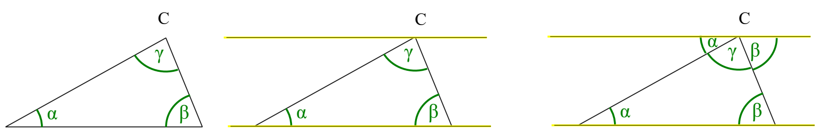
An diesen Überlegungen ändert sich nichts, wenn eine Gerade kopiert und parallel verschoben wird. Es ergeben sich *Stufenwinkel* und *Scheitelwinkel*.

Winkelsumme am Dreieck

Satz 23.1 Winkelsumme am Dreieck

In einem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel 180°.

Wie können wir dies beweisen?



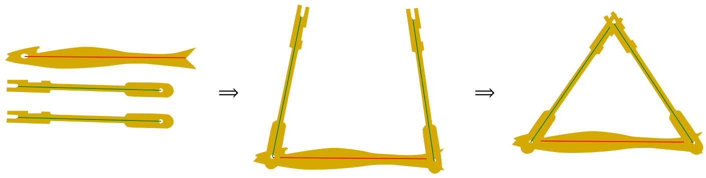
Wir ziehen zur Seite c eine Parallele durch C. Dann zeichnen wir die Stufenwinkel ein. So kommen α, β und γ nebeneinander zu legen und ergänzen sich zu einer halben Drehung, also 180°.

23.2 Konstruktion von Dreiecken

Es ist oft hilfreich, sich die Konstruktion von Dreiecken bildlich vorzustellen.

Beispiel 23.1 Konstruktion 1 **1U1Z8G**

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen 4 cm, 3.5 cm und 3.5 cm.
Lösung:



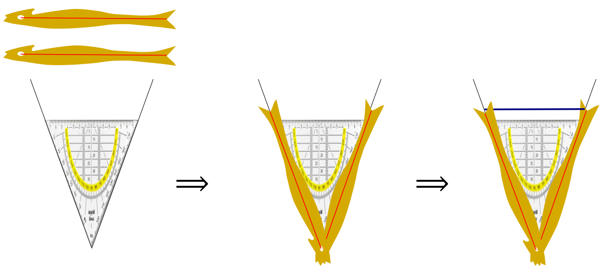
a) Wir stellen uns die Seiten als Holzlatten von. Ihre Länge ist in der Aufgabenstellung gegeben.

b) Fügen wir die Latten zusammen, entsteht eine Figur, die sich nicht mehr bewegen lässt. Die Konstruktion ist fertig.

Beispiel 23.2 Konstruktion 2 **2LFRKC**

Konstruieren Sie ein Dreieck, dem dem zwei Seiten die Lägne 4 cm, und der Winkel zwischen diesen Seiten $40°$ beträgt.

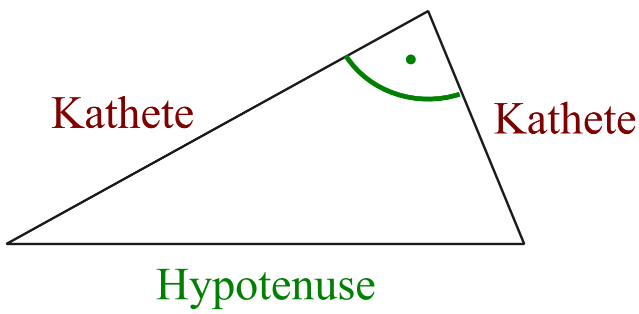
Lösung:



a) Wir stellen uns die beiden Seiten als Holzlatten vor, und den Winkel als eine verformtes Geodreieck dessen spitzer Winkel 40° ist.

b) Fügt man die Elemente zusammen, und steht eine Figur, in der die dritte Seite und alle Winkel nicht mehr verändert werden können. Die Konstruktion ist fertig.

23.3 Rechtwinklige Dreiecke



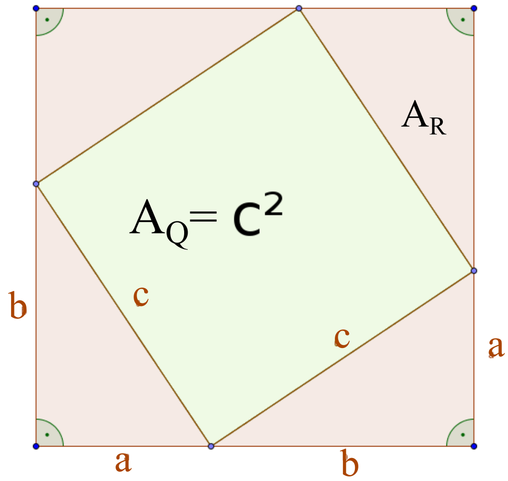
In einem rechtwinkligen Dreieck, gibt es nur eine Seite, die gegenüber dem rechten Winkels liegt. Wir nennen sie 'Hypotenuse', die anderen beiden nennen wir 'Kathete'.

Satz 23.2 Satz von von Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- c: Länge der Hypotenuse
- a, b: Längen der Katheten

Beispiel 23.3 Beweis Satz von Pytharoas **CKSD7L**



a) Zählen Sie auf, welche 5 geometrischen Objekte innerhalb der Gesamtfläche liegen.

b) Wie gross sind die Flächen: grosse Fläche A_T, Quadrat in der Mitte A_Q, Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks A_R.

c) Es gilt $A_T = A_Q + 4A_R$. Formulieren Sie diese Gleichung mit Hilfe der Seitenlängen a, b, c.

d) Lösen Sie die Gleichung nach c^2 auf.

Lösung:

a) Innerhalb der grossen Fläche liegen ein grosses Quadrat und 4 rechtwinklige Dreiecke.

b) Flächen: $A_T = (a+b)^2$, Quadrat in der Mitte $A_Q = c^2$, Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $A_R = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

c) Gleichung $A_T = A_Q + 4A_R$:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

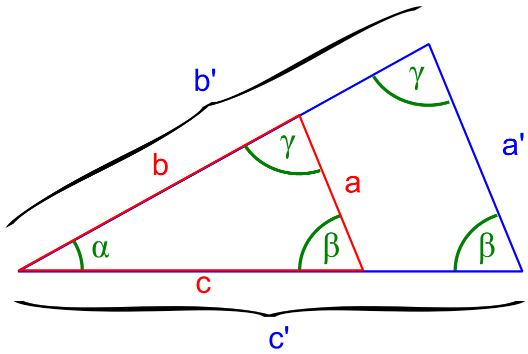
d) Wir multiplizieren aus

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

und ziehen dann auf beiden Seiten $2 \cdot a \cdot b$ ab:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

23.4 Ähnliche Dreiecke



Wir betrachten ein Dreieck mit den Seiten a, b, c, das wir 'aufpumpen' zu einem grösseren mit den Seiten mit den Seiten a', b', c'. Die Winkel halten wir fest. So entstehen die Ähnlichkeitssätze:

Satz 23.3 Ähnlichkeitssätze (Auswahl)

A) Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

B) Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei Verhältnissen übereinstimmen, z.B.

$$a/b = a'/b' \text{ und } a/c = a'/c'$$

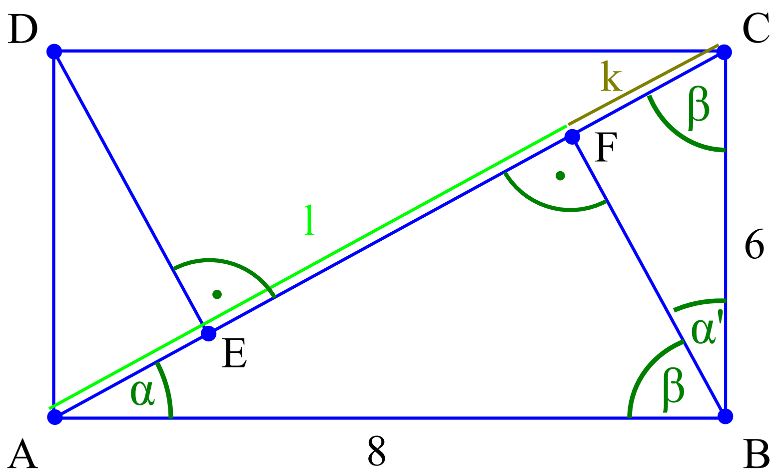
Übrigens:

- Wenn zwei Winkel übereinstimmen, stimmen sie auch in drei überein
- Wenn zwei Dreiecke in zwei Verhältnissen übereinstimmen, stimmen sie in allen Verhältnissen überein, z.B.

$$a/b = a'/b' \text{ und } a/c = a'/c' \Rightarrow b/c = b'/c' \text{ usw.}$$

Ähnlichkeiten können in der Geometrie hilfreich sein: Oft wird die Ähnlichkeit wie folgt gebraucht $A) \Leftrightarrow B)$, d.h. z.B. die Übereinstimmung der Winkel wird festgestellt, dann wird die Übereinstimmung der Verhältnisse benutzt.

Beispiel 23.4 Rechteck **W22T1Y**



Im Rechteck werden von den Ecken B und D das Lot auf die Diagonale gefällt.

a) Wie lange ist die Diagonale?

b) Zeigen Sie, dass $\alpha = \alpha'$.

c) Argumentieren Sie jetzt mit der Ähnlichkeit der Dreiecke um l zu bestimmen.

d) Argumentieren Sie jetzt mit der Ähnlichkeit der Dreiecke um k zu bestimmen.

e) Wie lange ist der Abstand von $\overline{EF}$?

Lösung:

Diagonale

$$\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

Winkel α': Im Dreieck ABC gilt $\alpha + \beta = 90°$ und in FBC $\alpha' + \beta = 90°$. In beiden Fällen ergänzt α (oder α') β zu 90°. Deshalb ist $\alpha = \alpha'$.

Ähnlichkeit (K_L: Kurze Kathete, H: Hypothenuse):

$$\frac{K_L}{H} = \frac{l}{8\,\text{cm}} = \frac{8\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} \Rightarrow l = 6.4\text{ cm}$$

Ähnlichkeit(K_K: Kurze Kathete, H: Hypothenuse):

$$\frac{K_K}{H} = \frac{k}{6\,\text{cm}} = \frac{6\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} \Rightarrow k = 3.6\text{ cm}$$

$$\overline{EF} = l - k = 2.8\text{ cm}$$

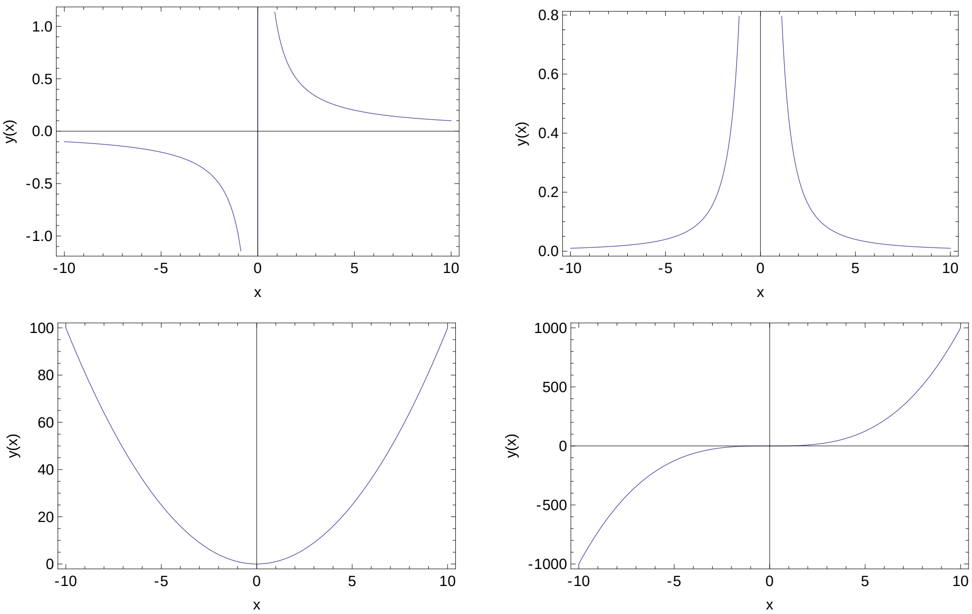
KAPITEL 24

Ableitung

Lernziele 24.0 Ableitung (Differentation)

- Die Studierenden können Grenzwerte von Polynomen und gebrochen rationalen Termen bestimmen.s
- Sie können eine Gerade durch einen Punkt legen.
- Sie kennen die Ableitungen einiger Grundfunktionen.
- Sie kennen die wichtigsten Ableitungsregeln.

24.1 Grenzwerte



Wir beobachten, dass sich gewisse Funktionen für grosse x immer mehr der x-Achse annähern. Das gilt zum Beispiel für $f(x) = \frac{1}{x}$ oder auch für $\frac{1}{x^2}$ — eigentlich für beliebige Exponenten grösser als eins, falls x immer grösser wird. Wir sagen in diesen Fällen, “die Funktion konvergiert gegen null”, und schreiben:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dann sagen wir auch, “der Grenzwert existiert”.

Andere Graphen wachsen beständig an und nähern sich keiner bestimmten Zahl. Dies ist zum Beispiel für $f(x) = x^2$ der Fall. Wir schreiben dann:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

oder wir sagen, der Grenzwert existiert nicht, denn ∞ betrachten wir nicht als reelle Zahl, d.h. $\infty \notin \mathbb{R}$.

Wichtig ist, dass die Grenzwerte kontrolliert bestimmt werden. Dazu wird oft der Ausdruck:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

benutzt.

Beispiel 24.1 Grenzwerte **1Q1QZH**

Bestimme den Grenzwert von $\frac{1}{x^3} + 2$ für

a) $x \to \infty$

b) $x \to -\infty$

c) $x \to 0$

d) $x \to -0$

Lösung:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} + 2 = 2$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} + 2 = 2$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} + 2$ existiert nicht.

d) $\lim_{x\to -0} \frac{1}{x^3} + 2$ existiert nicht.

