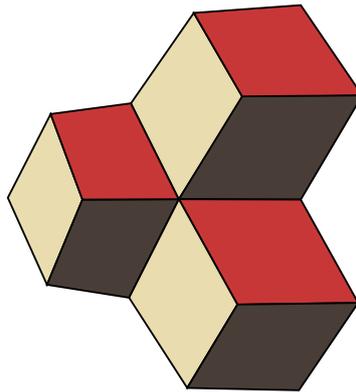


Lineare Algebra 1



Dr. D. Adams

Institut für Mathematik und Naturwissenschaften (IMN)

donat.adams@fhnw.ch

Büro: 5.1C01

Zürich, 8. April 2025

Inhaltsverzeichnis

I	Vektoren	2
1	Eliminationsverfahren I	3
2	Der Vektorraum	16
3	Darstellung der Gerade in \mathbb{R}^2	41
4	Funktionen und Trigonometrie	59
5	Skalarprodukt	82
6	Vektorprodukt	116
7	Ebenen in \mathbb{R}^3	135
8	Lösungen von linearen Gleichungssystemen	171
9	Matrixalgebra	207
10	Lineare Abbildung	238
11	Python	257
12	Determinanten	264
13	Umkehrabbildung und inverse Matrix	301
14	Komplexe Zahlen	328
A	Witz zu den Naturwissenschaften und zur Mathematik	356

Teil I
Vektoren

1.1	Eliminationsverfahren von Gauss I	3
1.2	Gleichungen lösen mit dem Gauss-Eliminations-Verfahren	9
1.3	Übungen zu linear abhängigen Vektoren	11
1.4	Übungen	13

1.1 Eliminationsverfahren von Gauss I

Definition Linearkombination, Koeffizienten

Eine **Linearkombination** der Objekte (Vektoren) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N\}$ ist die Summe

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_N\vec{a}_N$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$. Die Zahlen x_1, x_2, x_3, \dots heissen **Koeffizienten**.

Definition Lineare Abhängigkeit, komplanar

Die Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N\}$ heisst **linear abhängig** genau dann, wenn die Gleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_N\vec{a}_N = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

eine Lösung besitzt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen der Koeffizienten.

Drei oder mehr Vektoren in \mathbb{R}^3 , die linear abhängig sind, nennen wir **komplanar**.

[Papula, 2009, Bd. 1 II 2.4] [Goebbels and Ritter, 2011, 3.3.2, p.429]

Beispiel 1.1 Gauss-Eliminationsverfahren

893982

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 30 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie, ob die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} linear abhängig sind. Falls ja: Geben Sie eine Linearkombination an, welche den Nullvektor ergibt.

Lösung:

Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{array}{rcc} & x & y & z \\ \hline \vec{a} & = & (& 1 & 5 & 1) \\ \vec{b} & = & (& 2 & 8 & 3) \\ \vec{c} & = & (& 4 & 30 & -1) \end{array}$$

Die x -, y - und z -Komponenten stehen jetzt jeweils in einer Spalte untereinander. Indem wir nun die x -Komponente bei allen Vektoren eliminieren, entstehen zwei Vektoren, die keine x -Komponente haben (und deshalb etwas mehr dem gewünschten Endresultat $\vec{0}$ gleichen):

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & (1 \quad 5 \quad 1) \\ \vec{b}' = \vec{b} - 2\vec{a} & = & (0 \quad -2 \quad 1) \\ \vec{c}' = \vec{c} - 4\vec{a} & = & (0 \quad 10 \quad -5) \end{array}$$

Mit den neuen Vektoren, führen wir das selbe Verfahren durch, um einen Vektor ohne y -Komponente zu erhalten:

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & (1 \quad 5 \quad 1) \\ \vec{b}' & = & (0 \quad -2 \quad 1) \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 5\vec{b}' & = & (0 \quad 0 \quad 0) \end{array}$$

D.h. es ist also gelungen $\vec{0}$ als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darzustellen. Die Vektoren sind also linear abhängig.
Die Linearkombination ist

$$\vec{c}'' = \vec{c}' + 5\vec{b}' = (\vec{c} - 4\vec{a}) + 5(\vec{b} - 2\vec{a}) = -14\vec{a} + 5\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass beim ersten Schritt, die erste Zeile nicht verändert wird. Beim zweiten Schritt wird die zweite Zeile nicht verändert.

Infobox Vorgehen beim Gaussverfahren

Bei jedem Schritt gilt: Die Zeile, die benutzt wird um in anderen Zeilen zu eliminieren, darf nicht verändert werden.

Beispiel 1.2 Gauss-Eliminationsverfahren

854654

Bestimmen Sie, ob die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} linear abhängig sind. Falls ja: Geben Sie eine Linearkombination an, welche den Nullvektor ergibt.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 24 \\ -100 \\ 44 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \text{e) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 38 \\ 29 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -32 \\ 34 \\ -41 \end{pmatrix} \qquad \text{f) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -25 \\ 12 \\ -31 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1 \quad 6 \quad 1) \\ \vec{b} &= (2 \quad 14 \quad 1) \\ \vec{c} &= (1 \quad 2 \quad 3) \end{aligned}$$

Die x -Komponenten eliminieren:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1 \quad 6 \quad 1) \\ \vec{b}' = \vec{b} - 2\vec{a} &= (0 \quad 2 \quad -1) \\ \vec{c}' = \vec{c} - \vec{a} &= (0 \quad -4 \quad 2) \end{aligned}$$

y -Komponente eliminieren:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1 \quad 6 \quad 1) \\ \vec{b}' &= (0 \quad 2 \quad -1) \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' &= (0 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

D.h. es ist also gelungen $\vec{0}$ als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darzustellen. Die Vektoren sind also linear abhängig.

Die Linearkombination ist

$$\vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' = (\vec{c} - \vec{a}) + 2(\vec{b} - 2\vec{a}) = -5\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$$

b) Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1 \quad 5 \quad 2) \\ \vec{b} &= (3 \quad 16 \quad 1) \\ \vec{c} &= (-1 \quad -7 \quad 9) \end{aligned}$$

Die x -, y - und z -Komponenten stehen jetzt jeweils in einer Spalte untereinander. Indem wir nun die x -Komponente bei allen Vektoren eliminieren, entstehen zwei Vektoren, die schon keine x -Komponente haben (und deshalb etwas mehr dem gewünschten Endresultat $\vec{0}$ gleichen):

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1 \quad 5 \quad 2) \\ \vec{b}' = \vec{b} - 3\vec{a} &= (0 \quad 1 \quad -5) \\ \vec{c}' = \vec{c} + \vec{a} &= (0 \quad -2 \quad 11)\end{aligned}$$

Mit den neuen Vektoren, führen wir das selbe Verfahren durch, um einen Vektor mit ohne y -Komponente zu erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1 \quad 5 \quad 2) \\ \vec{b}' &= (0 \quad 1 \quad -5) \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' &= (0 \quad 0 \quad 1)\end{aligned}$$

Die z -Komponente des Vektors \vec{c} kann nicht mehr eliminiert werden. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

- c) Die Vektoren sind linear unabhängig.
- d) Die Vektoren sind linear unabhängig.
- e) Eine mögliche Linearkombination ist

$$\vec{0} = 9\vec{a} - 5\vec{b}' + 2\vec{c}''$$

- f) Eine mögliche Linearkombination ist

$$\vec{0} = 5\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$$

Kollineare und komplanare Vektoren

Definition Kollinear

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind **kollinear**, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Der Begriff kollinear fasst also die Begriffe **parallel** $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ und **antiparallel** $\vec{a} = -\lambda\vec{b}$ mit $\lambda > 0$ zusammen.

Sind zwei Vektoren kollinear so gilt auch

$$\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{0}$$

Beispiel 1.3 Spezielle Lage von zwei Vektoren

014841

Untersuche, ob die Paare von Vektoren kollinear sind durch Addition von Vielfachen der Vektoren.

$$\text{a) } \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{l} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } \vec{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{a) } \vec{c} + \frac{1}{6}\vec{d} = \vec{0}$$

$$\text{b) } \vec{e} + 2\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ also sind } \vec{e} \text{ und } \vec{f} \text{ nicht kollinear.}$$

$$\text{c) } \vec{g} + 2\vec{h} = \vec{0}$$

$$\text{d) } \vec{k} - \frac{1}{9} \cdot \vec{l} = \vec{0}$$

$$\text{e) } 4\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{f) } 3\vec{c} - 5\vec{d} = \vec{0}$$

$$\text{g) } 3\vec{e} - 7\vec{f} = \begin{pmatrix} 21 - 21 \\ 6 + 21 \\ -3 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } 3\vec{g} + 4\vec{h} = \vec{0}$$

Nehmen wir die Gleichung $\vec{c} + \frac{1}{6} \cdot \vec{d} = \vec{0}$, dann gilt z.B. auch $7 \cdot \vec{c} + 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \vec{d} = \vec{0}$ oder allgemein

$$x_1 \cdot \vec{c} + x_2 \cdot \vec{d} = \vec{0}$$

d.h. wir können *beide* Vektoren mit einer Vorzahl multiplizieren. Erhalten wir so den Null-Vektor, dann sind sie kollinear.

Wir betrachten nun die spezielle Lage von drei Vektoren. Wie Fig. 1.1 zeigt, gilt für drei Vektoren, die in einer Ebene liegen $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$. Beachte, dass in Fig. 1.1a) die Linearkombination $1\vec{a} + (-1)\vec{b} + 1\vec{c} = \vec{0}$ lautet, d.h. zufällig haben die Vektoren die richtige Länge. Wir müssen sie nur addieren und subtrahieren, damit wir wieder zum Ursprung gelangen.

Sind nun drei Vektoren ganz beliebig in einer Ebene, dann gehen wir so vor:

i) Wir verschieben \vec{c} zum Endpunkt von \vec{b} (Fig. 1.1 c).

ii) Durch den Endpunkt von \vec{b} legen wir zwei Geraden (rot), die Parallel zu \vec{a} und \vec{c} liegen. Liegen \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} in einer Ebene, entsteht ein Parallelogramm.

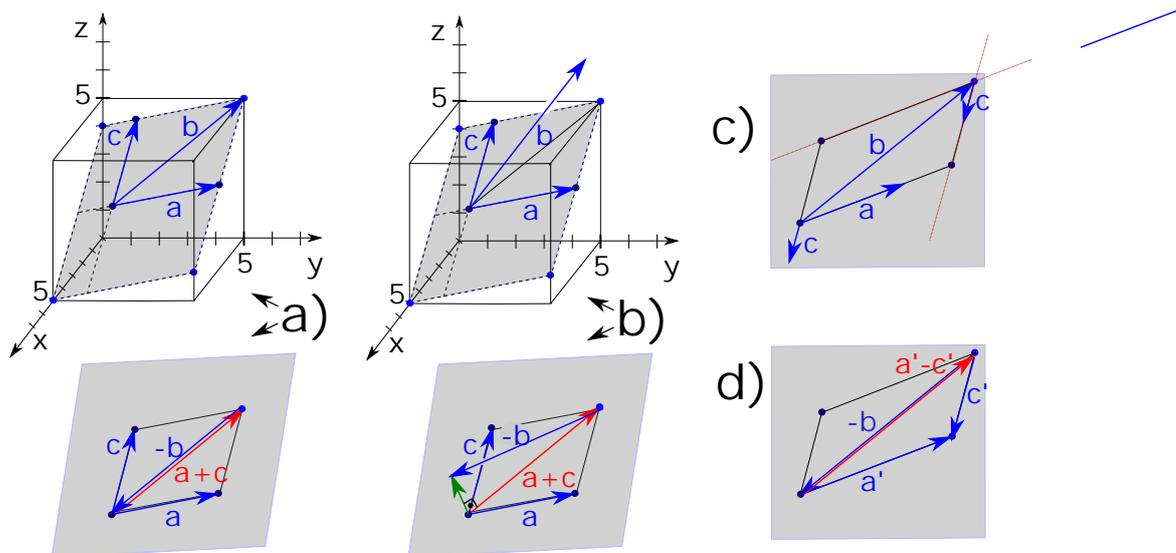


Abbildung 1.1: a) Drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, lassen sich immer so addieren, dass der Nullvektor entsteht. b) Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{c} definieren eine Ebene. Zeigt der Vektor \vec{b} aus dieser Ebene heraus, gibt es keine Linearkombination so dass $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ (abgesehen von der Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

iii) Wir strecken \vec{a} und \vec{c} , so dass sie die Länge der Kanten des Parallelogramms haben Fig. 1.1 c).

$$\vec{a}' = \vec{a} \cdot x_1 \text{ und } \vec{c}' = \vec{c} \cdot x_3$$

iv) Wir haben $\vec{a}' - \vec{c}' - \vec{b} = \vec{0}$ Fig. 1.1 d).