Beispiel 24.2 Bestimmen Sie die Grenzwerte **5HDG2Y**

a) $\lim_{p\to 0} 3x^2 - 4px + p^2$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-3}{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-1}{2x^2+1}$

d) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

Lösung:

a) Da p klein wird, fallen alle Ausdrücke, die p enthalten, weg

$$\lim_{p\to 0} 3x^2 - 4px + p^2 = 3x^2$$

b) Hier haben wir die Schwierigkeit, dass der Ausdruck gegen $\frac{\infty}{\infty}$ geht, was nicht bestimmt ist. Eine solide Technik besteht in diesem Fall, auf und unter dem Bruchstricht durch die höchste Potenz von x, die auftritt, zu teilen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-3}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(5x-3)\cdot 1/x}{x \cdot 1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(5x-3)\cdot 1/x}{x \cdot 1/x}$$

und schliesslich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-3/x}{1}$$

Jetzt sind alle Ausdrücke definiert. $3/x \to 0$ und deshalb $\frac{5-3/x}{1} \to 5$

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-1}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+5/x-1/x^2}{2+1/x^2} = \frac{3}{2}$$

d) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$. Auch hier haben wir die Schwierigkeit, dass der Ausdruck gegen $\frac{\infty}{\infty}$ geht, was nicht bestimmt ist. Hier teilen wir jede Beitrag in Zähler separat durch h, also den Nenner:

$$\lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

Beispiel 24.3 Grenzwerte 2 **IFK849**

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+4n}{n}$

b) $\lim_{h\to 0}(3x^2+2hx+h^2)$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x^2-3}$

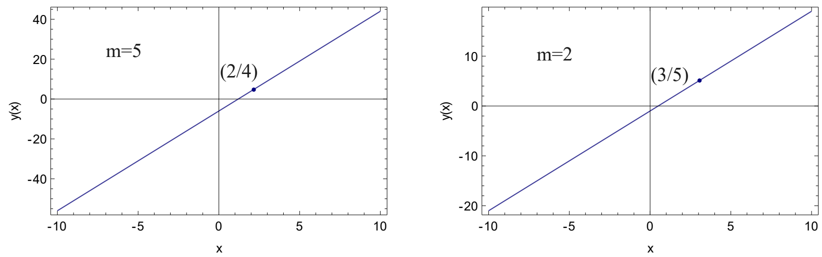
e) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-6}{2x+5}$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x-3}$

g) $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-16}$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

24.2 Praktische Darstellung der Geraden



Oft werden wir es im Folgeden mit Tangenten zu tun haben, bei denen wir wissen, welche Steigung sie haben, und wir wissen, dass sie durch einen bestimmten Punkt gehen sollen. Zum Beispiel durch den Punkt $(2, 4)$ mit der Steigung $m = 5$ (Graphik oben). Dann fragen wir uns, wie die Funktionsgleichung der Geraden lautet.

Der schnellste Weg geht über die Punktsteigungsform, sie lautet:

$$f(x) = m \cdot (x - x_1) + y_1$$

Dabei ist m die Steigung und (x_1, y_1) ein beliebiger Punkt auf der Geraden. D.h. in unserem Fall setzen wir den Punkt ein und erhalten:

$$f(x) = 5 \cdot (x - 2) + 4 = 5 \cdot x - 6$$

Damit lässt die Punkt-Steigungsform der Geraden herleiten, mit der wir die Geradengleichung noch schneller bestimmen können. Dafür Berechnen wir die Steigung m der Geraden für einen beliebigen Punkt $(x; y)$ auf der Geraden :

$$m = \frac{y - 4}{x - 2} = 5$$

Dann lösen wir den Ausdruck nach y auf und erhalten nacheinander:

$$\begin{aligned} y - 4 &= 5 \cdot (x - 2) \\ y &= 5x - 10 + 4 \\ y &= 5x - 6 \end{aligned}$$

Hier ist noch einmal die Verallgemeinerung für für zwei beliebige Punkte auf der Geraden, $(x; y)$ ein beliebiger Punkt und $(x_1; y_1)$ ein bekannter Punkt:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

In diesem Ausdruck interessiert uns y. Wir lösen deshalb nach y auf und erhalten:

$$y = m \cdot (x - x_1) + y_1,$$

was wir zuoberst schon erfolgreich benutzt haben.

Beispiel 24.4 Bestimmen Sie die Geradengleichung **2LU3MM**

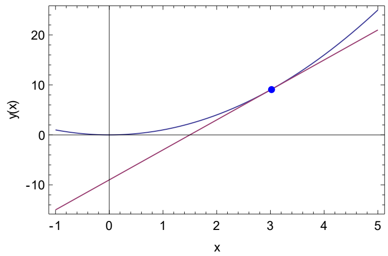
a) $m = 2$, $(x_1, y_1) = (3/5)$

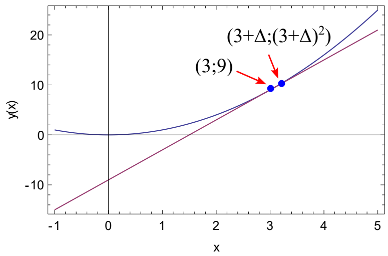
b) $m = 1/2$, $(x_1, y_1) = (0/5)$

c) $m = -4$, $(x_1, y_1) = (1/2)$

d) $m = 0$, $(x_1, y_1) = (-1/-2)$

Tangente an eine Parabel





Nun möchten wir eine Tangente an eine Parabel zeichnen, z.B. an $f(x) = x^2$. Wir wählen dafür $x_1 = 3$, d.h. $(x_1; y_1) = (3; 9)$. Die Tangente ist oben eingezeichnet, sie ist eindeutig definiert. Das heisst, es gibt nur eine Tangente durch diesen Punkt. Wir bestimmen als erstes die Steigung der Tangente, indem wir einen zweiten Punkt auf der Parabel wählen. Er soll nicht allzu weit vom ersten Punkt entfernt liegen. Wir wählen $x_2 = 3 + \Delta x$, das erlaubt uns, Δx später immer kleiner zu wählen und so diesen Punkt näher an den ersten heranzurücken. Wenn dann Δx verschindet, verschmelzen die Punkte zu einem und wir erhalten eine Tangente. Der Punkt lautet also $(x_2; y_2) = \big(3 + \Delta x; (3 + \Delta x)^2\big)$ und ist oben eingezeichnet.

Die Steigung der Geraden durch die beiden Punkte ist

$$m = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{(3+\Delta x) - 3} = \frac{(3+\Delta x)^2 - 3^2}{3 + \Delta x - 3} = \frac{3^2 + (\Delta x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot \Delta x - 3^2}{\Delta x}$$

Jetzt berechnen wir den Grenzwert $\Delta x \to 0$, d.h. wir lassen die Punkte immer näher aneinander rücken

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + 2 \cdot 3 = 6$$

Damit ergibt sich die Tangentengleichung

$$f(x) = 6 \cdot (x - 3) + 9$$

Nun wollen wir uns nur noch mit der Steigung der Tangenten beschäftigen. Wie sieht sie aus? Zunächst bestimmen wir einfach grafisch (Graphik oben), dass für negative x) die Tangente fallend ist, für $x = 0$ haben wir eine horizontale Tangente und positive x ergeben steigende Tangenten. Wobei wir sehen, dass je grösser x, desto grösser die Steigung der Tangenten.

Nun berechnen wir die Tangente für einen beliebigen Punkt, d.h. wir verallgemeinern die Schritte von oben:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{x + \Delta x - x} = \frac{x^2 + (\Delta x)^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{(\Delta x)^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x}{\Delta x} = (\Delta x) + 2 \cdot x \cdot \Delta x \to 2 \cdot x \quad (\Delta x \to 0) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir durch diesen Ausdruck $m = 2 \cdot x$ das grafisch bestimmte Verhalten wiedergeben können: Für negative x erhalten wir negative Steigungen, bei $x = 0$ erhalten wir keine Steigung, also eine horizontale Tangente, und für grosse x erhalten wir immer steilere Tangenten. Dies ist auch in der folgenden Tabelle ersichtlich:

x	-5	-3	-1	0	1	3	5
$f(x) = x^2$	25	9	1	0	1	9	25
$m(x) = 2x$	-10	-6	-2	0	2	6	10

Es gibt verschiedene Notationen für den Sachverhalt, den wir jetzt festgestellt haben. Bisher hatten wir

$$f(x) = x^2 \text{ und } \quad m = 2x$$

Wir werden aber auch

$$f(x) = x^2 \text{ und } \quad f'(x) = 2x$$

begegnen und

$$f(x) = x^2 \text{ und } \quad \frac{d}{dx}f(x) = 2x$$

Die Ausdrücke $m = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ stehen alle für die Steigung der Tangenten im Punkt x. Wir nennen alle diese Ausdrücke die Ableitung von $f(x)$

Wie lautet nun die Steigung von $f(x) = k \cdot x^2$? Wir rechnen nach

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{k(x+\Delta x)^2 - kx^2}{x + \Delta x - x} = k \cdot \underbrace{\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{x + \Delta x - x}}_{2x}$$

In Worten: k lässt sich ausklammern, zurück bleibt ein Ausdruck, den wir schon kennen nämlich die Ableitung von $f(x) = x^2$. Wir haben ein allgemeines Gesetz entdeckt (ohne weitere Beweise). Die Verallgemeinerung für beliebige Exponenten ist im Satz 2 angegeben (ohne Beweis).

Satz 24.1 Wichtigste Ableitungsregeln

Für $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^n &= n \cdot x^{n-1} \\ \frac{d}{dx}(k \cdot f(x)) &= k \cdot f'(x) \\ \frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Für $n = 0$ gilt:

$$\frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0$$

Beispiel 24.5 Bestimmen Sie die Ableitungen **VNIBJZ**

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$

b) $f(x) = 7x^5 + 3x^2 - 6x^4$

c) $f(x) = -4x^{\frac{7}{4}}$

d) $f(x) = 5x^{\frac{11}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{5}{3}} + 8x^{\frac{2}{9}}$

Lösung:

a)
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 - 5x\right) = 6x^2 - 5$$

b)
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(7x^5 + 3x^2 - 6x^4\right) = 35x^4 + 6x - 24x^3$$

c)
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-4x^{\frac{7}{4}}\right) = -7x^{\frac{3}{4}}$$

d)
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^{\frac{11}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{5}{3}} + 8x^{\frac{2}{9}}\right) = \frac{55}{6}x^{\frac{5}{6}} - \frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{16}{9}x^{-\frac{7}{9}}$$

Beispiel 24.6 Bestimmen Sie die Ableitungen **C2U3LT**

a) $f(x) = 2x^3 - x$

b) $f(x) = 5x^8 - 2x^4 + 9x^2 - 7$

c) $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}}$

d) $f(x) = 3\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}$

e) $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + \sqrt{x^3}$

f) $f(x) = 4\sqrt{x}^5 - 2x^{\frac{3}{4}} + 7\sqrt{x}^{\frac{1}{2}}$

Lösung:

a) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 - x\right) = 6x^2 - 1$

b) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^8 - 2x^4 + 9x^2 - 7\right) = 40x^7 - 8x^3 + 18x$

c) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^{\frac{7}{3}}\right) = 7x^{\frac{4}{3}}$

d) Um die Ableitung von $f(x)$ zu berechnen, schreiben wir die Funktion mit gebrochenen Exponenten:

$$f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{4}}$$

Die Ableitung von $f(x)$ ist:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$$

e) Um die Ableitung von $f(x)$ zu berechnen, schreiben wir die Funktion mit gebrochenen Exponenten:

$$f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$$

Die Ableitung von $f(x)$ ist:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) = 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

f) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{4}} + 7x^{\frac{1}{2}}\right) = 10x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{4}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Die Faktor- und die Quotientenregel

Satz 24.2 Faktor- und die Quotientenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\big(g(x)\cdot h(x)\big) &= g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \end{aligned}$$

Beispiel 24.7 Faktor- und die Quotientenregel **6FHTVV**

a) $f(x) = (x^3 + 2x)\cdot(3x^2 - x)$.

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}$

Lösung:

a) $f(x) = \underbrace{(x^3 + 2x)}_{g(x)}\cdot\underbrace{(3x^2 - x)}_{h(x)}$. also

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = (3x^2 + 2)(3x^2 - x) + (x^3 + 2x)(6x - 1)$$

was man noch vereinfachen kann zu

$$f'(x) = 15x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 4x$$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{g(x)}{h(x)}$ also

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} = \frac{(2x)(x^3 - x) - (x^2 + 1)(3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2}$$

was man noch vereinfachen kann zu

$$f'(x) = \frac{-x^4 - 4x^2 + 1}{(x^3 - x)^2}$$

Beispiel 24.8 Beweisen Sie die Produktregel **M2BB47**

a) Die Ableitung von $h(x)$ lautet

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

Setzen Sie $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ein.

b) Addieren Sie *auf* dem Bruchstrich $0 = -f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x)$

c) Teilen Sie in zwei Brüche auf.

d) Faktorisieren Sie aus.

e) Berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung:

a)

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

b)

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

c) In zwei Brüche aufteilen:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \right]$$

d) Faktorisieren

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x+\Delta x) \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

e) Grenzwert

$$h'(x) = g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Das ergibt:

$$h'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beispiel 24.9 Produkt- und Quotientenregel 2 **YFQW3B**

Berechnen Sie die Ableitung ohne vorher auszumultiplizieren:

a) $f(x) = (x^2 + 3x)(x^3 - 2x)$

b) $f(x) = (x^3 + 2)(2x^2 - x)$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}$

e) $f(x) = (x^4 - x^2)(x^2 + 1)$

f) $f(x) = \frac{x^4+2x^2}{x^3+1}$

Ausserdem kann man für weitere Funktionen die Ableitungen bestimmen. Hier nur auszugsweise und ohne Beweis:

Satz 24.3 Ableitungen der Grundfunktionen

- $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

KAPITEL 25

Kurvendiskussion

Lernziele 25.0 Kurvendiskussion

- Die Studierenden können die Extrema einer Funktion bestimmen.
- Sie können anhand von Nullstellen, Extrema und dem Verhalten am Rand des Definitionsbereichs Graphen von Funktionen skizzieren.
- Sie können die Monotonie von Funktionen überprüfen.

Infobox 25.1 Minima, Maxima einer Funktion

- Extrema befinden sich dort, wo $f'(x) = 0$, d.h. die Funktion $f(x)$ steigt dort nicht.
- $f''(x)$ beschreibt die Krümmung von $f(x)$. Fahren wir dem Graphen entlang von kleinen x-Werten zu grossen, zeigt $f''(x) > 0$ an, dass wir uns in einer Linkskurve befinden und $f''(x) > 0$, dass wir uns in einer Rechtskurve befinden.
- Finden wir ein x_1 mit $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$, befinden wir uns in einem Minimum.
- Finden wir ein x_2 mit $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) < 0$, befinden wir uns in einem Maximum.

Beispiel 25.1 Gebrochen rationale Funktion **3FTCZG**

Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = \frac{3x}{4} + \frac{1}{x} + 2$$

Berechnen Sie

a) die Nullstellen

b) die Extrema

c) das Verhalten am Rand des Definitionsbereichs und

d) skizzieren Sie den Graphen der Funktionen.

Lösung:

a) **Nullstellen:** Wir setzen $f(x) = 0$ und lösen die Gleichung:

$$\frac{3x}{4} + \frac{1}{x} + 2 = 0$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit x, um den Bruch zu eliminieren:

$$\frac{3x^2}{4} + 1 + 2x = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, die man umformen kann zu:

$$3x^2 + 8x + 4 = 0$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-8 \pm 4}{6}$$

Die Nullstellen sind also $x = -\frac{2}{3}$ und $x = -2$.

b) Extrema: Sie befinden sich dort, wo $f'(x) = 0$, d.h. die Funktion $f(x)$ steigt dort nicht. Deshalb bestimmen wir die Ableitungen der Funktion, sie lautet:

$$f'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2}$$

Setzen wir $f'(x) = 0$:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplizieren wir mit x^2, so erhalten wir:

$$3x^2 = 4$$

Daraus folgt:

$$x^2 = \frac{4}{3}, \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Nun bestimmen wir die zweite Ableitung, um festzustellen, ob es sich um Maxima oder Minima handelt:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Setzen wir die Werte von x in $f''(x)$ ein:

$$f''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0, \quad f''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

Das Maximum liegt also bei $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ und das Minimum bei $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) **Verhalten am Rand des Definitionsbereichs:** Der Definitionsbereich der Funktion ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da $\frac{1}{x}$ nicht für $x = 0$ definiert ist. Wir untersuchen das Verhalten für $x \to 0^+$ und $x \to 0^-$:

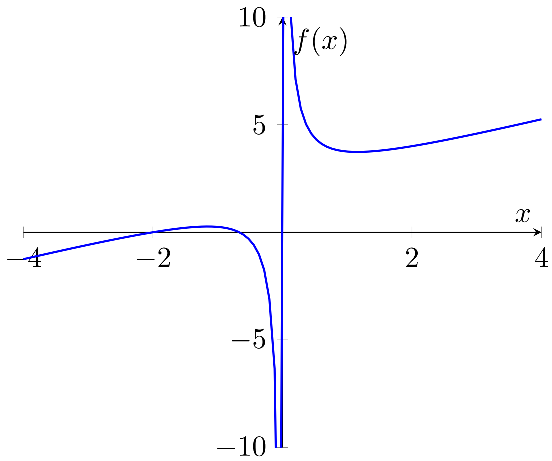
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x}{4} + \frac{1}{x} + 2\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{3x}{4} + \frac{1}{x} + 2\right) = -\infty$$

Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

d) **Graph der Funktion:** Der Graph von $f(x)$ ist durch die Nullstellen, Extrema und das asymptotische Verhalten gegeben. Unten ist eine Skizze des Graphen.



Infobox 25.2 Monotonie

- Falls $f'(x) > 0$ steigt die Funktion,
- falls $f'(x) < 0$ fällt die Funktion.

Beispiel 25.2 Monotonie **DVP2HK**

Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = \frac{3x}{4} + \frac{1}{x} + 2$$

a) Gibt es Intervalle, in denen die Funktion nur zunimmt?

b) Gibt es Intervalle, in denen die Funktion nur fällt?

Lösung:

a) Intervalle, in denen die Funktion nur zunimmt: Wir überlegen: Falls $f'(x) > 0$ nimmt die Funktion zu, falls $f'(x) < 0$ nimmt sie ab. Wir bestimmen zunächst die erste Ableitung von $f(x)$

$$f'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2}$$

Oben haben wir schon berechnet

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}},\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

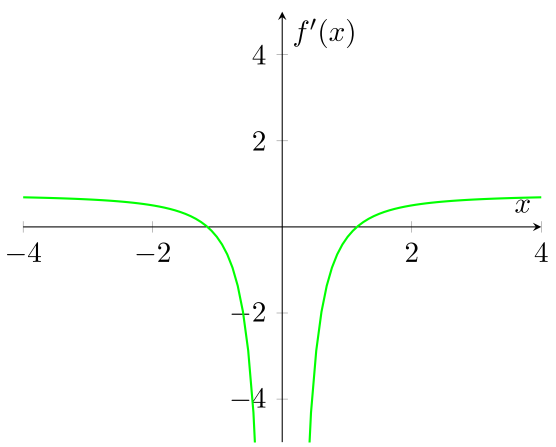
Ausserdem hat $f'(x)$ eine Definitioinslücke bei $x_3 = 0$. Um also $f'(x) > 0$ zu bestimmen, betrachten wir die folgenden Intervalle und setzen ein beliebiges x aus dem Intervall ein

	$I_1 = \left]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right[$	$I_2 = \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right[$	$I_3 = \left]0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$	$I_4 = \left]\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right[$
x	-1000	-1	1	1000
$f'(x) \approx$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

D.h. in den Intervallen I_1 und I_4 gilt $f'(x) > 0$. Die Funktion nimmt also in den Intervallen $\left]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right[$ und $\left]\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right[$ zu.

b) Intervalle, in denen die Funktion nur fällt: Aus der Tabelle entnehmen wir, dass $f'(x) < 0$ in I_2 und I_3. Die Funktion fällt also im Intervall $\left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$.

Graph von $f'(x)$



KAPITEL 26

Integration 1

Lernziele 26.0 Integration Einführung

- Die Studierenden vestehen, dass Funktion Stammfunktion $F(x)$ abgeleitet die urspüngliche Funktion $f(x)$ ergibt.
- Sie können für Grundfunktionen das unbestimmte Integral berechnen
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.
- Sie können die Integrationsgesetze anwenden (Potenzenregel, Faktorregel, Summenregel).
- Sie können das bestimmte Integral benutzen u.a. zur Flächenberechnung
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- Sie können die Integration zum Lösen von Differentialgleichungen benutzen.

26.1 Stammfunktion

Lässt sich die Ableitung umkehren? Zum Beispiel für die Funktion $f(x) = 3x^2$ finden wir, dass $F(x) = x^3$ eine Funktion ist, die man ableiten kann, um dann wieder $F'(x) = 3x^2 = f(x)$ zu erhalten.

Definition 26.1 Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$, für die gilt

$$F'(x) = f(x)$$

heisst Stammfunktion von $f(x)$

Nun fallen beim Ableiten Beiträge von Konstanten weg, deshalb ist die Umkehrung nicht eindeutig. Die Funktionen $G(x) = x^3 + 5$ und $H(x) = x^3 - 6$ sind ebenfalls Stammfunktionen von $F(x)$. Die gesamte Menge der Stammfunktionen ist $F(x) = x^3 + C$, wobei C eine Konstante ist.

Folgende Notation und Sprechweise sind geläufig:

Definition 26.2 Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

dabei ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Es gelten folgende Gesetze:

Satz 26.1 Gesetze Integration

- Für $n \neq -1$:
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
- $$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$
wobei k eine Konstante ist, d.h. k hängt nicht von x ab.
- $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Beispiel 26.1 Unbestimmtes Integral 1 **1STQM5**

a) $\int x^5\,dx$

b) $\int 4x^3\,dx$

c) $\int 3x\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

e) $\int (x^5 + 4x^3 + 3x)\,dx$

Lösung:

a) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$

b) $\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx = 4\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = x^4 + C$

c) $\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{3x^2}{2} + C$

d) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

e) $\int (x^5 + 4x^3 + 3x)\, dx = \int x^5\, dx + \int 4x^3\, dx + \int 3x\, dx = \frac{x^6}{6} + x^4 + \frac{3x^2}{2} + C$

Beispiel 26.2 Unbestimmtes Integral 2 **CYMIFU**

a) $\int \sqrt{x}\, dx$

b) $\int (3x^2 + 5)\, dx$

c) $\int (5x^6 + 2x^3 - 4x + 3)\, dx$

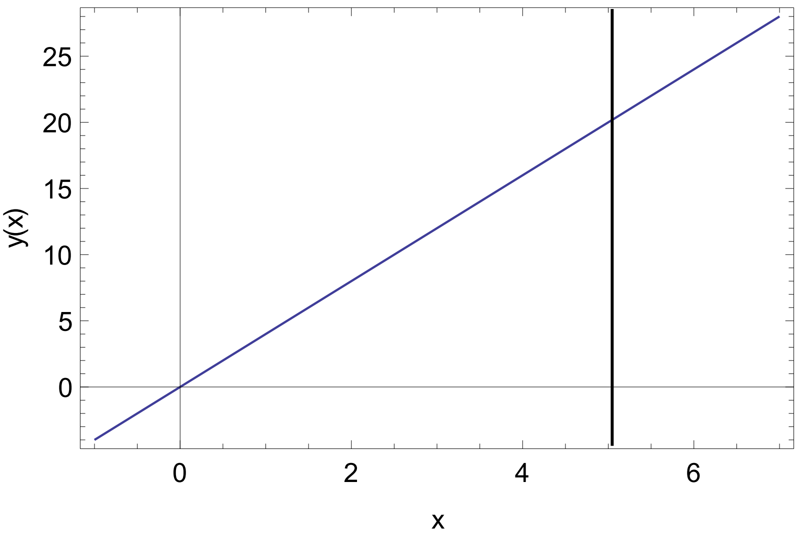
d) $\int (8x^{19} - 32x^{15} - 12x^{-3})\, dx$

26.2 Flächenberechnung

Es stellt sich heraus, dass die Stammfunktion benutzt werden kann, um Flächen zu berechnen.

Beispiel 26.3 Fläche unter Geraden **PV3NPU**

Wie gross ist die Fläche zwischen dem Graphen von $y = 4x$ und der x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = 5$?



Lösung:
Wir rechnen:

$$A = \int_0^5 4x\, dx = [4\frac{x^2}{2}]_0^5 = 4 \cdot \frac{5^2}{2} - 4 \cdot \frac{0^2}{2} = 50 - 0 = 50$$

Dies stimmt gut mit unseren geometrischen Überlegungen überein:

Das Dreieck mit der Grundlinie 5 und Höhe 20 hat die Fläche

$$A = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50 \; .$$

Definition 26.3 Bestimmtes Integral

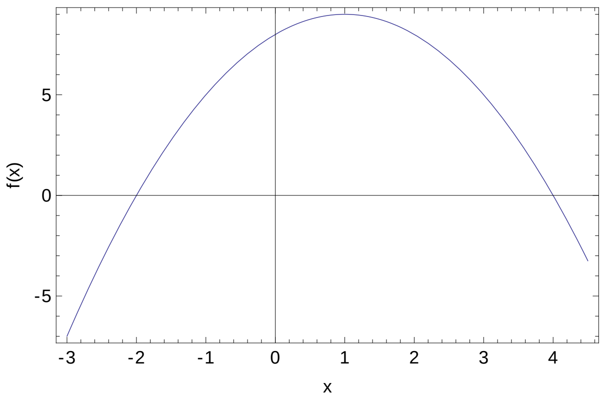
$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dabei ist $F'(x) = f(x)$.

Wir können das bestimmte Integral benutzen, um Flächen zu berechnen. Falls $f(x) \geq 0$, dann ergibt das bestimmte Integral von a bis b die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x)$ zwischen den Werten a und b.

Beispiel 26.4 Fläche Parabel 1 **X5N55G**

Bestimme die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = 8 + 2x - x^2$ und der x-Achse.



Lösung:

Zunächst setzen wir $f(x) = 0$, um die Nullstellen zu finden:

$$8 + 2x - x^2 = 0$$

Die Nullstellen sind

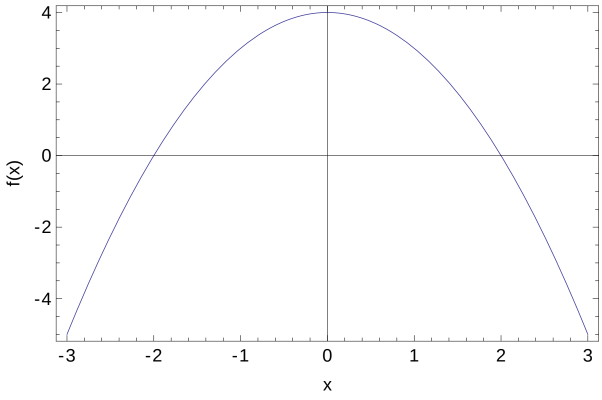
$$x_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$$

Nun bestimmen wir das Integral von $f(x)$ zwischen den Grenzen $x = -2$ und $x = 4$:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-2}^{4}(8 + 2x - x^2)\,dx &= \left[8x + x^2 - \tfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{4} \\ &= \left(8(4) + 4^2 - \tfrac{4^3}{3}\right) - \left(8(-2) + (-2)^2 - \tfrac{(-2)^3}{3}\right) = 36 \end{aligned}$$

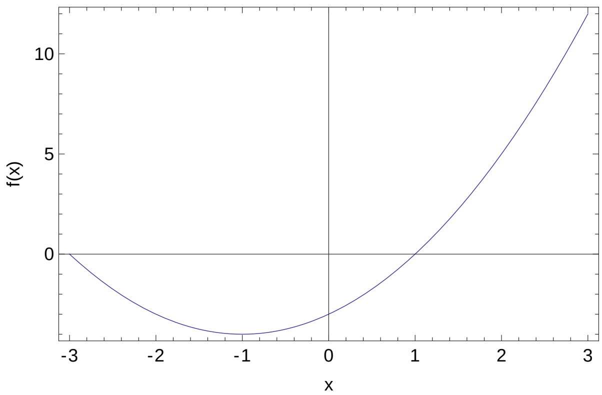
Beispiel 26.5 Fläche Parabel 2 **HDUM4E**

Bestimme die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = 4 - x^2$ und der x-Achse.



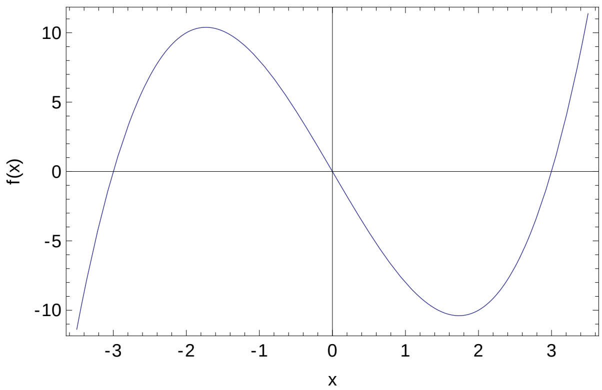
Beispiel 26.6 Fläche Parabel 3 **IYRE5M**

Bestimme die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^2 + 2x - 3$ und der x-Achse zwischen den Werten $x = -2$ und $x = 0$.



Beispiel 26.7 Fläche **UFYRTC**

Bestimme die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 - 9x$ und der x-Achse zwischen den Werten $x = -3$ und $x = 3$.



26.3 Differentialgleichung

Wenn wir Gleichungssysteme lösen, die Ableitungen enthalten, nennen wir das ebenfalls Integration.