Um also zu untersuchen, ob die Vektoren komplanar sind, wurden im Beispiel eine Linearkombinationen der Vektoren berechnet.

Wir merken uns also folgendes:

- Lineare Abhängigkeit ist die Verallgemeinerung der Begriffe “kollinear” und “komplanar” für beliebig viele Vektoren und beliebig viele Dimensionen. Linear abhängige Vektoren haben eine spezielle Lage zueinander. Zwei kollineare Vektoren sind linear abhängig, drei komplanare Vektoren sind linear abhängig.
- Um herauszufinden, ob Vektoren komplanar sind, wenden wir das Gauss-Eliminationsverfahren an.
- Die spezielle Lage erlaubt, dass man wieder zum Ursprung zurück gelang indem man sich strikt nur entlang der Vektoren bewegt.
- In zwei Dimensionen sind *mehr* als 2 Vektoren *immer* linear abhängig. In drei Dimensionen sind mehr als 3 Vektoren *immer* linear abhängig usw.
- Linear unabhängige Vektoren haben keine spezielle Lage zueinander. Zwei linear unabhängige Vektoren spannen einen Fläche auf, drei linear unabhängige Vektoren spannen ein Volumen auf, vier linear unabhängige Vektoren spannen ein Hyper-Volumen auf.

1.2 Gleichungen lösen mit dem Gauss-Eliminations-Verfahren

Definition Dreiecksform

Ein Gleichungssystem ist in Dreiecksform, falls die Koeffizienten unter der Diagonalen verschwinden (siehe Beispiele 1.4 und 1.5)

Beispiel 1.4 Einsetzen in die Dreiecksform

15951

Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & +2y & +3z & = 8 \\ & 2y & +4z & = 14 \\ & & 5z & = 10 \end{array} \right|$$

Lösung:

- In der letzten Zeile erhalten wir $z = 2$.
- Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt dies

$$2y + 4 \cdot 2 = 14 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

- Schliesslich berechnen wir x mit der ersten Zeile:

$$x + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 8 \Rightarrow x = -4$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir sehen, dass die Dreiecksform eines Gleichungssystems den Vorteil hat, dass man von unten nach oben einsetzen kann. Deshalb ist es nützlich, Gleichungssysteme in diese Form zu bringen. Dies geschieht mit dem Gauss-Verfahren.

Beispiel 1.5 Dreiecksform

712666

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & +2y & +3z & = 8 \\ -3x & -2y & -z & = 4 \\ 4x & +2y & +5z & = 0 \end{array} \right|$$

Lösung:

Wir benennen die Gleichungen L_1 , L_2 und L_3 . Wir eliminieren zuerst die x -Komponenten der Gleichungen L_2 und L_3 mit Hilfe von L_1 :

$$\begin{bmatrix} L'_1 = L_1 : & x & +2y & +3z & = & 8 \\ L'_2 = L_2 + 3L_1 : & 0 & 4y & +8z & = & 28 \\ L'_3 = L_3 - 4L_1 : & 0 & -6y & -7z & = & -32 \end{bmatrix}$$

Nun benutzen wir die Gleichung L'_2 um noch die y -Komponente in der Gleichung L'_3 zu eliminieren.

$$\begin{bmatrix} L''_1 = L'_1 : & x & +2y & +3z & = & 8 \\ L''_2 = L'_2 : & 0 & 4y & +8z & = & 28 \\ L''_3 = 2L'_3 + 3L'_2 : & 0 & 0 & 10z & = & 20 \end{bmatrix}$$

Jetzt kann man von unten nach oben einsetzen und erhält die Lösung:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.6 Einsetzen in die Dreiecksform

25951

Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{vmatrix} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ & 5y & -z & = & 6 \\ & & 7z & = & 28 \end{vmatrix}$$

Lösung:

- In der letzten Zeile erhalten wir $z = 4$.
- Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt dies

$$5y - 4 = 6 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

- Schliesslich berechnen wir x mit der ersten Zeile:

$$2x - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 12 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Beispiel 1.7 Dreiecksform

601555

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform

mit dem Gaußverfahren.

Löse dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 12 \\ 4x - y + 9z = 30 \\ 8x - 2y + 25z = 88 \end{cases}$$

Lösung:

Eliminieren der x -Komponenten in den Gleichungen L_2 und L_3 mit Hilfe von L_1 (L_1 bleibt unverändert):

$$\begin{cases} L'_1 = L_1 : & 2x - 3y + 5z = 12 \\ L'_2 = L_2 - 2L_1 : & 0 + 5y - z = 6 \\ L'_3 = L_3 - 4L_1 : & 0 + 10y + 5z = 40 \end{cases}$$

Eliminieren der y -Komponente in der Gleichung L'_3 mit Hilfe von L'_2 (L'_2 bleibt unverändert):

$$\begin{cases} L''_1 = L'_1 : & 2x - 3y + 5z = 12 \\ L''_2 = L'_2 : & 0 + 5y - z = 6 \\ L''_3 = L'_3 - 2L'_2 : & 0 + 0 + 7z = 28 \end{cases}$$

Jetzt kann man von unten nach oben einsetzen und erhält die Lösung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.3 Übungen zu linear abhängigen Vektoren

Beispiel 1.8 Kollinear

588716

Bestimmen Sie x, y und z , so dass \vec{a} und \vec{b} kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $x = 12, z = -32$

c) $x = -\frac{5}{4}, y = \frac{56}{5}$

b) $y = 0, z = \frac{2}{3}$

d) keine Lösung

Beispiel 1.9 Kollinear/Parallel

745674

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme x , so dass $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

b) Bestimme y , so dass $\vec{f} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Lösung:

1. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

2. $\vec{f} = \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 12$

Beispiel 1.10 Kollinear

036721

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und \vec{w} sollen kollinear sein. Bestimme x und y .

Lösung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -23 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -\frac{11}{2}, y = \frac{23}{2}$$

Beispiel 1.11 Kollinear

631401

Überprüfe, ob die Vektoren \vec{a} und \vec{b} kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| a) nicht kollinear | c) kollinear, $-\frac{4}{9}\vec{b} = \vec{a}$ |
| b) kollinear, $-2\vec{b} = \vec{a}$ | d) nicht kollinear |

1.4 Übungen

Beispiel 1.12 Lösen von LGS, Reihenfolge Gleichungen vertauschen FZJIRV

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{bmatrix} L_1: & -6x & 8y & 2z & = & 40 \\ L_2: & 12x & -16y & 2z & = & -32 \\ L_3: & 24x & -33y & -3z & = & -120 \end{bmatrix}$$

Lösung:

Wir eliminieren nun die x -Komponenten der Gleichungen L_2 und L_3 mit Hilfe von L_1 :

$$\begin{bmatrix} L_1: & -6x & +8y & +2z & = & 40 \\ L'_2 = L_2 + 2L_1: & 0 & 0 & 6z & = & 48 \\ L'_3 = L_3 + 4L_1: & 0 & -y & +5z & = & 40 \end{bmatrix}$$

Wir können die Reihenfolge der Gleichungen ändern und erhalten die Dreiecksform:

$$\begin{bmatrix} L_1: & -6x & +8y & +2z & = & 40 \\ L''_2 = L'_3: & 0 & -y & +5z & = & 40 \\ L''_3 = L'_2: & 0 & 0 & 6z & = & 48 \end{bmatrix}$$

Einsetzen von unten nach oben ergibt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.13 Gauss-Elimination, Vertauschen von Gleichungen F1NB3C

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{bmatrix} L_1: & -19x & 38y & -3z & = & 114 \\ L_2: & 15x & -22y & 7z & = & -82 \\ L_3: & x & -2y & 2z & = & -6 \end{bmatrix}$$

Lösung:

Wegen dem Koeffizienten 1 vor dem Term x bietet sich L_3 an für das Eliminieren.

Wir stellen also um:

$$\begin{bmatrix} L'_1 = L_3 : & x & -2y & 2z & = & -6 \\ & L_2 : & 15x & -22y & +7z & = & -82 \\ L'_3 = L_1 : & -19x & +38y & -3z & = & 114 \end{bmatrix}$$

und eliminieren

$$\begin{bmatrix} L'_1 = L'_1 : & x & -2y & +2z & = & -6 \\ L'_2 = L_2 - 15L'_1 : & 0 & +8y & -23z & = & 8 \\ L''_3 = L'_3 + 19L'_1 : & 0 & +0 & +35z & = & 0 \end{bmatrix}$$

Einsetzen ergibt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.14 Gauss-Elimination, Vertauschen/Skalieren von Gleichungen H7XS9Z

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{bmatrix} L_1 : & 42x & +9y & +35z & = & 205 \\ L_2 : & 3x & & -6z & = & -3 \\ L_3 : & 14x & +6y & +22z & = & 92 \end{bmatrix}$$

Lösung:

Wir sehen, dass die zweite Gleichung eine Koeffizienten 1 vor dem Term x erhält, falls wir sie mit $1/3$ multiplizieren. Also skalieren wir und stellen um:

$$\begin{bmatrix} L'_1 = L_2 \cdot \frac{1}{3} : & x & & -2z & = & -1 \\ L'_2 = L_1 : & 42x & +9y & +35z & = & 205 \\ L_3 : & 14x & +6y & +22z & = & 92 \end{bmatrix}$$

Jetzt können wir eliminieren:

$$\begin{bmatrix} L'_1 : & x & & -2z & = & -1 \\ L'_2 = L'_2 - 42L'_1 : & & 9y & +119z & = & 247 \\ L'_3 = L_3 - 14L'_1 : & & 6y & +50z & = & 106 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} L'_1 : & x & & -2z & = & -1 \\ L'_2 : & & 9y & +119z & = & 247 \\ L''_3 = 9L'_3 - 6L'_2 : & & & -264z & = & -528 \end{bmatrix}$$

Einsetzen ergibt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.15 Konzepte

TZ8EV9

a) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir finden $5\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0}$. Wählen Sie die richtigen Antworten aus:

- i) \vec{v} und \vec{w} sind parallel
- ii) \vec{v} und \vec{w} sind antiparallel
- iii) \vec{v} und \vec{w} sind komplanar
- iv) \vec{v} und \vec{w} sind linear abhängig

b) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir finden $3\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$. Wählen Sie die richtigen Antworten aus:

- i) \vec{v} und \vec{w} sind parallel
- ii) \vec{v} und \vec{w} sind antiparallel
- iii) \vec{v} und \vec{w} sind komplanar
- iv) \vec{v} und \vec{w} sind linear abhängig

c) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir eliminieren die Komponenten mit dem Gaussverfahren, können aber die z -Komponente nicht eliminieren. Also sind die Vektoren

- i) linear abhängig
- ii) linear unabhängig

Lösung:

a) Korrekt sind i) und iv). i) und ii) schliessen sich aus, iii) ist falsch, weil nur 3 Vektoren oder mehr die Eigenschaft 'komplanar' haben können.

b) Korrekt sind ii) und iv)

c) \vec{u}, \vec{v} und \vec{w} sind *linear unabhängig*

Lernziele Begriffe Vektoren

- Die Studierenden kennen die komponentenweise Schreibweise von Vektoren, sowie das Vorgehen bei der komponentenweise Addition. Sie können Gegenvektoren bestimmen und Vektoren mit einem Skalar multiplizieren.
- Sie können Ortsvektoren von allgemeinen Vektoren unterscheiden.
- Sie können die Norm (Länge) eines Vektors berechnen und einen Vektor normieren.
- Sie kennen die Definition eines Vektorraums. Sie kennen neben den Vektoren in der Geometrie mindestens zwei weitere Vektorräume.

2.1 Vektoren in der Geometrie**Definition Ortsvektor**

Als Ortsvektor eines Punktes bezeichnet man einen Vektor, der vom Ursprung zu diesem Punkt zeigt.

$$\vec{OA}$$

Für Berechnungen in der Geometrie ist es praktisch die Notation abzukürzen. Wir stellen fest: Die Koordinaten eines Punktes $A(2/4)$ entsprechen den Komponenten des Ortsvektors

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in dieser Basis. Wir unterscheiden deshalb nicht zwischen Koordinaten eines Punktes A und Komponenten des Ortsvektors \vec{OA} dieses Punktes. Um die Komponenten des Ortsvektors eines Punktes anzugeben, führen wir noch folgende Kurzschreibweise ein:

Infobox Ortsvektor

Wir kürzen den Ortsvektor des Punktes A wie folgt ab:

$$\vec{OA} =: \vec{A}$$

Wir fassen zusammen: Wir bezeichnen Ortsvektoren mit Grossbuchstaben, z.B. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$ und allgemeine Vektoren mit Kleinbuchstaben z.B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$. Ortsvektoren sind an den Ursprung gebunden, deshalb können wir sie nicht verschieben. Allgemeine Vektoren hingegen können verschoben werden.

Infobox Verbindungsvektor

In dieser Notation können wir für den Verbindungsvektor von \vec{A} zu \vec{B} schreiben:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

Die Norm eines Vektors schreiben wir immer mit $\|\vec{a}\|$ und seltener als a .

Infobox Gesetze für die Norm

- Die Norm $\|\vec{a}\|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ ist in einer Orthogonalbasis

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + \dots + (a_N)^2}$$

.

- Die Norm eines Vektor wird in der Geometrie auch 'Länge' oder 'Betrag' genannt. Wir ziehen aber den Ausdruck 'Norm' vor.
- Für die Norm eines Vektor gilt immer $\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$. Beachte, dass im Ausdruck oben die Striche bei $|\lambda|$ eine andere Bedeutung haben als bei $\|\vec{a}\|$. Stehen die Striche links und rechts von einer *Zahl*, wird der Betrag berechnet z.B. $|-2| = 2$, stehen aber Doppelstrich links und rechts von einem Vektor, wird dessen Länge (Norm) berechnet z.B. $\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \right\| \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

sondern $\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \right\| = 13$.

Beispiel 2.1 Mittelpunkt

I9QK6H

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Länge der Strecke \vec{PQ}
- Erstellen Sie eine Skizze und berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes \vec{M} der Strecke \vec{PQ}

- c) Geben den Mittelpunkt einer Strecke \overrightarrow{PQ} allgemein an, d.h. ohne Koordinaten zu verwenden.

Lösung:

a) $|\overrightarrow{PQ}| = 13$

- b) Aus der Skizze entnehmen wir, dass $\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ}$. Wir können dies vereinfachen zu

$$\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{Q} - \vec{P}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{Q} + \vec{P}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- c) Wir vereinfachen so weit wie möglich:

$$\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{Q} - \vec{P}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{Q} + \vec{P})$$

Beispiel 2.2 Schwerpunkt eines Dreiecks

6JL1WJ

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten das Dreieck ABC.

- a) Berechnen Sie den Mittelpunkt \vec{M} der Kante c.
b) Berechnen Sie den Verbindungsvektor \overrightarrow{CM} . Was sind die Koordinaten des Schwerpunktes?
c) Geben den Schwerpunkt eines allgemeinen Dreiecks ABC an mit Hilfe der Koordinaten der Eckpunkte \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} (d.h. ohne Koordinaten rechnen).
d) Überprüfen Sie Ihren Ausdruck, indem Sie in den allgemeinen Ausdruck die Koordinaten von oben einsetzen und mit dem Resultat aus Teilaufgabe c) vergleichen.

Lösung:

a) $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- b) $\vec{s} = \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -27 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Schwerpunkt liegt bei

$$\vec{S} = \vec{C} + \frac{2}{3} \cdot \vec{s} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) Wir gehen die Rechnung oben Schritt für Schritt durch

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{C} + \frac{2}{3} \cdot \vec{s} \\ &= \vec{C} + \frac{2}{3} \cdot (\vec{M} - \vec{C}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \vec{C} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})\end{aligned}$$

d) Überprüfung des allgemeinen Ausdrucks:

$$\frac{1}{3} \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.3 Quadrat

FNIODZ

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Länge der Seiten.
- Bestimmen Sie die Mittelpunkte der Seiten.
- Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Quadrats.

Lösung:

a) Seite a:

$$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = 4.47$$

b) Die Seitenmittelpunkte liegen bei

$$\vec{M}_a = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{M}_b = \frac{1}{2} (\vec{B} + \vec{C}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_c = \frac{1}{2} (\vec{C} + \vec{D}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{M}_d = \frac{1}{2} (\vec{D} + \vec{A}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Der Mittelpunkt des Quadrats liegt auf der Mitte der Diagonalen:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{C}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Der Vektorraum oder: Was ist überhaupt ein Vektor?

Definition Vektorraum

Ein Vektorraum über \mathbb{R} ist eine Menge V mit einer Addition $+: V \times V \mapsto V$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot: \mathbb{R} \times V \mapsto V$. Seien \vec{v}, \vec{w} beliebige Elemente aus V und $a, b \in \mathbb{R}$, dann muss gelten:

- i) $\vec{v} + \vec{w}$ und $a \cdot \vec{v}$ liegen ebenfalls in V (Abgeschlossenheit).
- ii) Es gibt ein Element $\vec{0}$ (das **neutrale Element der Addition**), das folgendes erfüllt:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

- iii) Zu jedem \vec{v} gibt es einen **Gegenvektor**^a $-\vec{v}$, so dass

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

- iv) Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- v) Die skalare Multiplikation ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$
- vi) Die skalare Multiplikation ist distributiv: $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ und $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
- vii) Das neutrale Element (1) der Multiplikation in \mathbb{R} ist auch in V ein neutrales Element $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

^aman spricht auch vom Inversen von \vec{v}

Infobox Vektorraum Gegenbeweis

- Eine Menge, die $\vec{0}$ nicht enthält, ist kein Vektorraum.
- Wenn wir vermuten, dass V kein Vektorraum ist, suchen wir ein Beispiel wo $\lambda \cdot \vec{v} \notin V$ oder $\vec{v} + \vec{w} \notin V$.

Beispiel 2.4 Die Gerade in \mathbb{R}^2

ACDB18

Zeige, dass die Punkte auf der Geraden g , ($s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot s$$

einen Vektorraum bildet. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Lösung:

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\begin{pmatrix} 2s \\ -1s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -1t \end{pmatrix} = (s + t) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Koeffizienten $s+t \in \mathbb{R}$ und eine Richtung $(2, -1)$. Deshalb liegt auch jede Summe von zwei Punkten in der Grundmenge, d.h. auf der Geraden. Abgeschlossenheit mit der Multiplikation :

$$\lambda \begin{pmatrix} 2s \\ -1s \end{pmatrix} = (\lambda \cdot s) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Koeffizienten $\lambda \cdot s \in \mathbb{R}$ eine Richtung $(2, -1)$. Deshalb liegt auch jedes Vielfache eines Punktes in der Grundmenge, d.h. auf der Geraden. Deshalb ist gegebene Menge ein Vektorraum.

Beispiel 2.5 Ein Punkt in \mathbb{R}^2

234208

Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

keinen Vektorraum bildet. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Lösung:

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\vec{P} + \vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{P}$$

oder mit der Multiplikation

$$0 \cdot \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{P}$$

Das sind keine Elemente der Grundmenge. Deshalb ist die gegebene Menge kein Vektorraum. Übrigens: Für den Beweis, dass die Menge nicht abgeschlossen ist, genügt eine der beiden Zeilen.

Definition Unterraum

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums nennt man Unterraum, falls für alle $\vec{u} \in U$ und $\vec{u}' \in U$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{u}' &\in U \\ a \cdot \vec{u} &\in U \end{aligned}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Infobox Unterräume in \mathbb{R}^N

Typische Unterräume in \mathbb{R}^N sind Geraden und Ebenen, die $\vec{0}$ beinhalten. Sie gehen durch den Ursprung.

2.3 Komponentenweise Notation, Hintergrund*

Wie wir später sehen werden, benutzt man in der Anwendungen meist eine komponentenweise Notation, d.h. man betreibt Mathematik mit den Komponenten. Bei dieser Notation sind folgende Regeln wichtig:

Infobox Gesetze für die komponentenweise Notation von Vektoren

Betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

- Die Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert.

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 + 2 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Das neutrale Element der Addition ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir nennen diesen Vektor den Nullvektor. Es erfüllt die Eigenschaft $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

- Komponentenweise Multiplikation mit einer Zahl:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_N \end{pmatrix} \text{ z.B. } 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Der Gegenvektor zu \vec{w} ist $-\vec{w}$. Wir berechnen ihn, indem wir alle Komponenten mit (-1) multiplizieren:

$$-\vec{w} = (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Wir benutzen für Vektor die Spaltenform

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

und seltener die Zeilenform $\vec{a} = (a_1, a_2)$

[Malle, 2010, 11.1, p.204]

- Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. In \mathbb{R}^2 :

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ oder } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$.