Beispiel 26.8 Differentialgleichung 1 **MZWZRB**

Für eine Funktion gilt $f''(x) = 6x - 10$. Sie hat beim Punkt $\big(x/f(x)\big) = (1/1)$ die Steigung -1. Wie lautet die Funktion?
Lösung:

Wir integrieren $f''(x)$, um $f'(x)$ zu finden:

$$f'(x) = \int (6x - 10)\, dx = 3x^2 - 10x + C_1$$

Wir wissen, dass die Steigung (erste Ableitung) der Funktion beim Punkt $(1/1)$ gleich -1 ist:

$$f'(1) = -1$$

Dies ergibt die Gleichung

$$3(1)^2 - 10(1) + C_1 = -1 \ \Rightarrow \ C_1 = 6$$

Damit lautet die erste Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$$

Nun integrieren wir $f'(x)$, um $f(x)$ zu finden:

$$f(x) = \int (3x^2 - 10x + 6)\, dx = x^3 - 5x^2 + 6x + C_2$$

Wir wissen, dass der Punkt $(1, 1)$ auf dem Graphen der Funktion liegt:

$$f(1) = 1$$

Dies ergibt die Gleichung

$$1^3 - 5(1)^2 + 6(1) + C_2 = 1$$

mit der Lösung $C_2 = -1$.
Damit lautet die gesuchte Funktion:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

Beispiel 26.9 Differentialgleichung 2 **KQQ346**

$$f'(x) = 2x + 5 \; .$$

Ausserdem gilt $f(0) = 2$. Wie lautet $f(x)$?

Beispiel 26.10 Differentialgleichung 3 **H37XQX**

Für die Funktion gilt $f''(x) = 6x^2$. Dabei soll auch $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ erfüllt sein. Wie gross ist $f(2)$?

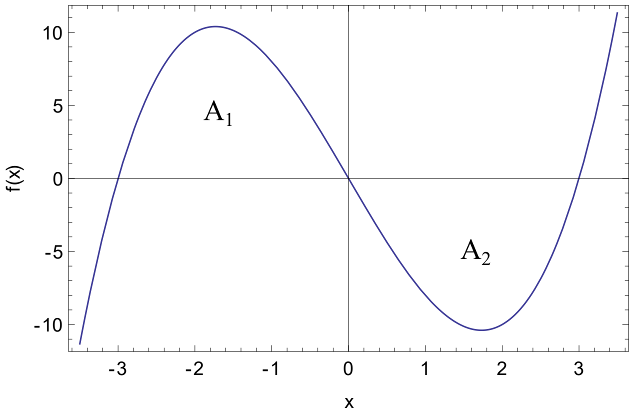
26.4 Weitere Stammfunktionen

Satz 26.2 Stammunktionen der Grundfunktionen (Auswahl)

$$\begin{array}{rcl}
\int e^x \, dx & = & e^x + C \\
\int \frac{1}{x} \, dx & = & \ln|x| + C \\
\int \sin(x) \, dx & = & -\cos(x) + C \\
\int \cos(x) \, dx & = & \sin(x) + C \\
\int \tan(x) \, dx & = & -\ln|\cos(x)| + C
\end{array}$$

C ist die Integrationskonstante.

26.5 Symmetrien nutzen bei der Integration



Im Beispiel oben haben Sie vielleicht festgestellt, dass

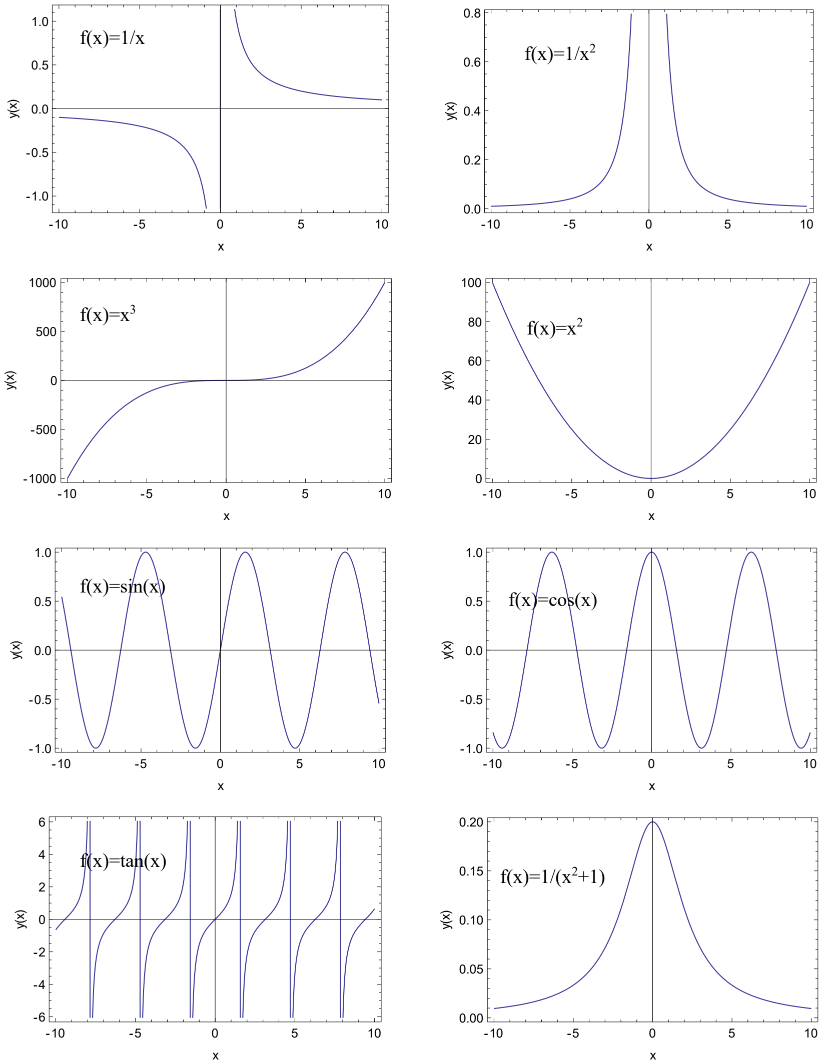
$$\int_{-3}^{3} (x^3 - 9x) dx = 0$$

Es ist ausserdem kein Zufall, dass

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \int_{-3}^{0} x^3 - 9x \, dx = -\frac{81}{4} \\ A_2 & = & \int_{0}^{3} x^3 - 9x \, dx = \frac{81}{4} \end{array}$$

also $-A_1 = A_2$.

Symmetrische und anti-symmetrische Funktionen



Es gibt einige Funktionen, für die gilt $f(-x) = f(x)$. Wir nennen Sie symmetrisch. Z.B. $f(x) = x^2$ ist symmetrisch:

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2 = f(x)$$

Für andere gilt $f(-x) = -f(x)$. Wir nennen Sie antisymmetrisch. Z.B. $f(x) = x^3$ ist antisymmetrisch:

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x)$$

Definition 26.4 Symmetrische und antisymmetrische Funktionen

$$\begin{array}{rcll} f(-x) & = & f(x) & \text{, wenn } f(x) \text{ symmetrisch ist.} \\ f(-x) & = & -f(x) & \text{, wenn } f(x) \text{ antisymmetrisch ist.} \end{array}$$

Die Graphik oben zeigt die wichtigsten symmetrischen (rechts) und anti-symmetrischen (links) Funktionen.

Wer sie kennt, berechnet z.B. folgendes Integral schnell

$$\int_{-5}^{5} x^3 dx = 0$$

da die Flächen links und rechts der y-Achse gleich gross sind. Die Integrale $A_1 = \int_{-5}^{0} x^3\, dx$ und $A_2 = \int_{0}^{5} x^3\, dx$ ergeben $A_1 = -A_2$ und $A_1 + A_2 = A_1 + (-1A_1) = 0$. Dies lässt sich verallgemeinern alle ungeraden Funktionen $u(x)$:

$$\int_{-a}^{a} u(x) dx = 0$$

Sind die Integrationsgrenzen für gerade Funktionen symmetrisch, z.B. $a = -5$ und $a = 5$

$$\int_{-5}^{5} x^2 dx$$

dann ist es oft eine Vereinfachung zu schreiben

$$\int_{-5}^{5} x^2 dx = 2 \int_{0}^{5} x^2 dx$$

In Worten: Es reicht die Fläche rechts der y-Achse zu berechnen und die zweifach zu zählen, denn hier gilt für die Flächen $A_1 = A_2$. Deshalb also

$$\int_{-5}^{5} x^2 dx = 2 \int_{0}^{5} x^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 2 \cdot \left[\frac{5^3}{3} - 0\right] = \frac{250}{3}$$

Allgemein gilt für ungeraden Funktionen $g(x)$:

$$\int_{-a}^{a} g(x) dx = 2 \int_{0}^{a} g(x) dx$$

Teil III

Physik

KAPITEL 31

Energie und Leistung

Lernziele 31.0 Energie

- Die Studierenden kennen verschiedene Formen der Energie
  - Arbeit $W = F \cdot s$ (Beträge: $W = |F| \cdot |s|$)
  - Potentielle Energie $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$
  - Kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
  - Elastische Energie $E_{\text{elast}} = \frac{1}{2} D s^2$
  - Chemische Energie $E_{\text{chem}} = m \cdot H_u$; H_u: Heizwert in J/Kg
  - Innere Energie $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ (spezitifische Wärme)
- Die Studierenden wissen, dass die Energie in einem abgeschlossenen System erhalten ist.
- Die Studierenden wissen, dass Energie zwischen den verschiedenen Energieformen umgewandelt wird, z.B. Umwandlung Arbeit in Energie: $W \Leftrightarrow E$; $W = E$ gemessen in J, Nm, Ws, kWh
- Die Studierenden kennen die Leistung $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$
- Die Studierenden kennen den Wirkungsgrad $\eta = \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}}$ (keine Einheiten) und die nutzbare Energie $E_{\text{out}} = E_{\text{in}} \cdot \eta$
- Die Studierenden kennen den maximalen Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine. Es ist der Carnot-Wirkungsgrad $\eta_C = \frac{T_w - T_k}{T_w}$

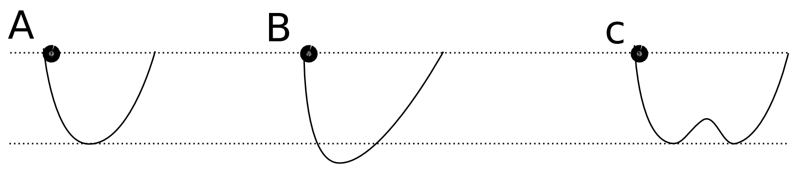
31.1 Gedanken-Experimente Energieerhaltung

Beispiel 31.1 Kugelbahn **TRJFPE**

a) Wie hoch kommt der reibunsfrei rollende Ball auf der anderen Seite? Begründen Sie mit physikalischen Argumenten (Begriffen).

b) Bei welcher Bahn erreicht die Kugel die höchste Geschwindigkeit? Begründen Sie mit physikalischen Argumenten.

c) Nebenbei: Bei welcher Bahn bewegt sich die Kugel am Schnellsten von einer Seite zur anderen?

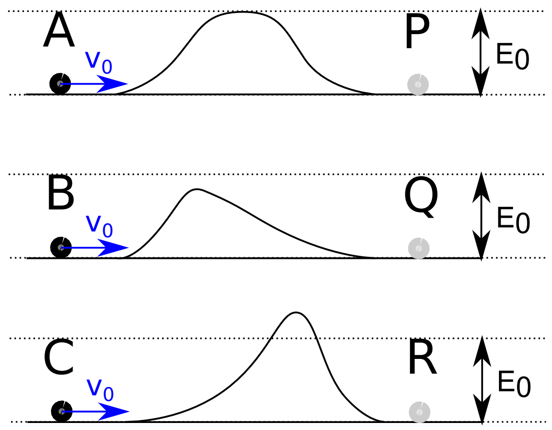


Beispiel 31.2 Kugelbahn 2 **N1CGHV**

Alle Kugeln werden bei A,B oder C mit gleicher Geschwindigkeit gestartet. Wir betrachten das System idealisiert, d.h. ohne Verluste durch Reibung.

a) Vergleichen Sie die Geschwindigkeiten bei P, Q und R. Begründen Sie mit physikalischen Argumenten (Begriffen).

b) Bei welcher Bahn erreicht die Kugel die höchste Geschwindigkeit, bei welcher die tiefste?



Definition 31.1 Arbeit

$$W = F \cdot s$$

- W: Arbeit in J=$\mathrm{N\,m}$
- F: Kraft in N
- s: Strecke in m

Hier sind einige typische Variationen für den Ausdruck für die Arbeit:

- Stehen F und s nicht senkrecht aufeinander, benutzen wir das Skalarprodukt ($\odot$): $W = \vec{F} \odot \vec{s}$.
- Ändert sich die Kraft auf dem Weg, berechnen wir das Integral

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds$$

31.2 Energieformen

Beispiel 31.3 Handgepäck **NXHQAW**

Ein Koffer mit 8 kg Masse wird auf 2 m Höhe verstaut.

a) Welche Energieformen kommen im System vor?

b) Wie lautet die Energieerhaltung und welche Energien sind Null?

c) Wie gross ist die Hubarbeit?

Eine Masse auf der Erdoberfläche erfährt die Kraft $m \cdot g$. Wird es um h angehoben, wird die Hubarbeit verrichtet:

$$W = F \cdot s = m \cdot g \cdot h$$

Definition 31.2 Potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

- E_{pot}: Energie in J
- m: Masse in kg
- g: Ortsfaktor, typischwerweise auf der Erdoberfläche $g = 9.81\mathrm{N\,kg^{-1}}$
- h: Höhe gegenüber Referenzpunkt in m

Definition 31.3 Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

- E_{kin}: Energie in J
- m: Masse in kg
- v: Geschwindigkeit in $\mathrm{m\,s^{-1}}$

Beispiel 31.4 Kinetische Energie, Herleitung **TVSMXM**

Wir betrachten ein Auto der Masse m, durch die konstanten Kraft F aus dem Stand beschleunigt wird. Wie gross ist die Kinetische Energie, wenn es mit der Geschwindigkeit v fährt?

a) Wie schnell fährt es nach der Zeit t?

b) Wie hängen Beschleunigung und Kraft zusammen?

c) Wir 'erweitern'

$$W = \int F\,ds = \int F \cdot \frac{ds}{dt} dt$$

Setzen Sie in diesen Ausdruck die Angaben von oben ein.

d) Berechnen Sie das bestimmte Integral.

e) Substituieren Sie $a \cdot t$ mit v

Beispiel 31.5 Senkrechter Wurf **PI1IV8**

Ein Tennisball wird senkrecht nach oben geworfen mit $v = 15$ m/s.

a) Welche Energieformen kommen im System vor?

b) Wie lautet die Energieerhaltung und welche Energien sind Null?

c) Wie hoch fliegt Ball?

d) Wie lange fliegt Ball nach oben? Betrachten Sie die Geschwindigkeit.