[Malle, 2010, 11.1, p.204]

Traditionell werden in der analytischen Geometrie folgende Begriffe auseinander gehalten:

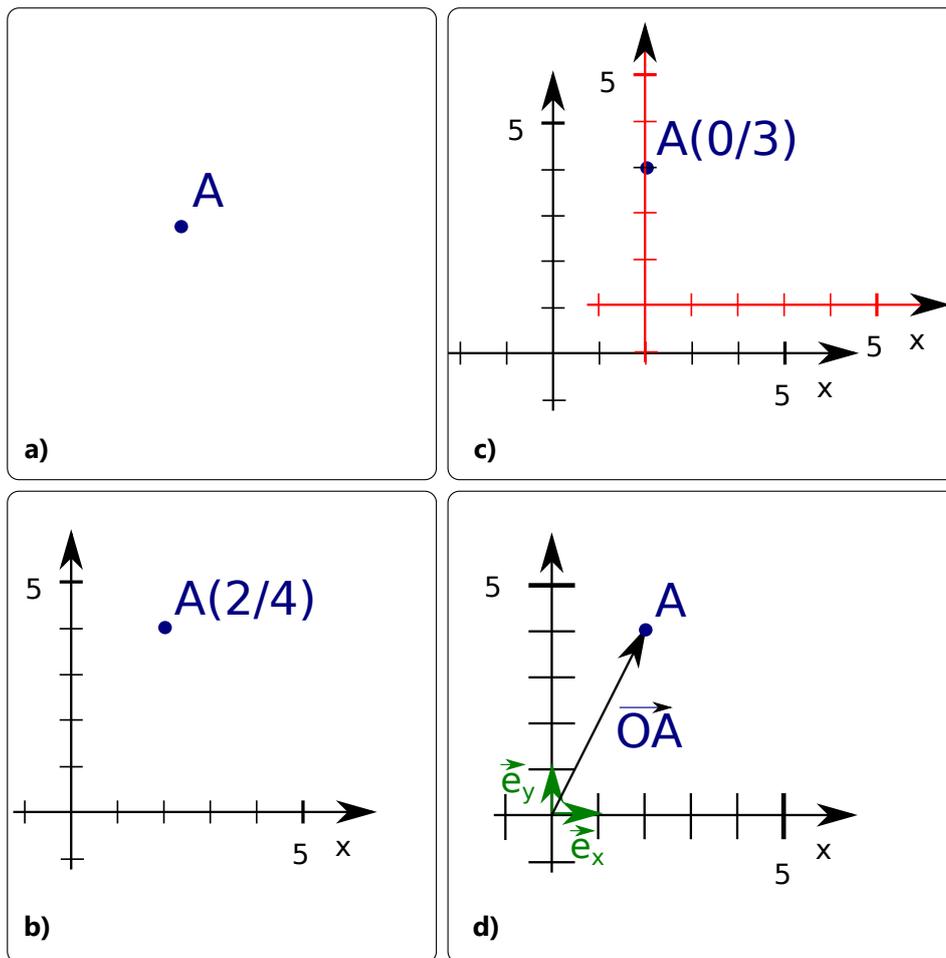


Abbildung 2.1: Traditionelle Darstellung eines Punktes (a) und der Koordinaten des Punktes (b). (c) Die Koordinaten eines Punktes sind nicht eindeutig. Sie hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab. (d) Der Ortsvektor ist ein Vektor der vom Ursprung zum Punkt A geht.

- **Punkt**, A .¹ In Abbildung 2.1 a) wird der Punkt mit einer kleinen Scheibe dargestellt, der einen Durchmesser hat, wenn auch einen kleinen. D.h. jede Darstellung eines Punktes (hier die Scheibe), ist selber kein Punkt. Ein Punkt kann nur gedacht werden. Würde man ihn zeichnen, wie er gedacht ist — nämlich unendlich klein — wäre er unsichtbar.
- **Koordinaten eines Punktes**, $A(2/4)$. In Abb. 2.1 b) wird gezeigt, dass wir ein Koordinatensystem einzeichnen können und dann die Koordinaten auslesen können.
Die Koordinaten eines Punktes sind aber nicht eindeutig. In Abb. 2.1 c) sehen wir, dass die Koordinaten entweder $A(2/4)$ lauten (schwarzes Koordinatensystem), oder $A(0/3)$ (rotes Koordinatensystem).

¹Ein Punkt (als Raumpunkt) ist ein grundlegendes Element der Geometrie. Anschaulich stellt man sich darunter ein Objekt ohne jede Ausdehnung vor. Der griechische Mathematiker Euklid bezeichnet um 300 v. Chr. in seinem Werk 'Die Elemente' in der ersten Definition den Punkt als "etwas, das keine Teile hat" und verwendet die Bezeichnung semeion. Nach [https://de.wikipedia.org/wiki/Punkt_\(Geometrie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Punkt_(Geometrie)).

- **Ortsvektor eines Punktes**, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. In Abb. 2.1 d) wird gezeigt, dass damit der Vektor gemeint ist, der vom Ursprung zum Punkt A läuft.
- ein **allgemeiner Vektor** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Anders ausgedrückt: Wir setzen den Vektor mit seinen Komponenten gleich. Das ist sinnvoll, denn oft interessieren wir uns ausschliesslich für die Komponenten eines Vektors.

Alle Vektoren können zerlegt werden in Vektoren, die parallel zu den Basisvektoren des Koordinatensystems stehen \vec{e}_x , \vec{e}_y . Oft wird folgende Kurzschreibweise benutzt: Da die Basis oft klar ist und sich nicht ändert, wird sie 'dazugedacht'. D.h. statt $\vec{a} = 3 \cdot \vec{e}_x - 5 \cdot \vec{e}_y$ schreiben wird

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

oder

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ für } \vec{A} = 2 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y .$$

2.4 Übungen: Komponentenweise Notation

Beispiel 2.6 Gesetze für die Addition

SYOXAE

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom inversen Element, Gesetz vom neutralen Element, Kommutativgesetz der Addition, Assoziativgesetz der Addition.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ | c) $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$ |
| b) $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ | d) $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$ |

Lösung:

- Kommutativgesetz der Addition
- Assoziativgesetz der Addition
- Gesetz vom neutralen Element der Addition
- Gesetz vom inversen Element der Addition

Beispiel 2.7 Gesetze für die Multiplikation

60FTC8

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom neutralen Element, Distributivgesetz, Assoziativgesetz.

a) $r \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = r \cdot \vec{A} + r \cdot \vec{B}$

c) $(r \cdot s) \cdot \vec{A} = r \cdot (s \cdot \vec{A})$

b) $(r + s) \cdot \vec{A} = r \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{A}$

d) $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$

Lösung:

a) Distributiv-Gesetz

b) Distributiv-Gesetz

c) Assoziativgesetz der Addition der Multiplikation mit einer Zahl

d) Gesetz vom neutralen Element der Multiplikation

Beispiel 2.8 Rechnen mit Vektoren I

GD49V9

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Berechne die Komponenten der folgenden Vektoren:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

e) $2 \cdot \vec{A}$

b) $\vec{C} - \vec{B}$

f) $(-1) \cdot \vec{B}$

c) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$

g) $7 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B} + 2 \cdot \vec{C}$

d) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}$

h) $\frac{7}{2} \cdot \vec{A} + \frac{1}{3} \cdot \vec{D}$

Lösung:

a) $\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $2 \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) $(-1) \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$

g) $7 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B} + 2 \cdot \vec{C} = \begin{pmatrix} -6 \\ 29 \end{pmatrix}$

d) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

h) $\frac{7}{2} \cdot \vec{A} + \frac{1}{3} \cdot \vec{D} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 53 \end{pmatrix}$

Beispiel 2.9 Diagonalen in Rechteck

YWCSBB

- a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen (Seitenlängen $x = 8$ cm und $y = 15$ cm).
- b) Berechnen Sie die Länge des Pfeils \vec{c} .
- c) Wir betrachten nun ein Rechteck mit Seitenlängen $x = 5 \cdot 8$ cm und $y = 5 \cdot 15$ cm. Wie lange ist die Diagonale?
- d) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck Seitenlänge x Zentimeter und y Zentimeter?
- e) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck der Seitenlänge $\lambda \cdot x$ Zentimeter und $\lambda \cdot y$ Zentimeter?

Lösung:

- b) wie a): Mit dem Satz von Pythagoras berechnen wir

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 17$$

- c) Die Diagonale ist 5 mal länger, also

$$\|5\vec{c}\| = |5| \cdot \|\vec{c}\| = 5 \cdot 17$$

- d) Wir haben ein allgemeines Resultat gefunden. Die Überlegung mit der Diagonalen funktioniert immer, egal wie lange die Kanten sind. Also

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- e) Auch hier können wir das Resultat von oben auf den allgemeinen Fall übertragen.

$$\|\vec{d}\| = \lambda \cdot \|\vec{c}\|$$

Beispiel 2.10 Gesetze bei der komponentenweise Notation von Vektoren
490953

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme für die angegebenen Vektoren die Komponenten. Benutze wann immer möglich die oben angegebenen Gesetze.

- a) Gib den Nullvektor in \mathbb{R}^5 an. d) $-\vec{v}$
b) $\vec{v} + \vec{w}$ e) $\|\vec{v}\|$
c) $5\vec{v}$, $5\vec{w}$ und $5 \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ f) $\|\vec{v} \cdot 5\|$

Lösung:

a) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $5\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$5\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } 5 \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

d) $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$e) \|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

f) $\|\vec{v} \cdot 5\| = \sqrt{3} \cdot 5$. Hier kommt das Gesetz für die Norm zum Zug (einfacher). Es könnte aber auch explizit nachgerechnet werden, dass

$$\sqrt{(5)^2 + 0^2 + (-5)^2 + 0^2 + (5)^2} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

Beispiel 2.11 Parallelogramm

DDBD9S

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2.7 \end{pmatrix}$$

Sind die Punkte die aufeinanderfolgenden Ecken eines Parallelogramms ABCD?

- a) Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Verbindungsvektoren der Punkte berechnen.
 b) Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Seitenlängen berechnen.

Lösung:

a) Die Verbindungsvektoren sind

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 0.7 \end{pmatrix}, \vec{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{DA} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.7 \end{pmatrix}$$

Die gegenüberliegenden Seiten verlaufen parallel, denn

$$\vec{AB} = (-1) \cdot \vec{CD} \text{ und } \vec{BC} = (-1) \cdot \vec{DA}$$

b) Seitenlängen:

$$\|\vec{AB}\| = 4.47214, \|\vec{BC}\| = 1.02591, \|\vec{CD}\| = 4.47214, \|\vec{DA}\| = 1.02591$$

Wir haben also ein Viereck, weil jeweils zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Es handelt sich um ein Parallelogramm.

Beispiel 2.12 Parallelogramm II

LJY3HS

Überprüfen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir berechnen die Verbindungsvektoren von einer Ecke jeweils zu nächsten:

a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang. Es ist ein Parallelogramm.

b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang. Es ist ein Parallelogramm.

Beispiel 2.13 Parallelogramm III

NI9G3B

Ergänzen Sie die Punkte zu einem Parallelogramm ABCD.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 21 \\ -11 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -75 \\ 199 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Wir erstellen eine kleine Skizze und sehen darin

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -14 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -109 \\ 201 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.14 Gleichschenklige Dreiecke

5CE2XT

Handelt es sich bei ABC um gleichschenklige Dreiecke. Wenn ja, berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.75 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

In einer Skizze erkennen wir, dass der Flächeninhalt z.B. falls die Symmetrieachse durch C geht mit dem Mittelpunkt der Seite c und \vec{M}_c berechnet werden kann:

$$F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{M}_c\vec{C}|$$

a) Wir orientieren uns zuerst, indem wir die Vektoren der Seitenkanten berechnen:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und die Längen sind

$$|\vec{AB}| = 8.06226, |\vec{BC}| = 8.06226, |\vec{CA}| = 11.4018$$

Wir sehen, dass die Symmetrieachse durch B geht.

$$F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{CA}| \cdot |\vec{M}_b\vec{B}| \approx \frac{1}{2} \cdot 11.4018 \cdot 5.7 \approx 32.5$$

b) Wir orientieren uns zuerst, indem wir die Vektoren der Seitenkanten berechnen:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{CA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und die Längen sind

$$|\vec{AB}| = 4.47214, |\vec{BC}| = 9.21954, |\vec{CA}| = 9.21954$$

Wir sehen, dass die Symmetrieachse durch C geht.

$$F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{M}_c\vec{C}| \approx \frac{1}{2} \cdot 4.47 \cdot 8.94 \approx 20$$

c) Wir orientieren uns zuerst, indem wir die Vektoren der Seitenkanten berechnen:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

und die Längen sind

$$|\overrightarrow{AB}| = 2.01556, |\overrightarrow{BC}| = 3.60555, |\overrightarrow{CA}| = 2.01556$$

Wir sehen, dass die Symmetrieachse durch A geht.

$$F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{M_aA}| = \frac{1}{2} \cdot 3.60555 \cdot 0.901388 = 1.625$$

Beispiel 2.15 Rechnen mit Vektoren II

KG5VVR

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

\vec{E} und $\vec{F} \in \mathbb{R}^2$ sind allgemeine Vektoren.

- | | |
|--|--|
| a) Gegenvektor zu \vec{A} ? | e) $\vec{A} + \vec{X} = \vec{B}$, $\vec{X} = ?$ |
| b) Gegenvektor zu \vec{B} ? | f) $\vec{B} + \vec{X} = \vec{0}$, $\vec{X} = ?$ |
| c) Gegenvektor zu $\vec{E} - 2 \cdot \vec{F}$? | g) $7 \cdot (\vec{A} - 2 \cdot \vec{B}) + \vec{X} = \vec{C}$, $\vec{X} = ?$ |
| d) Gegenvektor zu $-(\vec{E} - 5 \cdot \vec{F})$? | h) $\frac{1}{2} \cdot \vec{X} + \frac{1}{3} \cdot \vec{A} + \vec{D} = \vec{X}$, $\vec{X} = ?$ |

Lösung:

a) $-\vec{A} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $-\vec{B} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $-(\vec{E} - 2 \cdot \vec{F}) = -\vec{E} + 2 \cdot \vec{F}$

d) $-[-(\vec{E} - 5 \cdot \vec{F})] = \vec{E} - 5 \cdot \vec{F}$

e) $\vec{X} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

f) $\vec{X} = -\vec{B} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

g) Aus

$$7 \cdot \vec{A} - 7 \cdot 2 \cdot \vec{B} + \vec{X} = \vec{C}$$

folgt

$$\vec{X} = \vec{C} - (7 \cdot \vec{A} - 14 \cdot \vec{B}) = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- h) Wir bringen zuerst alle Terme, die die Unbekannt \vec{X} enthalten nach links, alle anderen nach rechts:

$$\frac{1}{2} \cdot \vec{X} - \vec{X} = -\left(\frac{1}{3} \cdot \vec{A} + \vec{D}\right)$$

Wir zählen jetzt links wieviele \vec{X} wir haben und vereinfachen rechts

$$-\frac{1}{2} \cdot \vec{X} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{A} - \vec{D}$$

Jetzt lösen wir auf

$$\vec{X} = \frac{-\frac{1}{3} \cdot \vec{A} - \vec{D}}{-1/2} = \frac{2}{3} \cdot \vec{A} + 2\vec{D} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 34 \\ 32 \end{pmatrix}$$

2.5 Übungen: Vektorraum

Beispiel 2.16 Die Ebene \mathbb{R}^2

14841

Zeige, dass die Tupel in der Menge $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

$$\begin{aligned} (x, y) + (p, k) &= (x + p, y + k) \\ (x, y) \cdot \lambda &= (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lösung:

- i) Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$(x, y) + (p, k) = (x + p, y + k)$$

Das Tupel $(x + p, y + k)$ hat wiederum Komponenten in \mathbb{R} und liegt deshalb in V .

- ii) Abgeschlossenheit mit der Multiplikation:

$$(x, y) \cdot \lambda = (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda)$$

Das Tupel $(x \cdot \lambda, y \cdot \lambda)$ hat wiederum Komponenten in \mathbb{R} und liegt deshalb in V .

Wegen i) und ii) ist die gegebene Menge ein Vektorraum.

Beispiel 2.17 Die Gerade in \mathbb{R}^2

ZD4ZNA

Zeige, dass die Tupel $V = \{a \cdot (1, 3) \mid a \in \mathbb{R}\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation. **Lösung:**

i) Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$(a, 3a) + (b, 3b) = (a + b, 3a + 3b) = (a + b) \cdot (1, 3)$$

Das Tupel $(a + b) \cdot (1, 3)$ wird mit dem Vorgehen erzeugt, wie die alle Elemente in V (Vorfaktor $a + b$ mal Richtung $(1, 3)$). Deshalb liegt auch jede Summe von zwei Tupeln wieder in V .

ii) Abgeschlossenheit mit der Multiplikation:

$$(a, 3a) \cdot \lambda = (a \cdot \lambda, 3a \cdot \lambda) = a \cdot \lambda(1, 3)$$

Das Tupel $a \cdot \lambda(1, 3)$ wird mit dem Vorgehen erzeugt, wie die alle Elemente in V (Vorfaktor $\lambda \cdot a$ mal Richtung $(1, 3)$). Deshalb liegt auch jedes Vielfache eines Tupels wieder in V .

Die Gegebene Menge ist also ein Vektorraum .

Beispiel 2.18 Die Gerade in \mathbb{R}^2 2

D45D1N

Prüfe, ob die Tupel $V = \{(a + 1, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation. **Lösung:**

Wir stellen fest, dass $\vec{0}$ nicht in V liegt: Die erste Komponente ist nur für $a = -1$ gleich Null. Dort erhalten wir

$$(0, -3) .$$

Das reicht um zu zeigen, dass V kein Vektorraum ist, denn für jedes Element $\vec{v} \in V$ müsste gelten

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

Da aber $\vec{0}$ nicht in V liegt, ist V nicht abgeschlossen mit der Addition. Wem das nicht reicht, rechnet z.B.

$$\vec{w} + \vec{w} + (1, 0) + (1, 0) = (2, 0)$$

\vec{w} liegt in V aber, das Resultat liegt nicht in V , denn um die zweite Komponente 0 zu bekommen müssen wir $a = 0$ wählen. Für diese Wahl erhalten wir aber in V

$$(0 + 1, 0) = (1, 0)$$

Die V ist also kein Vektorraum .

Beispiel 2.19 Die Ebene \mathbb{R}^3

826816

Wie wir später sehen werden, liegen die Punkte, die man bilden kann mit dem

Gesetz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

und $a, b \in \mathbb{R}$ in einer Ebene. Zeige, dass die Tripel in $V = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Lösung:

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d \\ c-d \\ c+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a-b+c-d \\ a+b+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+(b+d) \\ a+c-(b+d) \\ a+c+(b+d) \end{pmatrix} \\ &= (a+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b+d) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Tripel $(a+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b+d) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist wieder in der selber Form wie die Elemente in V : Die Koeffizienten $a+c$ und $b+d$ liegen in \mathbb{R}). Deshalb liegt auch die Summe in V .

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \lambda + b \cdot \lambda \\ a \cdot \lambda - b \cdot \lambda \\ a \cdot \lambda + b \cdot \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Tripel $\lambda \cdot a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Vorfaktoren in \mathbb{R} und ist in der selben Form, wie die Elemente in V . Deshalb liegt auch jedes Vielfache eines Tripels in V .
 V ist also ein Vektorraum.

Beispiel 2.20 Ein A4-Blatt

A1D84A

$$V = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 210 \wedge 0 \leq y < 297\}$$

$$\begin{aligned} (x, y) + (p, k) &= (x+p, y+k) \\ (x, y) \cdot \lambda &= (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Bilden die Tupel in V einen Vektorraum? Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation. Nebenbei: Wir könnten die Tupel als Koordinaten eines Punktes auf einem A4-Blatt im Hochformat betrachten. Den Ursprung bildet die linke untere Ecke und die Koordinaten werden in Millimeter (mm) gemessen. **Lösung:**

Abgeschlossenheit mit der Addition: Es gilt zwar

$$(x, y) + (p, k) = (x + p, y + k) .$$

Aber das Tupel $(x + p, y + k)$ ist nicht in jedem Fall in V . Betrachte z.B.

$$(210, 297) + (0, 297) = (210, 594)$$

Die Summe liegt nicht im Vektorraum. Also ist der Vektorraum nicht abgeschlossen. Gleichfalls ist

$$(210, 297) \cdot 10 = (2100, 2970)$$

nicht im Vektorraum. Also ist V auch gegenüber der Multiplikation nicht abgeschlossen.

Beispiel 2.21 Verdienst

JHUQUG

Herr Meyer arbeitet für zwei Arbeitsgebern. $\vec{M} \in \mathbb{R}^2$ gibt die Monatsgehälter bei beiden Arbeitsgebern, $\vec{J} \in \mathbb{R}^2$ seine Jahresgehälter an.

- a) Drücke \vec{J} mit \vec{M} aus.
b) Herr Meyer erhält zweimal im Jahr das doppelte Gehalt. Drücke jetzt \vec{J} mit \vec{M} aus.

Lösung:

- a) $\vec{J} = 12 \cdot \vec{M}$, oder falls das Monatsgehalt in 13 Raten ausgezahlt wird gilt $\vec{J} = 13 \cdot \vec{M}$
b) $\vec{J} = 12 \cdot \vec{M} + \vec{M} + \vec{M} = 14 \cdot \vec{M}$; Je nach Arbeitsvertrag gilt alternativ

$$\vec{J} = 13 \cdot \vec{M} + \vec{M} + \vec{M} = 15 \cdot \vec{M} .$$

Beispiel 2.22 Polynome bis Grad 3

1A73ZA

$$p(x) = 120 - 15x + 5x^2 - 4x^3, \quad q(x) = 7 + 42x - 6x^2 - 2x^3$$

Wir schreiben die Buchhaltung für die Koeffizienten der beiden Polynome in Listen auf

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 120 \\ -15 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 42 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Berechne $a(x) = p(x) + q(x)$
b) Berechne $b(x) = -3p(x) + 2q(x)$

Lösung:

- a) Die Koeffizienten 'vermischen sich nicht', d.h. bei der Addition bleiben die Komponenten getrennt. Also

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} 127 \\ 27 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ d.h. } a(x) = 127 + 27x - x^2 - 6x^3 .$$

- b) Die Koeffizienten 'vermischen sich nicht', auch nicht bei der Multiplikation mit einem Skalar. Also

$$\vec{b} = -3\vec{p} + 2\vec{q} = \begin{pmatrix} -346 \\ 129 \\ -27 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ d.h. } b(x) = -346 + 129x - 27x^2 + 8x^3 .$$

Beispiel 2.23 Trigonometrische Funktionen**847116**

$$p(x) = 15 \cos(x) - 4 \sin(x), \quad q(x) = -2 \cos(x) + 6 \sin(x)$$

Wir schreiben die Buchhaltung für die Koeffizienten in Listen auf

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- a) Berechne $a(x) = 2p(x) + 15q(x)$
b) Berechne $b(x) = 6p(x) + 4q(x)$

Lösung:

- a) Die Koeffizienten 'vermischen sich nicht', also

$$\vec{a} = 2\vec{p} + 15\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 82 \end{pmatrix}$$

und $a(x) = 82 \sin(x)$

- b) Die Koeffizienten 'vermischen sich nicht', also

$$\vec{b} = 6\vec{p} + 4\vec{q} = \begin{pmatrix} 82 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $b(x) = 82 \cos(x)$

Beispiel 2.24 Polynome bis Grad 4

625994

Zeige, dass die Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 \text{ mit } a_i \in \mathbb{R}$$

(Polynom 4. Grades) einen fünfdimensionalen Vektorraum V bilden.