Beispiel 31.6 Abbremsen **F896IQ**

Ein Auto mit $m = 1200$ kg bremst.

a) Welche Energieformen kommen im System vor?

b) Wie lautet die Energieerhaltung und welche Energien sind Null?

c) Berechnen Sie kinetische Energie des Autos bei v_1 =90 km/h und v_2 =30 km/h.

d) "Energieverlust" beim Bremsen von v_1 auf v_2?

e) Energie wird nie vernichtet. Wo ist also die Energie hin?

Hier wird kinetische Energie in innere Energie der Bremsbelägen umgewandelt.

Infobox 31.1 Energieerhaltung

Die Energie ist immer erhalten in einem abgeschlossenen System.

Definition 31.4 Innere Energie

$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$

- Q: Wärme in J
- m: Masse in kg
- c: spezitifische Wärmekapazität in $\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$
- ΔT: Temperatur in K

Beispiel 31.7 Erwärmung Bremschreiben **2BI74M**

Wie stark erwärmen sich die Bremsschreiben und Bremsklötze, falls

- die Bremsen total 5 kg Masse haben,
- und aus Stahl $c = 0.477\ \mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ bestehen.

Die Bremsenergie sei 300 kJ. **Lösung:**
Wir formen um und setzen ein

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \;\Rightarrow\; \Delta T = \frac{Q}{m \cdot c} = 126\,\mathrm{K}$$

Definition 31.5 Elastische Energie

$E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}Ds^2$

- E_{elast}: Energie in J
- D: Federkonstante in $\mathrm{N\,m^{-1}}$
- s: Strecke (Dehnung der Feder) in m

Achtung: s ist nicht die Länge der Feder, sondern die Auslenkung aus der Ruhelage der Feder. Für kleine Auslenkungen verhalten sich viele Dinge wie eine Feder:

- Gummiseil
- Auto-Carosserie

Das Gesetzt von Hook gilt meist, wenn das belastete Objekt nach der Belastung wieder in die ursprüngliche Form zurück spring.

Beispiel 31.8 Elastische Energie, Herleitung **S8IPX9**

Wir betrachten eine Feder, bei der die Kraft $F = -D \cdot s$ beträgt[a], mit D die Federkonstante und s die Auslenkung aus der Ruhelage der Feder.

a) Setzen Sie die Angaben in das Integral ein

$$W = \int F \cdot ds$$

b) Integrieren Sie.

[a] Gesetzt von Hook

Beispiel 31.9 Federwaage **NW6EAT**

Eine Federwaage wurde durch eine Belastung mit 0.25 N um 5 cm verlängert.

a) Wie gross ist die Federkonstante?

b) Welche Energie ist in der gespannten Feder gespeichert.

31.3 Leistung und Wirkungsgrad

Definition 31.6 Leistung

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt}$$

Einheiten: $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Watt} = \mathrm{W}$
Veraltet: $1\mathrm{PS} = 735\,\mathrm{W}$

Beispiel 31.10 Jungfrau-Marathon **VXK36W**

Berechnen Sie die Leistung.

a) Ein Wanderer (m=65 kg) steigt in einer Stunde um 400 m.

b) Den Jungfrau-Marathon legt ein Läufer (m=65 kg) in 2h50min hinter sich und steigt dabei 1829 m.

Definition 31.7 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{E_{\mathrm{out}}}{E_{\mathrm{in}}} = \frac{P_{\mathrm{out}}}{P_{\mathrm{in}}}$$

E_{out} nutzbare Energie, E_{in} Energie-Aufwand

Beispiel 31.11 Kernkraftwerk **3JJ3KC**

Das Kernkraftwerk Leibstadt verwandelt die thermische Leistung von P_{th} =3600 MW in P_{el} =1275 MW elektrische Leistung. Berechnen Sie den Wirkungsgrad η.

Satz 31.1 Carnot-Wirkungsgrad

$$\eta_C = \frac{T_w - T_k}{T_w}$$

T_w: Temperatur auf warmen Seite, T_k: Temperatur auf kalten Seite.

Temperaturen müssen absolut, d.h. in **Kelvin** angegeben werden.

η_C ist theoretisch maximaler Wirkungsgrad von Wärmemaschinen. Er kann in den Anwendungen angenähert aber nicht überschritten werden.

Definition 31.8 Chemische Energie

$$E_{\text{chem}} = m \cdot H_u$$

- E_{chem}: Arbeit in J
- m: Masse in kg
- H_u: Heizwert in $\text{J}\,\text{kg}^{-1}$

Beispiel 31.12 Verbrennungsmotor **YY78XG**

Ein Verbrennungsmotor hat eine Verbrennungstemperatur $T_w = 2500°$C und eine Abgastemperatur von $T_k = 1000°$C.

a) Wie gross ist der theoretische Carnot-Wirkungsgrad η_C?

b) Im Motor ergibt 250 g Benzin (H_u =42 MJ/kg) 1 kWh mechanische Energie. Wie gross is also der experimentelle Wirkungsgrad η_{eff}?

Online-Materialien

- Potentialtopf, Dissipation (ETHZ)
  `https://experimente.phys.ethz.ch/de/100/10000/20002/30462/`
- Potentielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt (ETHZ)
  `https://experimente.phys.ethz.ch/de/100/10000/20002/30463/`
- Antigraviation? (ETHZ)
  `https://experimente.phys.ethz.ch/de/100/10000/20002/30040/`

KAPITEL 32

Wärmeübertragung

Lernziele 32.0 Wärmeübertragung

- Die Studierenden kennen die drei Arten der Wärmeübertragung
  - Wärmeleitung,
  - Konvektion (Wärmekonvektion, Wärmeströmung)
  - Wärmestrahlung
- Sie können den Wärmestrom berechnen durch Wärmeleitung in einem Material und an Grenzschichten.
- Sie kennen den Begriff des thermischen Widerstands und können damit der Wärmedurchgang durch geschichtete Bauteile berechnen.

Wärmetransport kann auf drei unterschiedliche Arten stattfinden wie Abb. 32.1 zeigt.

- Wärmeleitung: Der Griff wird warm, weil der Pfannenboden warm wird.

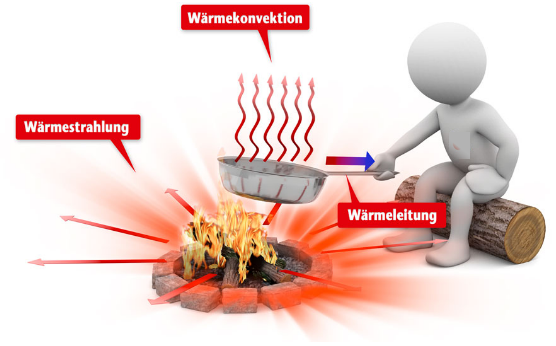
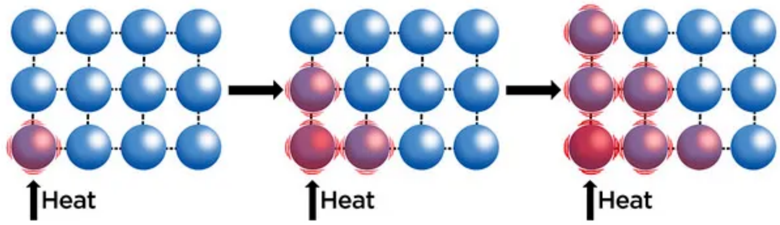


Abbildung 32.1: Die drei Arten der Wärmeübertragung

- Konvektion (Wärmekonvektion, Wärmeströmung): Über dem Feuer steigt warme Luft auf, in der man z.B. Würste braten könnte.
- Wärmestrahlung: Die Beine der gezeichneten Figur werden warm, obwohl an ihnen keine heisse Luft vorbeizieht, und obwohl sie nicht in Kontakt mit heissen Objekten stehen.

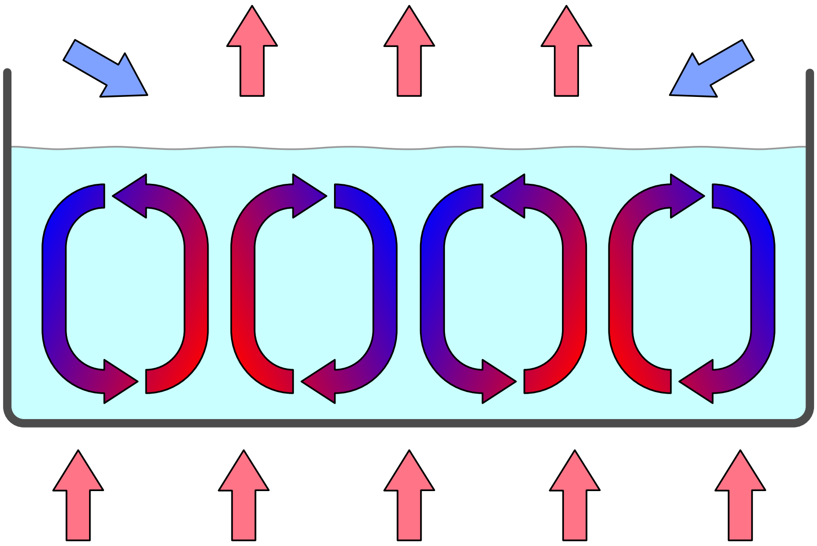
In diesem Abschnitt werden die ersten beiden Arten behandelt; die Wärmestrahlung wird im folgenden Kapitel beschrieben.

32.1 Wärmeleitung



Bei der Wärmeleitung bewegt sich nur die (Wärme-)*Energie* durch den Körper, während die Teilchen des Körpers an ihrem Platz bleiben. Deshalb tritt Wärmeleitung vor allem in Feststoffen (Eisen, Holz, Glas, etc.) auf. Oben wird gezeigt, wie Wärmeleitung durch Vibrationen funktioniert: Das erste rote Atom wird von aussen erwärmt. Betrachten wir das Atom mit dem Mikroskopt, sehen wird, dass Wärme zu Bewegung der Atom führt. Das Atom wird als geschüttelt. Diese Vibrationen werden dann im Material an die benachbarten Atome weitergegeben. Typischerweise sind Metalle gute Wärmeleiter, während Flüssigkeiten und Gase eher schlechte Wärmeleiter sind. Dies hat damit zu tun, dass in Metallen auch Elektronen die Wärme (besonders effizient) weitergeben können,, und in Flüssigkeiten die Vibrationen schlecht weitergegeben werden, weil die Moleküle wenig aneinander gebunden sind.

Ein bekanntes Beispiel für Wärmeleitung aus dem Alltag ist der Kochtopf: obwohl nur der Boden erhitzt wird, verteilt sich die Wärme auch auf die Wände. Auch Kühlrippen von Mikroprozessoren oder von Wärmemaschinen funktionieren nach diesem Prinzip: Ein grosses Metallstück leitet die Wärme weg vom Ort, wo die Wärme entsteht. Umgekehrt wird die Wärmeleitung durch Isoliermaterialien wie Kunststoffgriffe an Töpfen oder durch Dämmstoffe in Hauswänden verhindert. Winterkleidung hat ebenfalls diese Funktion, nämlich die Wärmeleitung weg vom Körper zu minimieren.



Bei der Konvektion hingegen bewegt sich die Wärme zusammen mit den Teilchen des Mediums. Das heisst, die Teilchen selbst transportieren die (Wärme-)*Energie*. Ein typisches Beispiel ist die Suppe in einem Topf, die auf dem Herd erhitzt wird: die warme Suppe am Boden hat eine geringere Dichte als die kalte Suppe weiter oben, wodurch sie aufsteigt und zur Erwärmung des gesamten Inhalts führt (siehe Abbildung oben). Ein weiteres Beispiel ist Lava, die in der Erdkruste aufsteigt und dabei die darüberliegenden Erdschichten erwärmt.

32.2 Wärmeleitung – mathematische Beschreibung

Typischerweise ist der Wärmestrom $\dot{Q}$ gross, wenn bei

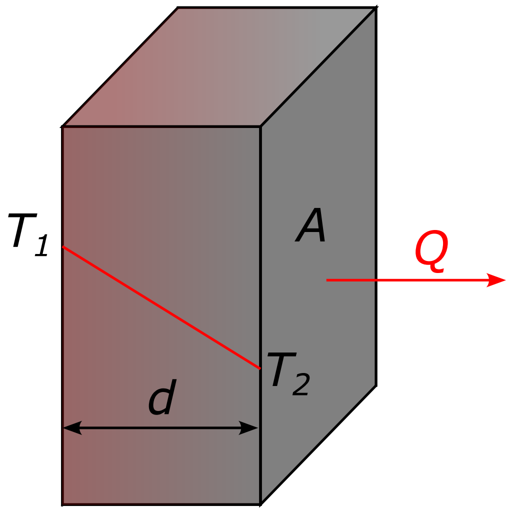
- grosser Fläche A, die die Wärme überträgt,
- grossem Temperaturunterschied ΔT
- kleinen Materialdicken d.

Oder umgekehrt: eine dicke Schicht von Isoliermaterial bremst den Wärmestrom, d.h. es isoliert.

Verschiedene Materialien leiten Wärme unterschiedlich gut, was durch den Wärmeleitkoeffizienten λ beschrieben wird.

Es ist gebräuchlich die Ableitung $\frac{dQ}{dt}$ mit $\dot{Q}$ abzukürzen. Dies bedeutet, dass Q in Joule gemessen wird, $\dot{Q}$ hingegen in J/s, also in Watt.

Satz 32.1 Gesetz für die Wärmeleitung[a]



$$\dot{Q} = \frac{\lambda \cdot A}{d} \cdot \Delta T$$

- $\dot{Q}$: Wärmestrom in W
- λ: Wärmeleitfähigkeit des Materials in $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$
- A: Fläche, über die die Wärme transportiert wird in $\mathrm{m^2}$
- ΔT: Temperaturunterschied zwischen beiden Seiten des Materials in K,
- d: Dicke des Materials in m

Beispiel 32.1 Wärmestrom durch eine Wand **GQ89N1**

Wir betrachten ein Stück Wand (A=10 $\mathrm{m^2}$), bei der der Temperaturunterschied zwischen den beiden Seiten $20\,\mathrm{K}$ beträgt .

a) Berechnen Sie den Wärmestrom durch eine Wand aus Beton mit einer Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 2.1\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, mit $d = 30\,\mathrm{cm}$.

b) Berechnen Sie den Wärmestrom durch Dämmstoff (z.B. Glaswolle) mit einer Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 0.034\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, mit $d = 16\,\mathrm{cm}$.

c) Berechnen Sie das Verhältnis der Wärmeströme. Was folgern Sie daraus?