Lösung:

Wir betrachten die Polynome $p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4$ und $q(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + b_3 \cdot t^3 + b_4 \cdot t^4$. Die Addition von zwei Polynomen ergibt

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot t + (a_2 + b_2) \cdot t^2 + (a_3 + b_3) \cdot t^3 + (a_4 + b_4) \cdot t^4$$

Es entsteht wieder ein Polynom von Grad 4 mit Koeffizienten in \mathbb{R} , also ist V mit der Addition abgeschlossen.

Für die Multiplikation gilt:

$$\lambda \cdot p(t) = (\lambda \cdot a_0) + (\lambda \cdot a_1) \cdot t + (\lambda \cdot a_2) \cdot t^2 + (\lambda \cdot a_3) \cdot t^3 + (\lambda \cdot a_4) \cdot t^4$$

Auch das ist ein Polynom in V . Also ist V ein Vektorraum.

Beispiel 2.25 Welches ist ein Vektorraum?

15G7RY

Überprüfen Sie, ob die Mengen abgeschlossen sind.

- mit der Addition
- mit der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wenn nicht anders erwähnt, ist die Addition und die Multiplikation elementweise.

a) Die reellen Zahlen \mathbb{R}

b) $x + 5$ mit $x \in \mathbb{R}$

c) $a \cdot (1, 2)$, mit $a \in \mathbb{R}$

d) Die Menge mit dem Element $5 \cdot \sin(x)$

e) Die Menge (x, y) mit $x, y \in \{0, \dots, 320\}$

f) Die Menge mit dem Element $(1, 2, 3)$ (Trippel)

g) Die Menge mit dem Element $(0, 0, 0)$ (Trippel)

h) Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z}

i) Die Menge der gebrochen rationalen Zahlen \mathbb{Q}

j) (x, y) , mit x, y Gleitkommazahlen (float) in in C++ oder python.

k) Das Intervall $] - 1, 1[$ (offenes Intervall)

Lösung:

In den Aufgaben arbeiten wir mit $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $a, b \in \mathbb{R}$:

Addition: $\underbrace{a + b}_{\in \mathbb{R}}$

Multiplikation: $\underbrace{\lambda \cdot a}_{\in \mathbb{R}}$

2. $V = \{x + 5 \mid x \in \mathbb{R}\}$ $a, b \in \mathbb{R}$:

Addition: $(a + 5) + (b + 5) = \underbrace{(a + b + 5)}_{\in \mathbb{R}} + 5 \in V$

Multiplikation: $\lambda \cdot (a + 5) = \lambda \cdot \underbrace{(a + 5)}_{\in \mathbb{R}} - 5 + 5 \in V$

3. $a \cdot (1, 2)$, mit $a \in \mathbb{R}$ $a, b \in \mathbb{R}$:

Addition: $a \cdot (1, 2) + b \cdot (1, 2) = \underbrace{(a + b)}_{\in \mathbb{R}} \cdot (1, 2) \in V$

Multiplikation: $\lambda \cdot a \cdot (1, 2) = \underbrace{\lambda \cdot a}_{\in \mathbb{R}} \cdot (1, 2) \in V$

4. Gegenbeweis: $5 \cdot \sin(x) + 5 \cdot \sin(x) \notin V$

5. Gegenbeweis: $(320, 0) + (1, 0) = (321, 0) \notin V$

6. Gegenbeweis: $(1, 2, 3) + (1, 2, 3) = (2, 4, 6) \notin V$

7. Die Menge mit dem Element $(0, 0, 0)$ (Trippel)

Addition: $(0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0) \in V$

Multiplikation: $\lambda \cdot (0, 0, 0) = (0, 0, 0) \in V$

8. Ganzen Zahlen \mathbb{Z} , sind abgeschlossen mit der Addition, aber nicht mit der Multiplikation (Gegenbeweis):

$$\pi \cdot 1 = \pi \notin \mathbb{R}$$

9. Rationalen Zahlen \mathbb{Q} , sind abgeschlossen mit der Addition, aber nicht mit der Multiplikation (Gegenbeweis):

$$\pi \cdot \frac{1}{1} = \pi \notin \mathbb{R}$$

10. Gleitkommazahlen:

Ohne uns festlegen zu brauchen auf einen Code oder eine Representation der Gleitkommazahlen, sehen wir, dass es immer eine grösste Zahl gibt,

die noch dargestellt werden kann, z.B. $x_{\max} = 1.8 \cdot 10^{308}$. Deshalb ist die Menge nicht abgeschlossen. Gegenbeweis:

Die Menge $(x_{\max}, 0) + (1, 0) = (x_{\max} + 1, 0) \notin V$

11. Intervall:

Gegenbeweis: $0.8 + 0.8 = 1.6 \notin V$

Darstellung der Gerade in \mathbb{R}^2 **Lernziele Darstellung der Gerade**

- Die Studierenden kennen die Geradengleichung in Parameterform.
- Die Studierenden können aus der Koordinatengleichung einer Geraden die Parameterform bestimmen und umgekehrt.
- Die Studierenden können einen Vektor normieren.
- Die Studierenden können überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen.
- In \mathbb{R}^2 können die Studierenden zu einem gegebenen Vektor \vec{v} einen zweiten Vektor \vec{n} bestimmen, der senkrecht auf \vec{v} steht.

Eine Gerade kann auf folgende Arten dargestellt werden:

Definition Funktionsgleichung einer Geraden in \mathbb{R}^2

Der Ausdruck $y = m \cdot x + d$ beschreibt eine Gerade in \mathbb{R}^2 . Dabei ist m die Steigung und d der y -Achsen-Abschnitt

Definition Koordinatenform der Geraden in \mathbb{R}^2

Alle Punkte, die auf einer Geraden liegen und die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ haben, erfüllen die Bedingung $n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0$. Dabei ist $n \in \mathbb{R}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ der Normalenvektor der Geraden.

Definition Parameterform der Geraden in \mathbb{R}^2

Die Punkte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \vec{v}$$

beschreiben eine Gerade. Dabei sind $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{A}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R}$. Wir nennen \vec{A} den **Aufpunkt** und \vec{v} den **Richtungsvektor**.

[Papula, 2009, Bd. 1 II 4.1] In \mathbb{R}^3 gilt analog für die Gerade

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{A} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{R}^3; s \in \mathbb{R}$$

Infobox Darstellung von Geraden in \mathbb{R}^n

- In \mathbb{R}^2 : Für Geraden, die parallel zu y -Achse verlaufen, gibt es eine Koordinatengleichung (z.B. $x = 3$) aber keine Funktionsgleichung.
- In \mathbb{R}^n werden Geraden durch die Parameterform dargestellt. Für die Gerade gibt es in \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) keine Funktionsgleichung und keine Koordinatenform.

Grundfertigkeiten beim Wechsel der Darstellung von Geradengleichungen

Beispiel 3.1 Parameterform der Geraden

EEZWBD

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir kennen den Mittelpunkt der Strecke $\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\vec{PQ}}_{=\vec{v}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Geben Sie 4 weitere Punkte auf der Geraden durch \vec{P} und \vec{Q} an.
- Wie können wir *alle* Punkte auf der Geraden darstellen?

Lösung:

- Weitere Punkte könnten sein

$$\vec{A} = \vec{P} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{B} = \vec{Q} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \vec{P} + \frac{1}{10} \vec{v} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 15 \end{pmatrix}, \vec{E} = \vec{P} + 10 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 117 \\ -48 \end{pmatrix},$$

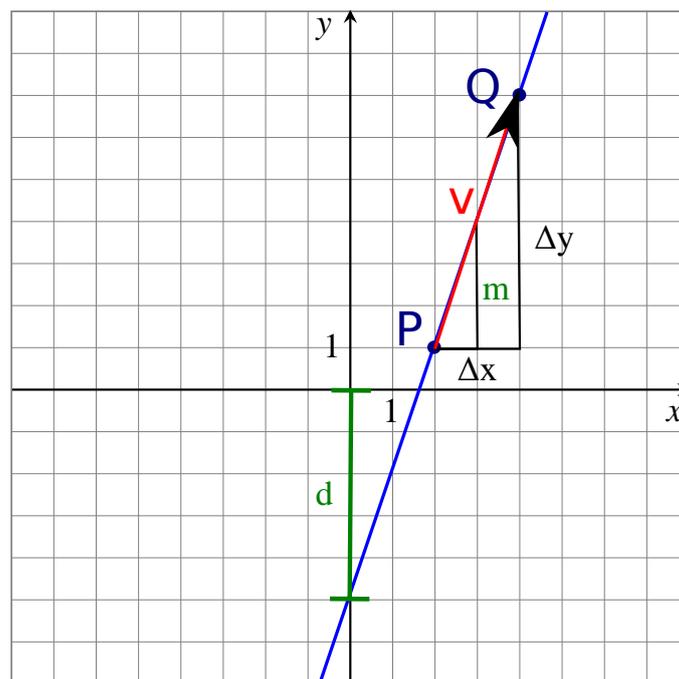
b) Aus den Beispielen oben sehen wir, dass das Bildungsgesetz lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{P} + s \cdot \vec{v}$$

dabei ist $s \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl und als Aufpunkt kann statt \vec{P} auch \vec{Q} verwendet werden

Beispiel 3.2 Grundfertigkeiten 1

EPMOVQ



Wir betrachten die Gerade g durch die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Geraden

- als Funktionsgleichung
- in Parameterform.

Lösung:

- Wir bestimmen die Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{4-2} = 3.$$

Der y -Achsenabschnitt muss nun die Gleichung (beim Punkt \vec{P}) erfüllen:

$$1 = 3 \cdot 2 + d.$$

also $d = -5$. Die Funktionsgleichung lautet also

$$y(x) = -5 + 3x$$

b) Wir berechnen den Verbindungsvektor

$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Parameterform lautet also ($s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{P} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Beispiel 3.3 Grundfertigkeiten 2

ZOAP3T

Wir betrachten die Gerade f durch die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Geraden

- in Parameterform.
- als Funktionsgleichung.
- in Koordinatenform
- zwei weitere Punkte auf der Geraden anhand der Parameterform
- zwei weitere Punkte auf der Geraden Koordinatengleichung

Lösung:

a) Wir berechnen den Verbindungsvektor

$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Beim Richtungsvektor spielt die Länge keine Rolle. Wir skalieren ihn also $\vec{v}' = \frac{1}{4}\vec{v}$. Die Parameterform lautet also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{P} + s \cdot \vec{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) Wir lösen die Koordinatenform nach y auf:

$$y = 7 - 3x$$

c) Aus dem Komponenten des Richtungsvektors bestimmen wir die Koeffizienten (Komponenten vertauschen und ein Vorzeichen switchen):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} := \vec{n}$$

Das sind die Koeffizienten

$$3x + 1y + d = 0$$

Die Gleichung muss auch bei \vec{P} erfüllt sein, also

$$3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -7$$

Die Koordinatenform lautet $3x + y - 7 = 0$.

d) Punkte aus der Parameterform z.B. $s = 10$ und $s = 20$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -29 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 20 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ -59 \end{pmatrix}$$

e) Punkte aus Koordinatengleichung $3x + y - 7 = 0$. Wir wählen $x = 0$, also

$$y - 7 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und $y = 0$, also

$$3x - 0 - 7 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.4 Grundfertigkeiten 3

F1CD8V

Wir betrachten die Gerade h gegeben durch $3 \cdot x + 2 \cdot y + 6 = 0$.

- a) Bestimmen Sie zwei weitere Punkte auf der Geraden, und
b) die Parameterform der Geraden h .

Lösung:

a) Es bietet sich an die Punkte

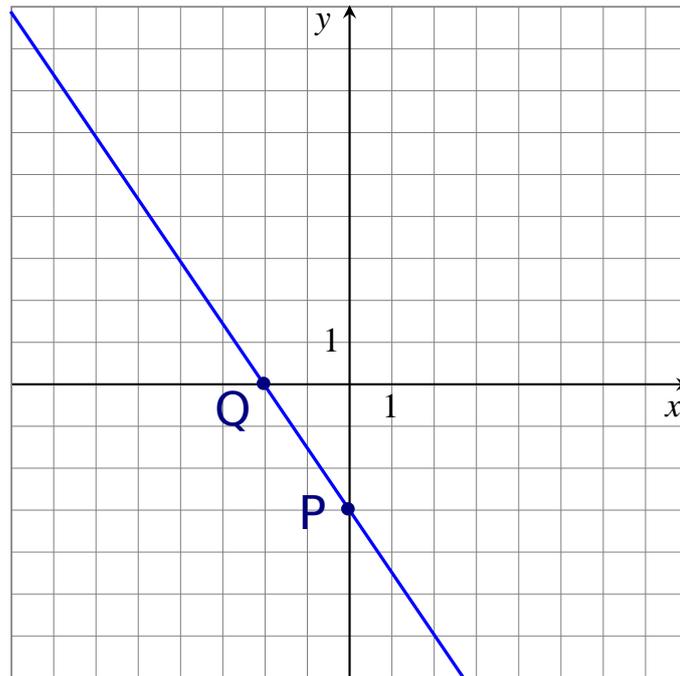
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} q_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 + 2p_y + 6 &= 0 &\Rightarrow p_y &= -3 \\ 3 \cdot q_x + 2 \cdot 0 + 6 &= 0 &\Rightarrow q_x &= -2 \end{aligned}$$

also

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



b) Der Richtungsvektor lautet

$$\vec{v} = \vec{P} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und also die Parameterform von h ($s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wieso funktioniert das?

Beispiel 3.5 Bestimme die Punkte auf der Geraden durch \vec{A} und \vec{B} 814251

Gegeben seien die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Berechne zunächst zwei weitere Punkte auf der Geraden durch \vec{A} und \vec{B} . Über-

lege dann, wie man alle Punkte auf der Geraden berechnen kann.

Lösung:

Der Vektor der die Punkte \vec{A} und \vec{B} verbindet ist

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Um weitere Punkte auf der Geraden zu bestimmen gehen wir von \vec{A} zum Beispiel nur den halben Weg in Richtung von B :

$$\vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

oder $\frac{3}{4}$ vom Weg:

$$\vec{Q} = \vec{A} + \frac{3}{4} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Punkte \vec{P} und \vec{Q} liegen sicher auf der Geraden durch \vec{A} und \vec{B} . Es wird ersichtlich, dass wir irgendeinen Teil des Weges zwischen Alle Punkte auf der Geraden sind gegeben durch \vec{A} und \vec{B} gehen können und so stets einen Punkt auf der Geraden bleiben. Wir können das wie folgt schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$$

Dabei kann $\lambda \in \mathbb{R}$ irgendeinen Wert annehmen - auch negative Werte oder auch $|\lambda| > 1$.

Beispiel 3.6 Punkte einer Geraden

702095

Die Gerade ist gegeben durch

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liegen die Punkte auf der Geraden g ?

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir untersuchen dazu, ob der Verbindungsvektor von \vec{C} zum Aufpunkt kollinear zum Richtungsvektor ist. Wir erhalten

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

\vec{c} ist ein Vielfaches von \vec{u} , deshalb liegt \vec{C} auf der Geraden. Des weiteren liegt \vec{Q} und \vec{R} nicht auf der Geraden dafür aber \vec{S} .

Beispiel 3.7 Parameterform einer Geraden

THGS9F

Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden durch die Punkte

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$

b) $\vec{C} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.8 Senkrechte Vektoren

HGV4AA

Zeichnen Sie folgende Vektoren in ein Koordinatensystem ein und bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht dazu steht.

Berechnen Sie anschliessend für die beiden Vektoren den Term

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ u \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

d) $\vec{d}' = \begin{pmatrix} u \\ -3.2 \end{pmatrix}$ und $3.2 \cdot u + u \cdot (-3.2) = 0$.

b) $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $5 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 0$.

e) $\vec{e}' = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und $x \cdot y + y \cdot (-x) = 0$.

c) $\vec{c}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0$.

f) $\vec{f}' = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ und $\cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = 0$.

Infobox Senkrechte Vektoren

Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

- Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander, falls gilt

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y = 0$$

- Die Summe oben notieren wir auch mit dem Skalarprodukt

$$\vec{v} \odot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

- Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf \vec{v} .
- Diese Technik erlaubt es, aus dem Richtungsvektor einer Geraden \vec{v} einen Vektor \vec{n} zu bestimmen, der senkrecht auf der Geraden steht. Wir nennen dann \vec{n} den **Normalenvektor**.

Beweis, dass \vec{v} senkrecht steht auf \vec{n} :

$$\vec{v} \odot \vec{n} = v_x \cdot (-v_y) + v_y \cdot v_x = 0$$

Beispiel 3.9 Koordinatenform der Geraden in \mathbb{R}^2

9TQ8VC

Wir betrachten die Gerade g . Sie lässt sich darstellen in Parameterform

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

Wir bestimmen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und daraus in Koordinatenform

$$5x - y = 4$$

Untersuchen sie die geometrische Lage von \vec{v} und \vec{n} .

Lösung:

Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander:

$$5 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = 0$$

Beispiel 3.10 Koordinatenform der Geraden in \mathbb{R}^2

8SR7RB

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

- a) Bestimmen Sie einen Vektor \vec{n} , der senkrecht auf dem Richtungsvektor \vec{v} steht.
- b) Wir berechnen einen zweiten Punkt auf der Geraden

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Welchen Winkel schliessen $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ und \vec{n} ein? Wie untersuchen Sie das mathematisch?

- c) Wir betrachten jetzt einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\vec{l} = \overrightarrow{AC}$ und \vec{n} nicht senkrecht aufeinander stehen.

- d) Wir betrachten einen weiteren Punkt $\vec{D} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf der Geraden g . Drücken Sie mathematisch aus, dass \overrightarrow{AD} senkrecht zu \vec{n} steht.
- e) Multiplizieren Sie den letzten Ausdruck aus und vereinfachen Sie.

Lösung:

a) Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b)

$$\vec{w} \odot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$$

Der Zwischenwinkel ist 90° .

c) $\vec{l} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{l} \odot \vec{n} = -28$$

Das bedeutet, dass \vec{l} und \vec{n} nicht senkrecht aufeinander stehen.

d)

$$\overrightarrow{AD} \odot \vec{n} = 0$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

e) ausmultipliziert

$$-2x + 3y - 10 = 0$$

Beispiel 3.11 Von der Koordinatenform zur Parameterform der Geraden
V1YY0V

$$g: 5x + 8y - 16 = 0$$

a) Bestimmen Sie den Normalenvektor \vec{n} der Geraden.

b) Bestimmen Sie den Richtungsvektor \vec{v} .

c) Bestimmen Sie einen Punkt \vec{A} auf der Geraden.

d) Geben Sie die Parameterform der Geraden an.

Lösung:

a) Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ auslesen.

b) Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c) Um einen Punkt zu bestimmen, wählen wir z.B. $x = 0$ und lösen dann auf

$$0 + 8y - 16 = 0 \Rightarrow y = \frac{16}{8} = 2$$

Also ist der Aufpunkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) g in Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.12 Konstante bestimmen

OJNWFS

$$h: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} \right) \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

a) Geben Sie den Normalenvektor an.

b) Bestimmen Sie n_x und n_y in der Koordinatenform

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0$$

c) Der Punkt \vec{A} liegt auf der Geraden. Wie lässt sich mit dieser Überlegung d bestimmen?

d) Geben Sie h in der Koordinatenform an.

Lösung:

a) Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Koordinatenform

$$7 \cdot x + 5 \cdot y + d = 0$$

c) \vec{A} liegt auf h mathematisch ausgedrückt (durch Einsetzen von \vec{A}):

$$7 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 + d = 0 \quad d = -(-35 + 15) = 20$$

d) ausmultipliziert

$$7 \cdot x + 5 \cdot y + 20 = 0$$

Infobox Umwandeln der Darstellungen der Geraden

- 2 Punkte zu Parameterform: Einen Punkt als Aufpunkt wählen, $\vec{v} = \vec{B} - \vec{A}$ ist der Richtungsvektor.
- Parameterform zu Koordinatenform: Aus \vec{v} den Normalenvektor \vec{n} berechnen. Dann Pkt. einsetzen und Konstante bestimmen.
- Parameterform zu Funktionsgleichung: Mit \vec{v} die Steigung berechnen und den Aufpunkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ einsetzen in $y = m \cdot (x - A_x) + A_y$.
- Koordinatenform zu Parameterform: Normalenvektor \vec{n} auslesen. Der Vektor senkrecht zu \vec{n} ergibt den Richtungsvektor. Ein Punkt (z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$) ist der Aufpunkt.

3.1 Übungen: Geradengleichung

Beispiel 3.13 Gerade als Gleichung: Geradengleichung

Durch die Gleichung $x_2 = mx_1 + c$ wird eine Gerade im x_1 - x_2 -Koordinatensystem beschrieben. Dabei ist m die Steigung und c der x_2 -Achsenabschnitt. Parameterdarstellung der Geraden an für

a) $m = 3, d = 3$

e) $x_2 = 3$

b) $m = 0, d = 2$

f) $x_1 = x_2$

c) $x_1 + x_2 = 3$

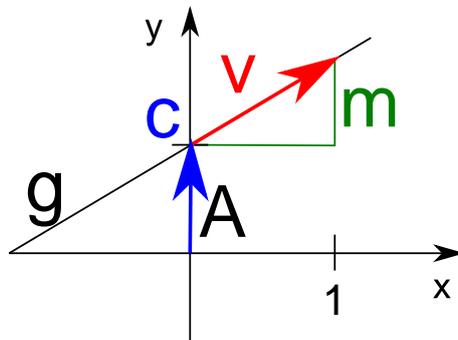
g) $x_1 = 5$

d) $2x_1 + x_2 = 5$

h) $x_1 = -3$

Lösung:

Meistens lässt sich die Parameterform aus der Geradengleichung ableiten, nämlich in allen Fällen, wo sowohl m wie auch c gegeben sind. In der Grafik, führen wir uns die Bedeutung der beiden Parameter



c sagt, bei welcher Höhe die y -Achse geschnitten wird. Daraus lässt sich ein Aufpunkt schnell bestimmen: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. m sagt, dass die Gerade um m steigt, wenn man einen Schritt in Richtung von x geht. Daraus lässt sich ein Richtungsvektor schnell bestimmen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Wir lösen nach x_2 auf:

$$x_2 = 3 - x_1$$

Daraus bestimmen wir $m = -1$ und $c = 3$, also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für die weiteren Aufgaben gehen wir wie folgt vor: Wir können zwei Punkte bestimmen. Das geht oft am einfachsten für die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit diesen Punkten kann dann die Parameterdarstellung bestimmt werden:

d) Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Richtungsvektor

$$\vec{u} = 2(\vec{B} - \vec{A}) = 2 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} .$$

Also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

e) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g)

h) Hier gibt es keinen Punkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Dafür können wir z.B. $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ wählen. Richtungsvektor

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{i) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14 Von der Parameterform zur Geradengleichung
94899

Bestimme die Gleichung $x_2 = m \cdot x_1 + c$ der Geraden g ($t \in \mathbb{R}$):

$$\text{a) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- a) Die Steigung kann mit dem Richtungsvektor bestimmt werden. Es gilt $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3}$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir den Aufpunkt in die halbfertige Geradengleichung ein:

$$2 = 1 \cdot \frac{1}{3} + c$$

also $c = \frac{5}{3}$ und die Geradengleichung lautet

$$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_1.$$

- b) Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{-1} = -5$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, suchen wir den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir den Aufpunkt in die halbfertige Geradengleichung ein:

$$5 = 2 \cdot \frac{-5}{1} + c$$

also $c = 15$ und die Geradengleichung lautet

$$x_2 = -5x_1 + 15.$$

Beispiel 3.15 Schnittpunkt von zwei Geraden
339474

Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes \vec{S} der Geraden g und h ($t, \lambda \in \mathbb{R}$):

$$\text{a) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{a) } \vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (z.B. für } t = -1\text{).}$$

$$\text{b) } \vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (z.B. für } \lambda = -3\text{).}$$

$$\text{c) } \vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ (z.B. für } t = 0\text{).}$$

$$\text{d) } \vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ (z.B. für } t = 0\text{).}$$

Methode:

In \mathbb{R}^2 können wir die Geradengleichung in Koordinatenform bestimmen und dann mit der Gauss-Elimination, das Gleichungssystem in Dreiecksform bringen.