[a] aufgestellt von Joseph Fourier, eigentlich Baron Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 — 1830)

Thermischer Widerstand

Der thermische Widerstand R_{th} ist eine alternative Art, den Wärmetransport zu beschreiben. Er ist definiert durch :

Definition 32.1 Thermischer Widerstand

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{\text{th}}}$$

- $\dot{Q}$: Wärmestrom in W,
- R_{th}: Thermischer Widerstand in $\mathrm{K\,W^{-1}}$,
- ΔT: Temperaturunterschied zwischen beiden Seiten des Materials in K

Der Vergleich von Satz 1 und der Definition 1 ergibt:

$$R_{\text{th}} = \frac{d}{\lambda \cdot A}$$

Die Schreibweise mit dem thermischen Widerstand hat den Vorteil, dass thermische Widerstände addiert werden können, wenn Materialien aufeinander geschichtet sind (ohne Beweis).

Infobox 32.1 Thermischer Widerstand einer Schichtung

$$R_{\text{th, tot}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2} + \dots$$

Beispiel 32.2 Thermischer Widerstand einer Schichtung **37EFAM**

Wir betrachten einen Ausschnitt einer Wand mit $A = 10\mathrm{m}^2$.

a) Berechnen Sie den thermischen Widerstand einer Wand aus Beton mit einer Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 2.1\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, mit $d = 30\,\mathrm{cm}$.

b) Berechnen Sie den thermischen Widerstand einer Schicht aus Glaswolle mit einer Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 0.034\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, mit $d = 16\,\mathrm{cm}$.

c) Wie gross ist der thermischen Widerstand, wenn beide aufeinander gelegt werden?

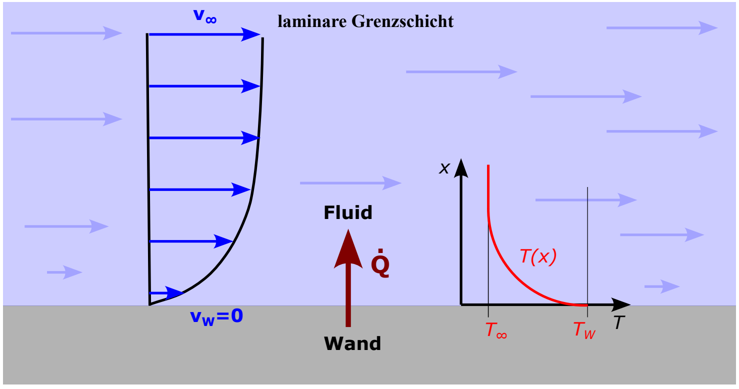


Abbildung 32.2: Strömungs- und Temperaturverhalten in der Grenzregion einer laminaren Strömung (z.B. kalte Luft) und einer warmen Wand. Direkt an der Wand kann sich die Luft nicht bewegen, deshalb ist dort die Geschwindigkeit $v_G = 0$. Je weiter die Luft von der Wand entfernt ist, desto schneller strömt sie. Deshalb ist die Temperatur direkt bei der Wand gross, und nimmt mit dem Abstand zur Wand ab.

32.3 Wärmeübergang an Grenzschichten

Wenn die Oberfläche eines warmen Körpers in Kontakt mit einer kühleren Fluid (Gas, Flüssikgiet, d.h. z.B. Luft, Wasser, Öl, ...) ist, bildet sich eine Grenzschicht entlang der Oberfläche (siehe Abbildung 32.2). Wir betrachten eine Wand: Direkt an der Oberfläche hat die Flüssigkeit eine Strömungsgeschwindigkeit von $v = 0$ und nimmt daher die Temperatur der Wand T_W an. Mit zunehmendem Abstand von der Wand nimmt die Strömungsgeschwindigkeit v zu, während die Temperatur auf den Wert T_∞ abfällt, nämlich auf die Temperatur der Flüssigkeit weit entfernt von der Wand.

Der Wärmeübergang für eine Fläche A lässt sich näherungsweise mit dem folgenden empirischen Gesetz beschreiben:

Satz 32.2 Wärmeübergang

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (T_\mathrm{Wand} - T_\infty)$$

- $\dot{Q}$: Wärmestrom in W,
- α: Wärmeübergangskoeffizient in $\mathrm{W/m^2/K}$,
- A: Fläche, über die die Wärme transportiert wird in m^2,
- ΔT: Temperaturunterschied zwischen beiden Seiten des Materials in K.

Beispiel 32.3 Wärmeverlust eines Heizungsrohrs 2PQVWQ

Ein waagerechtes Heizungsrohr mit einem Durchmesser von $30\,\mathrm{mm}$ hat eine Oberflächentemperatur von $50\,°\mathrm{C}$. Die Umgebungsluft hat eine Temperatur von $15\,°\mathrm{C}$. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt $\alpha = 10\,\mathrm{W/m^2/K}$.

a) Welche Oberfläche hat das Rohr, wenn wir ein Stück von 1 m Länge betrachten.

b) Wie gross ist der Wärmeverlust pro Meter Rohr?

Lösung:

a) Oberfläche ($l = 1$ m):

$$A = 2\pi r \cdot l = 0.09425\,\mathrm{m}^2$$

b) Wärmeverlust pro Meter

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (T_{\mathrm{Wand}} - T_\infty) = 33.0\,\mathrm{W}$$

32.4 Wärmedurchgang in einer Hauswand

Typischerweise besteht eine Hauswand aus mehreren Schichten, wie z.B. Ziegeln und Dämmmaterial. Der gesamte Wärmedurchgang durch die Wand lässt sich durch die Summe der thermischen Widerstände beschreiben. Der Gesamtwiderstand R_{tot} setzt sich zusammen aus:

Infobox 32.2 Thermischer Widerstand von homogenen Bauteilen

$$R_{\mathrm{tot}} = R_{\mathrm{innen}} + R_{\mathrm{Wand,1}} + R_{\mathrm{Wand,2}} + \ldots + R_{\mathrm{aussen}}$$

Als *homogene* Bauteile bezeichnet man Konstruktionen, die aus mehreren durchgehenden, hintereinanderliegenden Schichten von Baumaterialien bestehen (Beispiele oben). Treten regelmässig wiederkehrende Unterbrechungen wie z.B. Stahlstützen, Betonpfeiler oder Sparren auf, so handelt es sich um ein *inhomogenes* Bauteil.

Im Bau wird meist mit dem U-Wert gearbeitet:

Definition 32.2 Wärmedurchgangskoeffizient (U-Wert)

$$\dot{Q} = U \cdot A \cdot \Delta T$$

- $\dot{Q}$: Wärmestrom in W,
- U: Wärmedurchgangskoeffizient in $\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$,

- A: Fläche, über die die Wärme transportiert wird, in m^2,
- ΔT: Temperaturunterschied zwischen beiden Seiten des Materials in K

Der Vergleich des Satzes 1 mit den Definitionen 2 und 1 ergibt

$$\frac{\lambda A}{d} = \frac{1}{R_{\mathrm{th}}} = U \cdot A$$

und also

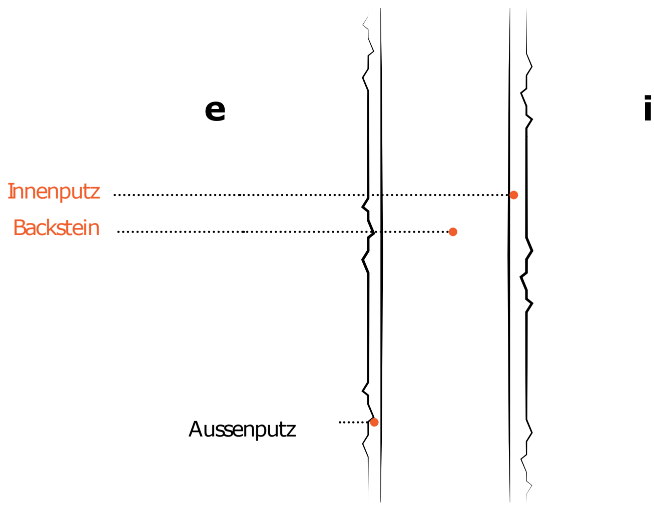
Infobox 32.3 U-Wert und thermischer Widerstand

$$U = \frac{1}{R_{\mathrm{th}} \cdot A} = \frac{\lambda}{d}$$

Es gilt auch $R_{\mathrm{th}} = \frac{1}{\alpha \cdot A}$ und damit

$$U^{-1} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \ldots + \frac{1}{\alpha_a}$$

Beispiel 32.4 U-Wert Berechung Mauerwerk NQGCRQ



d [m]	0.015	0.15	0.02
λ [$\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$]	0.7	0.44	0.87

Wir betrachten einen Ausschnitt einer Hauswand ($A = 1\,\mathrm{m}^2$).

a) Berechnen Sie den thermischen Widerstand der 3 Schichten der Wand.

b) Berechnen Sie den thermischen Widerstand der Grenzsichten mit $\alpha_i = 8\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$ $\alpha_a = 25\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$.

c) Wie gross ist der gesamte thermische Widerstand der ganzen Mauer?

d) Wie gross ist der U-Wert der Mauer?

Lösung:

a) thermischer Widerstand der 3 Schichten

$$R_{\mathrm{th},1} = \frac{d_1}{\lambda_1 A} = 0.0214\,\mathrm{K\,W^{-1}},\ R_{\mathrm{th},2} = 0.3409\,\mathrm{K\,W^{-1}},\ R_{\mathrm{th},3} = 0.0230\,\mathrm{K\,W^{-1}}$$

b) Grenzsichten

$$R_{\mathrm{th,i}} = 1\alpha \cdot A = 0.125\,\mathrm{K\,W^{-1}},\ R_{\mathrm{th,a}} = 0.04\,\mathrm{K\,W^{-1}}$$

c) gesamte thermische Widerstand

$$R_{\mathrm{th,tot}} = R_{\mathrm{th,i}} + R_{\mathrm{th},1} + R_{\mathrm{th},2} + R_{\mathrm{th},3} + R_{\mathrm{th,a}} = 0.550\,326\,\mathrm{K\,W^{-1}}$$

d) U-Wert (für die Fläche $A = 1\mathrm{m}^2$ gilt $U = 1/R$):

$$U = 1/R_{\mathrm{th,tot}} = 1.8171\,\mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-2}}$$

Online-Materialien

- Animationen zur Wärmeleitung
  `https://www.tec-science.com/de/thermodynamik-waermelehre/waerme/warmeubertragung-durch-warmeleitung/`

KAPITEL 33

Schwingungen und Wellen

Lernziele 33.0 Schwingungen und Wellen

- Die Studierenden können transversale von longitudinalen Wellen unterscheiden.
- Sie kennen den Zusammenhang zwischen Periode T und Frequenz f: $f = 1/T$.
- Sie kennen de Zusammenhang zwischen Ausbreitunggeschwindigkeit einer Welle c, der Periode T und der Wellenlänge λ: $c = \lambda/T$.
- Die Studierenden wissen, dass Gegenstände und Information sich nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c = 2.99792458 \cdot 10^8m/s\approx 3 \cdot 10^8$m/s fortbewegen kann; Sie wissen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Medien (z.B. Luft, Wasser, etc) stets unter c liegt.
- Die Studierenden kennen das Spektrum der elektromagnetischen Wellen, von Ultralangwellen über Infrarot, sichtbares Licht, Ultraviolett bis zu der Röntgenstrahlung. Sie wissen, dass diese Strahlung ähnliche Eigenschaften hat und sich vor allem in der Wellenlänge unterscheidet.
- Die Studierenden wissen, dass elektromagnetischen Wellen in erster Linie durch schwingende Dipole und atomare Emission erzeugt wird.

33.1 Schwingungen

Schwingungen begegnen uns in vielen Bereichen, zum Beispiel beim Pendel einer Uhr. Die Bewegung des Pendels wiederholt sich in regelmässigen Abständen. Solche Bewegungen werden als *periodisch* bezeichnet. Ein Pendel hat eine sogenannte *Gleichgewichtslage*, das ist die Position, in der es ruhig hängt, wenn keine Auslenkung vorhanden ist.

Die *Amplitude* eines Pendels beschreibt die grösste Auslenkung von der Gleichgewichtslage. Die *Periode* T ist die Zeit, die für eine vollständige Schwingung benötigt wird. Die Geschwindigkeit der Bewegung wird oft mit der *Frequenz* f angegeben. Der Zusammenhang zwischen Periode und Frequenz lautet:

$$f = \frac{1}{T}$$

f hat die Einheit s^{-1} und gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an.

Für kleine Auslenkungen eines Pendels kann die Frequenz f näherungsweise durch die folgende Formel beschrieben werden (ohne Herleitung):

Satz 33.1 Frequenz Fadenpendel

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

- f: Frequenz in Hz
- l: Länge des Pendels in m
- g: Erdbeschleunigung in $\mathrm{m/s^2}$

Beispiel 33.1 Frequenz eines Pendels **BSALFV**

Berechne die Frequenz eines Pendels mit einer Länge von $50\,\mathrm{cm}$, einer Masse von $1\,\mathrm{kg}$ und einer Auslenkung von $2\,\mathrm{cm}$.

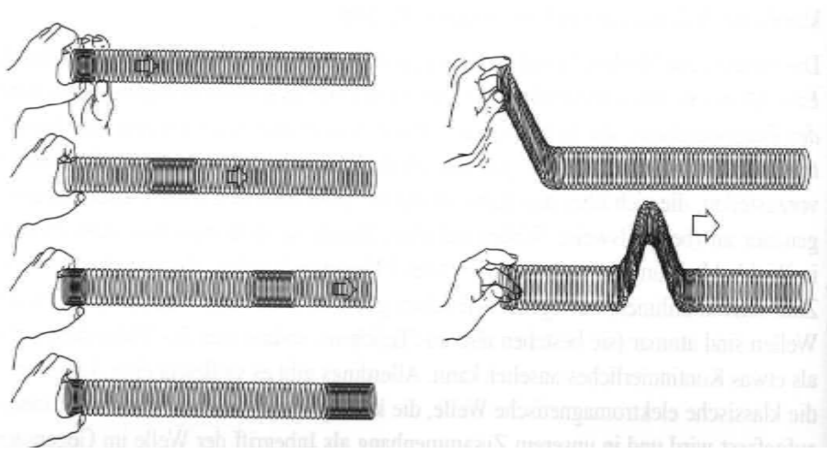
33.2 Wellen und Wellenausbreitung

Wenn wir einen Stein in einen See werfen, breiten sich kreisförmige Wellen aus. Ein ähnliches Phänomen beobachten wir bei einer schwingenden Gitarrensaite. Im Alltag sprechen wir von Wellen, wenn das Wasser am Strand hin und her fliesst. Dort bewegt sich die Wassermasse tatsächlich in die Richtung in die sich auch die Welle ausbreitet. Doch im physikalischen Sinne handelt es sich *nicht* um eine Welle.

In der Physik wird der Begriff *Welle* jedoch spezifischer verwendet. In physikalischen Wellen breiten sich nicht die Teilchen selbst aus, sondern die Energie. Beispielsweise bewegen sich die Wassermoleküle an der Oberfläche eines Sees auf und ab, kehren aber im Mittel an ihre Ausgangsposition zurück. Es ist also die Energie, die durch das Medium transportiert wird, nicht die Materie selbst.

Wellentypen

Wellen können entweder durch einzelne Impulse (siehe Abbildung 33.2 links) oder durch kontinuierliche Schwingungen (Abbildung 33.2 rechts und 33.2) erzeugt werden. Kontinuierliche Wellen haben oft eine sinusförmige Gestalt.



Breitet sich die Welle in Richung der x-Achse aus, können sich die Atome in drei Richtungen bewegen, $x-$, $y-$, $z-$Richung. Wir halten fest:

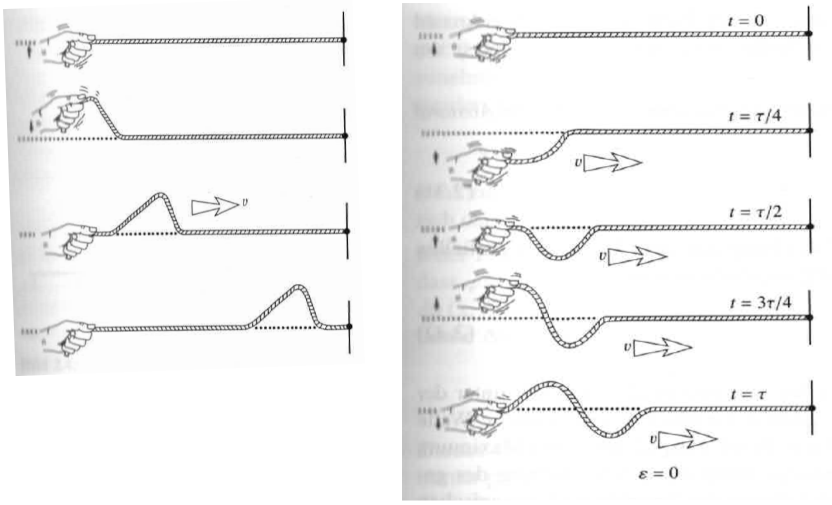


Abbildung 33.1: Links: Eine einzige Bewegung führt zu einem Wellenpacket. Rechts: Eine kontinuierliche Bewegung führt zu einem Wellenmuster — einer ebenen Welle.

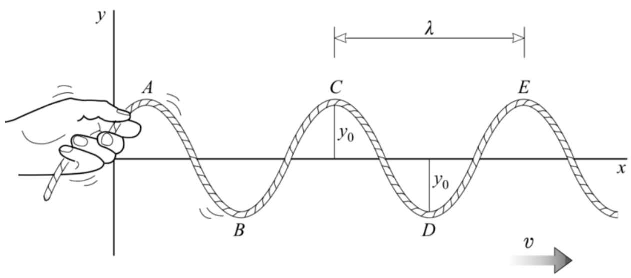


Abbildung 33.2: Zusammenhang Frequenz und Wellenlänge: Hat die Hand eine ganze Schwingung gemacht — nämlich Mitte, oben, Mitte, unten, Mitte — ist ein ganze Welle der Länge λ entstanden.

Satz 33.2 Longitudinale und transversale Wellen

In festen Stoffen gibt es drei Schwingungsrichtungen für die Atome:

- Eine Schwingung in Richtung der Wellenausbreitung **longitudinale Welle**,
- Zwei Schwingungen senkrecht zur Wellenausbreitung, **transversale Welle**.

Infobox 33.1 Keine transversalen Wellen

In Flüssigkeiten und Gasen existieren nur longitudinale Wellen.

Grund: In diesen Medien sind Atome nicht dauerhaft an eine feste Position gebunden. Die Rückstellkraft in diesen Medien ergibt sich aus dem Druck, deshalb sind longitudinale Wellen trotzdem möglich.

Wellenlänge, Periode und Wellengeschwindigkeit

Während der Zeitspanne einer Periode T breitet sich die Welle um eine Wellenlänge λ aus — siehe Abb. 33.2. Der Zusammenhang zwischen der Wellengeschwindigkeit v, der Wellenlänge λ und der Periode T ist:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T}$$

Da $f = \frac{1}{T}$, kann man dies auch schreiben als:

$$v = \lambda f$$

33.3 Stehende Wellen

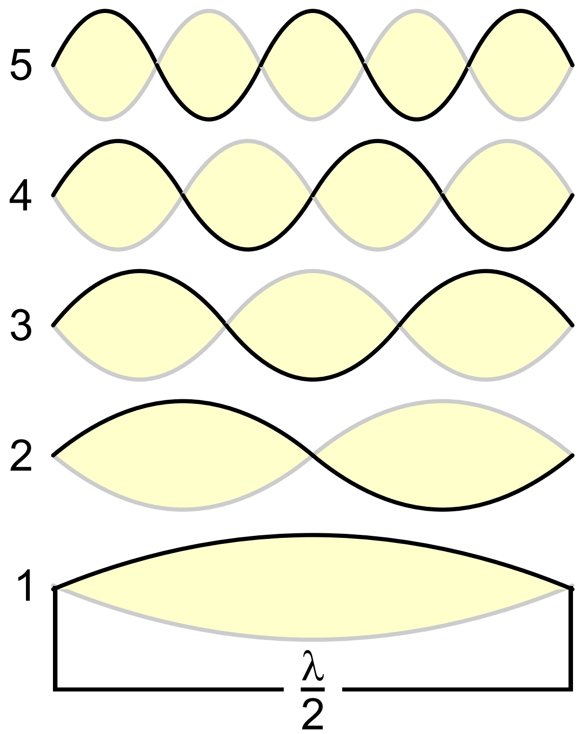
Stehende Wellen entstehen, wenn zwei Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die sich in entgegengesetzte Richtungen ausbreiten, aufeinander treffen. Beispielsweise erhalten wir die beiden Wellen, wenn eine Welle an einer Wand reflektiert wird. Die Interferenz dieser Wellen führt zu einem Muster von festen Knotenpunkten (Punkten, an denen die Amplitude der Welle null ist) und Bäuchen (Punkten mit maximaler Amplitude).

Eindimensionale stehende Wellen

Eindimensionale stehende Wellen treten z.B. auf einer gespannten Saite oder in einer Pfeife auf. Die Wellenlänge λ und die Frequenz f sind in diesen Systemen festgelgt, weil an den Enden entweder Knoten (Saite) oder Bäuche (offenes Ende einer Pfeife) stehen müssen. Für eine Saite mit der Länge l, die an beiden Enden fest eingespannt ist, sind nur folgende Wellenlängen möglich (n-te harmonische Schwingung):

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad f_n = \frac{n}{2L} \cdot v$$

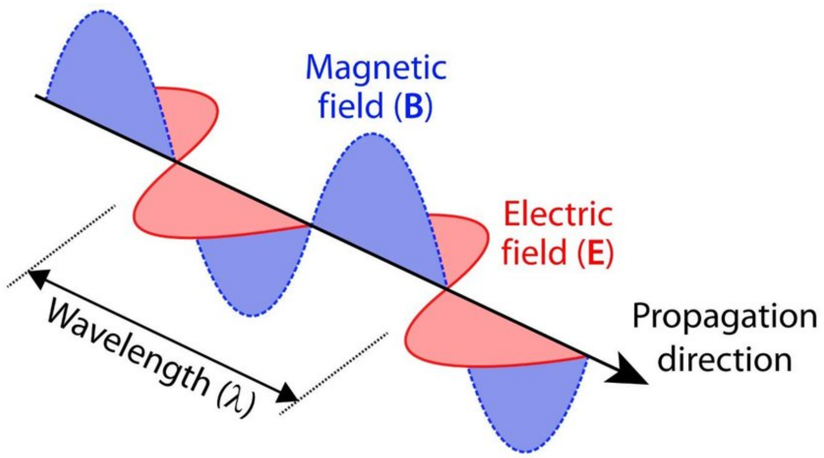
wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen auf der Saite ist. Beachte, dass hier bei der Grunschwingung $\lambda_1 = \frac{2l}{1} = 2l$ doppelt so lange ist, wie die Saite!



Zweidimensionale stehende Wellen

Zweidimensionale stehende Wellen können z.B. auf einer gespannten Membran oder einer kreisförmigen Platte beobachtet werden. In diesen Systemen treten Knotenlinien und -punkte auf, die durch komplexe Interferenzmuster beschrieben werden. Die Form der stehenden Welle hängt stark von der Geometrie des Systems ab.

33.4 Elektromagnetische Wellen



Elektromagnetische Wellen bestehen aus gekoppelten elektrischen ($\vec{E}$) und magnetischen Feldern ($\vec{B}$), die senkrecht zueinander stehen und sich mit Lichtgeschwindigkeit $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s im Raum ausbreiten. Die Richtung der Ausbreitung ist senkrecht sowohl zu $\vec{E}$ als auch zu $\vec{B}$.

Licht und Radiowellen

Licht und Radiowellen sind beides elektromagnetische Wellen, allerdings mit unterschiedlichen Frequenzen und Wellenlängen. Es war nicht von vornherein klar, dass Licht und Radiowellen dieselben physikalischen Eigenschaften besitzen. Es wurde jedoch festgestellt, dass sich Licht mit derselben Geschwindigkeit wie Radiowellen ausbreitet und typische Wellenphänomene wie Brechung, Beugung und Interferenz zeigt.

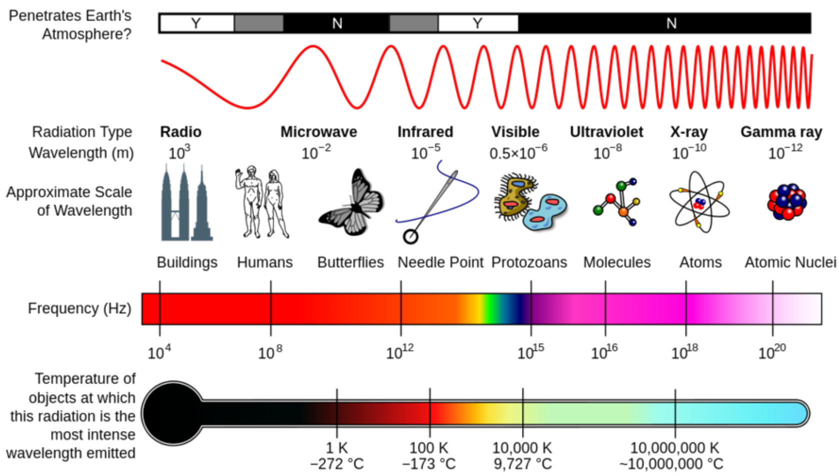
Heinrich Hertz führte 1887 Experimente durch, bei denen er elektromagnetische Wellen mit einer Frequenz von 10^9 Hz (1 GHz) mithilfe einer Drahtschleife erzeugte. Diese Wellen breiteten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus, was eine experimentelle Bestätigung von Maxwells Vorhersage war, dass elektromagnetische Wellen das sichtbare Licht einschliessen und ein weites Spektrum abdecken.

Der Äther und die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Im 19. Jahrhundert wurde angenommen, dass elektromagnetische Wellen einen Träger benötigen, der als "Äther" bezeichnet wurde. Es wurde vermutet, dass der Äther ähnlich wie Luft bei Schallwellen notwendig ist, um elektromagnetische Wellen im Vakuum zu übertragen. Michelson und Morley führten 1887 ein Experiment durch, das nachwies, dass dieser Äther nicht existiert. Damit wurde klar, dass elektromagnetische Wellen keinen materiellen Träger benötigen, um sich auszubreiten.

Erzeugung elektromagnetischer Strahlung

Elektromagnetische Strahlung wird durch die Emission von Atomen und Molekülen erzeugt. Typischerweise werden Elektronen angeregt, z.B. durch thermische Bewegung, und geben beim Übergang in einen niedrigeren Energiezustand elektromagnetische Strahlung ab. In Antennen werden Elektronen beschleunigt und erzeugen dabei elektromagnetische Strahlung.



Gammastrahlung und kosmische Strahlung

Gammastrahlung entsteht unter anderem beim Zerfall von Atomkernen und hat die höchste Energie im elektromagnetischen Spektrum. Sie interagiert nur wenig mit Materie und kann tiefe Schichten durchdringen. Der Frequenzbereich der Gammastrahlung liegt bei $> 10^{19}$ Hz, während die Wellenlängen kleiner als 10^{-12} m sind.

Röntgenstrahlung

Röntgenstrahlung, 1895 von Conrad Wilhelm Röntgen entdeckt, wird auch als "X-Strahlung"bezeichnet. Sie kann den menschlichen Körper durchdringen und wird in der medizinischen Bildgebung verwendet, um Knochen und innere Organe sichtbar zu machen. Der Frequenzbereich der Röntgenstrahlung liegt zwischen 10^{16} Hz und 10^{19} Hz, und ihre Wellenlängen liegen im Bereich von 10^{-12} m bis 10^{-9} m.

Ultraviolette Strahlung (UV-Strahlung)

Die Sonne ist eine wichtige Quelle für UV-Strahlung. Diese Strahlung führt zur Bräunung der Haut, kann aber in hohen Dosen Hautschäden verursachen. Der Frequenzbereich der UV-Strahlung reicht von etwa $8 \cdot 10^{14}$ Hz bis $3 \cdot 10^{16}$ Hz, mit Wellenlängen von 10^{-8} m bis $4 \cdot 10^{-7}$ m.

Sichtbares Licht

Das sichtbare Licht ist nur ein kleiner Bereich des elektromagnetischen Spektrums, der für das menschliche Auge wahrnehmbar ist. Seine Wellenlänge reicht von etwa 400 nm bis 700 nm (Nanometer), was einem Frequenzbereich von etwa $4 \cdot 10^{14}$ Hz bis $7.5 \cdot 10^{14}$ Hz entspricht.

Infrarotstrahlung

Alle warmen Körper emittieren Infrarotstrahlung. Menschen können diese Strahlung auf der Haut spüren, jedoch nicht sehen. Infrarotstrahlung wird oft zur Wärmebildgebung verwendet. Der Frequenzbereich reicht von $3 \cdot 10^{11}$ Hz bis $4 \cdot 10^{14}$ Hz, mit Wellenlängen von $7.5 \cdot 10^{-7}$ m bis 10^{-3} m.

Mikrowellen

Mikrowellenstrahlung wird in Mikrowellenherden verwendet, um wasserhaltige Speisen zu erwärmen. Die Frequenz beträgt typischerweise 2.45 GHz, was einer Wellenlänge von etwa 12.2 cm entspricht. Mikrowellen liegen im Frequenzbereich von 10^{9} Hz bis 10^{12} Hz.

Radiowellen

Radiowellen decken einen weiten Bereich des elektromagnetischen Spektrums ab und werden hauptsächlich zur Übertragung von Informationen, wie z.B. für Rundfunk und Kommunikation, verwendet. Der Frequenzbereich der Radiowellen reicht von etwa 30 kHz bis 300 GHz, mit Wellenlängen von einigen Millimetern bis zu mehreren Kilometern.

KAPITEL 34

Thermische Strahlung

Lernziele 34.0 Thermische Strahlung

- Die Studierenden kennen das Spektrum der Schwarzkörperstrahlung (Strahlungsgesetz von Planck).
- Sie können die Wellenlänge λ_{max}, bei der die spektrale Strahldichte eines schwarzen Körpers ihr Maximum erreicht, berechnen (Verschiebungsgesetz von Wien).
- Sie können auch die total abgestrahlte Leistung P eines idealen schwarzen Körpers pro Flächeneinheit berechnen (Stefan-Boltzmann-Gesetz)
- Mit Hilfe des Emissionsgrades können Sie die Abweichungen realer Materialien vom Modell (schwarzer Körper) berechnen.

34.1 Strahlung heisser Objekte

Heisse Objekte geben elektromagnetische Strahlung ab. Im Alltag kennen wir dieses Phänomen vom Heizstrahler oder der Herdplatte. Wenn wir unsere Hand in die Nähe eines solchen Objekts halten, spüren wir Wärme. Diese Wärme wird in Form von Infrarotstrahlung übertragen.

Noch heissere Objekte, wie zum Beispiel eine Glühbirne ($T = 3000$ K), senden sogar sichtbares Licht aus. Auch die Sonne, deren Oberflächentemperatur etwa 5800 Kelvin beträgt, strahlt sichtbares Licht ab.

Die Verteilung der gesamten Strahlung eines idealen, schwarzen Körpers wird durch das *plancksche Strahlungsgesetz* beschrieben. In Abb. 34.1 sieht man, dass bei einer Temperatur von etwa $3500°$C vor allem Infrarotstrahlung emittiert wird. Bei einer Temperatur von 5500 K hingegen wird neben Infrarotstrahlung auch ein grosser Anteil sichtbaren Lichts abgegeben.

Zudem ändert sich die Fläche unter der Strahlungskurve: Warme Objekte strahlen insgesamt mehr Energie ab als kalte. All diese Verhal-

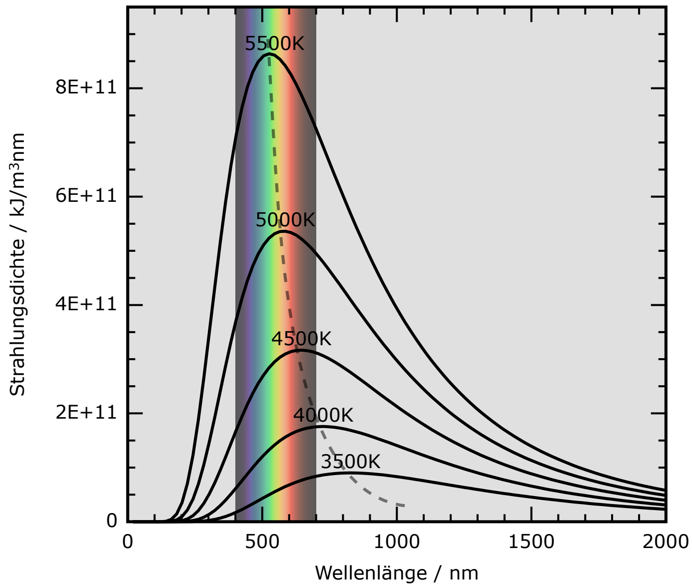


Abbildung 34.1: Strahlungsverteilung bei unterschiedlichen Temperaturen eines schwarzen Körpers

ten werden durch drei grundlegende Gesetze beschrieben, Strahlungsgesetz von Planck, das Verschiebungsgesetz von Wien und das Stefan-Boltzmann-Gesetz.

34.2 Wichtige Gesetze der Strahlungstheorie

Satz 34.1 Strahlungsgesetz von Planck[a]

Spektrale Strahldichte $I(\lambda, T)$ eines idealen schwarzen Körpers:

$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

- $I(\lambda, T)$: Spektrale Strahldichte in $\mathrm{W/m^2/sr/m}$
- h: Plancksches Wirkungsquantum ($h \approx 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$)
- c: Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ($c \approx 3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)
- λ: Wellenlänge der Strahlung in m
- k_B: Boltzmann-Konstante ($k_B \approx 1.381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$)
- T: Absolute Temperatur des Körpers in K

Beispiel 34.1 Sichtbarer Anteil der Sonnenstrahlung **JDWZPY**

Welcher Anteil der Sonnenstrahlung ($T = 5800$ K) wird im sichtbaren Bereich von 380-750 nm abgestrahlt?

Lösung:

Die Sonne kann — ausserhalb der Erdatmosphäre — in guter Näherung als schwarzer Strahler betrachtet werden. Darum

$$\frac{\int_{380\,\mathrm{nm}}^{750\,\mathrm{nm}} I(\lambda,T)d\lambda}{\int_0^\infty I(\lambda,T)d\lambda} = \frac{\int_{380\,\mathrm{nm}}^{750\,\mathrm{nm}} \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}d\lambda}{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}d\lambda} = \frac{2.82\cdot 10^7}{6.42\cdot 10^7} = 0.44$$

d.h. nur 44% der Sonnenstrahlung ist für das menschliche Auge sichtbar.

[a]Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947)

Satz 34.2 Verschiebungsgesetz von Wien [a]

Wellenlänge λ_{max}, bei der die spektrale Strahldichte eines schwarzen Körpers ihr Maximum erreicht:

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$$

- λ_{max}: Wellenlänge des Strahlungsmaximums in m
- T: Absolute Temperatur des Körpers in K
- b: Wiensche Verschiebungskonstante ($b \approx 2.898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$)

Infobox 34.1 Faustregel Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{\text{max}} \approx \frac{3\mathrm{mm}\cdot\mathrm{K}}{T}$$

[a]Wilhelm Wien, 1864–1928

Beispiel 34.2 Farben und Temperatur VU9I3E

Berechnen Sie die Wellenlänge des Intensitätsmaximums und geben Sie die Farbe der Strahlung an:

a) Sonne $T = 5800\,\mathrm{K}$

b) Glühbirne $T = 3800\,\mathrm{K}$

c) Heizplatte $T = 300\,\mathrm{K}$

Satz 34.3 Stefan-Boltzmann-Gesetz[a]

Gesamte abgestrahlte Leistung P eines idealen schwarzen Körpers pro Flächeneinheit:

$$P = \sigma T^4$$

- P: Strahlungsleistung pro Flächeneinheit in $\mathrm{W/m^2}$
- T: Absolute Temperatur des Körpers in K
- σ: Stefan-Boltzmann-Konstante, $\sigma \approx 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2/K^4}$

34.3 Zusammenhänge

Diese Gesetze hängen miteinander zusammen. Berechnet man beispielsweise die Fläche unter der Strahlungskurve eines schwarzen Körpers, so erhält man das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty I(\lambda, T) &= \int_0^\infty \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda \\
&= -2\pi hc^2 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \underbrace{\frac{-1}{\lambda^2} d\lambda} = du \cdot \frac{\lambda k_B T}{hc} \\
&= \frac{-2\pi hc \cdot c \cdot k_b T}{hc} \cdot (bla)^3 \cdot \underbrace{\int_\infty^0 u \cdot \frac{1}{e^u - 1}\, du}_{= -\frac{\pi^4}{15}} \\
&= \frac{2\pi^5 c (k_b T)^4}{15 \cdot (hc)^3} \sim T^4
\end{aligned}$$

Bestimmt man hingegen die Wellenlänge, bei der die $I(\lambda, T)$ spektrale Strahldichte maximal wird, erhält man das Wiensche Verschiebungsgesetz. Dazu leitet man das Plancksche Strahlungsgesetz nach der Wellenlänge ab, und setzt $\frac{dI(\lambda,T)}{d\lambda} = 0$.

34.4 Reale Materialien und Abweichungen vom Modell

Wichtig ist zu beachten, dass diese Gesetze nur Näherungen an die Realität darstellen, auch wenn sie oft sehr gut zutreffen. Es gibt jedoch Materialien, die in bestimmten Wellenlängenbereichen besonders gut Strahlung emittieren oder absorbieren (d.h. sie verhalten sich nicht wie ideale schwarze Körper). Diese Materialien erscheinen farbig, da ihre Strahlungseigenschaften wellenlängenabhängig sind.

Eine Grösse, die über dies Stärke der Wechselwirkung mit Strahlung Auskunft gibt, ist der Emissionsgrad.

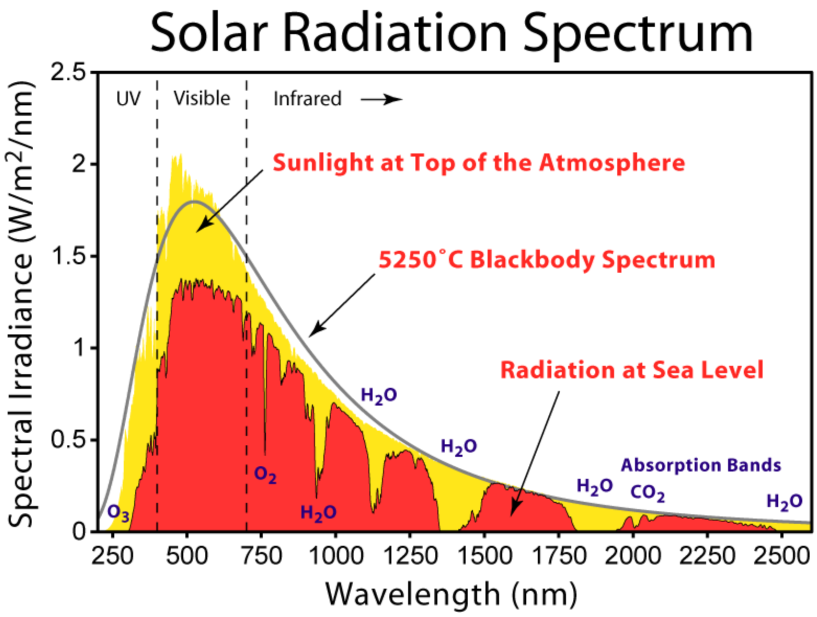


Abbildung 34.2: Wieso emittiert die Sonne mehr Strahlung als ein Schwarzkörper?

Definition 34.1 Emissionsgrad

$$\epsilon = \frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{tot}}}$$

- P_{th} : Emission von thermischer Strahlung
- P_{tot} : Strahlung total

Spezialfälle:

- ϵ = 1: schwarzer Körper, d.h. maximale Emission und Absorption.
- ϵ = 0: weisser Körper, der nichts absorbiert. Deshalb wir die gesamte einfallende Strahlung reflektiert oder durchgelassen und demnach keine thermische Strahlung emittiert.

[a]Josef Stefan, 1835–1893 und Ludwig Eduard Boltzmann 1844–1906

Wird ein Körper durch elektromagnetische Strahlung auf eine Oberfläche trifft aufgewärmt, kann sie von der Oberfläche wieder abgegeben, also emittiert werden. Der Emissionsgrad beschreibt das Verhältnis der von einem Objekt emittierten thermischen Strahlung zur gesamten einfallenden Strahlung.

Infobox 34.2 Emissionsgrad und Abosorptionsgrad

Im thermischen Gleichgewicht gilt Emissionsgrad = Abosorptionsgrad.

Material	Materialtemperatur	Emissionsgrad
Aluminium, walzblank	170°C	0,04
Baumwolle	20°C	0,77
Beton	25°C	0,93
Eis, glatt	0°C	0,97
Eisen, abgeschmirgelt	20°C	0,24
Eisen mit Gusshaut	100°C	0,80
Gips	20°C	0,90
Glas	90°C	0,94
Holz	70°C	0,94
Kupfer, oxidiert	130°C	0,76
Kupfer, poliert	40°C	0,03
Kunststoffe: PE, PP, PVC	20°C	0,94
Lack, alle Farben	80°C	0,97
Mauerwerk	40°C	0,93
Messing, oxidiert	200°C	0,61
Ölfarben (alle Farben)	90°C	0,92 - 0,96
Papier	20°C	0,97
Sandstein	40°C	0,67
Stahl, wärmebeh. Oberfläche	200°C	0,52
Stahl, oxidiert	200°C	0,79
Ton, gebrannt	70°C	0,91
Ziegelstein, Mörtel, Putz	20°C	0,93

Tabelle 34.1: Materialien und ihre Emissionsgrade bei verschiedenen Temperaturen

Beispiel 34.3 Nettostrahlleistung Heizkörper **IJURLH**

- Heizkörpers mit $A = 1\ \mathrm{m}^2$ Oberfläche
- Oberflächentemperatur $T_O = 50\,°\mathrm{C}$
- Umgebungstemperatur $T_U = 20\,°\mathrm{C}$

a) Wie gross ist die gesamte abgegebene Leistung bei einem schwarzen (idealen) Heizkörper?

b) Wie gross ist die gesamte aufgenommene Leistung bei einem schwarzen (idealen) Heizkörper?

c) Wie ändern sich diese Leistungen bei einem bei einem Heizkörper mit einem Emissionsgrad von $\nu = 0.92$?

d) Wie gross ist dann die (netto) abgegebene Leistung?

Lösung:

a) abgegebene Leistung

$$P^{\uparrow} = \sigma \cdot A \cdot (T_O)^4 = 618 \text{ W}$$

b) aufgenommene Leistung

$$P^{\downarrow} = \sigma \cdot A \cdot (T_U)^4 = 419 \text{ W}$$

c) Emissionsgrad von $\nu = 0.92$

$$P_e^{\uparrow} = \nu \cdot P^{\uparrow} = 568\,\text{W}, \; P_e^{\downarrow} = \nu \cdot P^{\downarrow} = 385 \text{ W}$$

d) (netto) abgegebene Leistung

$$\Delta P_e^{\uparrow} = P_e^{\uparrow} - P_e^{\downarrow} = 183 \text{ W}$$

Übrigens:
Bei einem Wärmeübergangskoeffizienten von typischerweise $\alpha = 5 - 10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ kann der Heizörper $150 - 300 \text{ W}/\text{m}^2$ durch Konvektion abgeben. Je höher die Heizkörpertemperatur, umso grösser ist der Strahlungsanteil der abgegebenen Energie.

Ein grün bemalter Heizstrahler wird zum Beispiel eine höhere Intensität der Strahlung in grünen Bereich zeigen. Die Abweichungen für die Strahlung der Sonne sind in Abb.34.4 dargestellt.

Metalle besitzen besondere Eigenschaften: Sie reflektieren den grössten Teil der einfallenden Strahlung und erwärmen sich daher wenig. Die beschriebenen Gesetze gelten vor allem für Objekte, die idealerweise alle Wellenlängen absorbieren und emittieren, sogenannte *schwarze Körper*.