In \mathbb{R}^3 funktioniert es so: Wir setzen die vektoriellen Ausdrücke gleich und multiplizieren mit dem Parameter aus:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 9t \end{pmatrix}$$

oder komponentenweise

$$\begin{aligned} L_1: & \quad 2 + \lambda = 5 + 2t \\ L_2: & \quad 1 - \lambda = 9 + 9t \end{aligned}$$

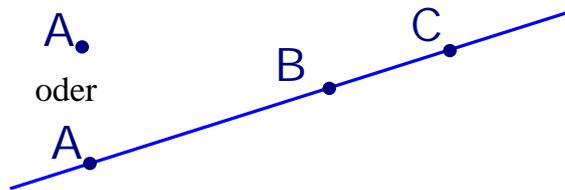
Als nächstes wollen wir einen Parameter eliminieren. Hier gelingt dies durch Addition der Gleichungen (links und rechts separat):

$$L_1 + L_2: \quad 3 = 14 + 11t$$

also $t = \frac{3-14}{11} = -1$. Diesen Parameter kann man in die Parameterform von h einsetzen und erhält

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C



Liegt der Punkt \vec{A} auf der Geraden durch die Punkte \vec{B} und \vec{C} ?

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix}$

Lösung:

Idee zu Lösung: Falls \vec{A} auf der Geraden liegt, sind \vec{v} und \vec{w} kollinear.

a) Wir berechnen den Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und einen Vektor, der den Punkt \vec{A} mit der Geraden verbindet

$$\vec{w} = \vec{A} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Falls, \vec{v} und \vec{w} kollinear sind, liegt \vec{A} auf der Geraden. Hier ist aber

$$\begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} ,$$

also liegt \vec{A} nicht auf der Geraden.

b) Wir berechnen den Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

und einen Vektor, der den Punkt \vec{A} mit der Geraden verbindet

$$\vec{w} = \vec{A} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ -30 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Falls, \vec{v} und \vec{w} kollinear sind, liegt \vec{A} auf der Geraden. Hier ist

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -30 \\ 26 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also liegt \vec{A} auf der Geraden.

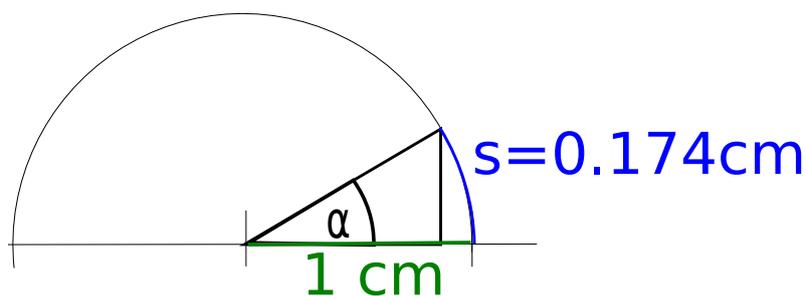
4.1	Das Bogenmass	59
4.2	Der Einheitskreis	61
4.3	Transformationen von Funktionen	68
4.4	Arkus-Funktionen	79

4.1 Das Bogenmass

Beispiel 4.1 Kreisbogen

EMSJBG

Wir messen auf einem Kreisbogen (Radius 1) einen Kreisbogen vom 0.174533. Wie gross ist der darunterliegende Winkel.



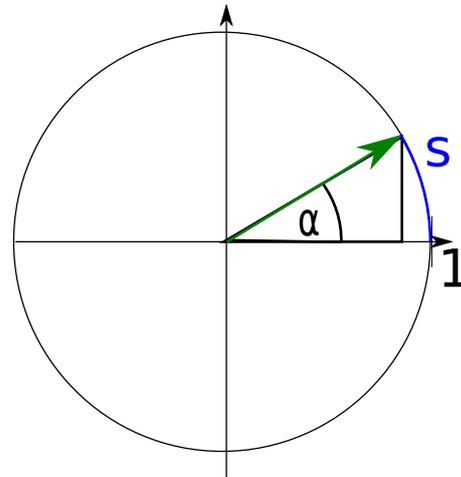
Lösung:

10°

Definition Bogenmass

Unter dem Bogenmass s eines Winkels α (in Grad) verstehen wir die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.

$$\frac{s}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$



Beispiel 4.2 Rechne die Masseinheit um

245307

Berechne die Winkel $s = \frac{\pi}{7}$ und $\varphi = 12^\circ$ in beiden Masseinheiten.

Lösung:

Wir beginnen mit der Feststellung, dass ein voller Kreis in den beiden Masseinheiten 2π oder 360° entspricht:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
$\frac{\pi}{7}$	

Danach berechnen wir den Quotienten der dritten und zweiten Zeile ist in allen Winkel-Einheiten gleich, also

$$f = \frac{\frac{\pi}{7}}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}.$$

Also

$$\alpha = \frac{360^\circ}{14} = 25.71^\circ.$$

Gleich verfahren wir bei der Umrechnung von Winkelgrad ins Bogenmass:

Bogenmass	Winkelgrad
2π	360°
	12°

Der Quotient der dritten und zweiten Zeile ist

$$f = \frac{12^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}.$$

Also

$$x = \frac{2\pi}{30} = 0.209 .$$

Beispiel 4.3 Bogenmass

TC2EE3

Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass s oder im Winkelmaß α .

Lösung:

α	111°	90°	120°	270°	-15°
s	$\frac{37\pi}{60} = 1.94$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{12}$

Beispiel 4.4 Bogenmass

978833

Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass s oder im Winkelmaß α .

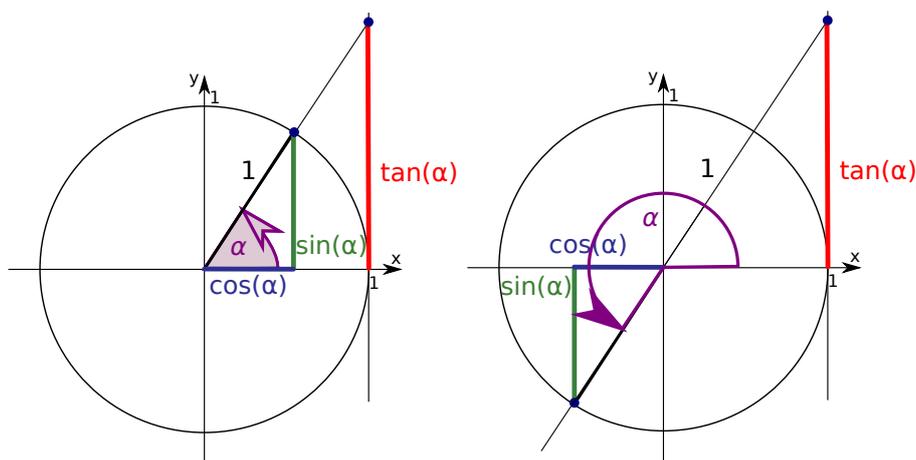
Lösung:

α	18°	300°	-630°	480°	50°
s	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{18}$

4.2 Der Einheitskreis

Wir definieren die trigonometrischen Funktionen als Stücke am Einheitskreis.

Definition Winkelfunktionen



Beachten Sie, dass die trigonometrischen Funktionen auch die Richtungen der Pfeile angeben und durch ihr Vorzeichen. Es gilt

- Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $\sin(\alpha) > 0$ und $\cos(\alpha) > 0$
- Für $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$: $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) < 0$

Infobox Winkel haben eine Richtung

In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeigersinn gemessen, d.h. 10° ist im Gegenuhrzeigersinn und -10° ist im Uhrzeigersinn.

Für rechtwinklige Dreiecke gelten auch folgende Relationen. Wir werden die Relationen selten gebrauchen, weil wir uns mehr für die Beschreibung von periodischen Schwingungen interessieren.

Infobox Relationen am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}; \cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$

Mit den Abkürzungen A für Ankathete, G für Gegenkathete und H für Hypotenuse.

[Papula, 2009, Bd. 1 III 9.1]

Beispiel 4.5 Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen

K4PJLD

Welche Vorzeichen haben $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für die folgenden Winkel? Geben Sie den Quadranten an.

a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Lösung:

a) Q2: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$: $\sin(\alpha) > 0$ und $\cos(\alpha) < 0$

b) Q3: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$: $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) > 0$

Wir strecken den Einheitskreis um den Faktor r . Dadurch erhalten wir einen Kreis mit Radius r .

Satz Polarkoordinaten

Wir betrachten $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 360^\circ$. Der Vektor

$$\vec{w} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat die Länge r und schliesst mit der x -Achse den Winkel φ ein.

Wir nennen (r, φ) die Polarkoordinaten von \vec{w} .

Beispiel 4.6 Polarkoodinaten

7SXS1J

Addiere die Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Ihre Polar-Koordinaten sind $(r = 6.5, \varphi = 30^\circ)$ und $(r = 10, \varphi = 50^\circ)$.

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Karthesischen Koordinaten

$$\vec{a} = 6.5 \cdot \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.62917 \\ 3.25 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = 10 \cdot \begin{pmatrix} \cos(50^\circ) \\ \sin(50^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.42788 \\ 7.66044 \end{pmatrix}$$

Die Summe ist also

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 12.057 \\ 10.91 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.7 Polarkoodinaten

UCWJYR

Geben Sie die Vektoren in Karthesischen Koordinaten an.

a) \vec{a} : $\|\vec{a}\| = 1, \varphi = 45^\circ$

e) \vec{e} : $\|\vec{e}\| = \sqrt{2}, \varphi = -\frac{\pi}{4}$

b) \vec{b} : $\|\vec{b}\| = 2, \varphi = -225^\circ$

f) \vec{f} : $\|\vec{f}\| = 7, \varphi = 35^\circ$

c) \vec{c} : $\|\vec{c}\| = 5, \varphi = \frac{5\pi}{36}$

d) \vec{d} : $\|\vec{d}\| = 2, \varphi = 60^\circ$

g) $\vec{g} = \vec{a} + \vec{b}$

Lösung:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 5.73 \\ 4.02 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4.53 \\ 2.11 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

g) $\vec{g} = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 2.12 \end{pmatrix}$

Beispiel 4.8 Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten

NNHCXF

Geben Sie die kartesischen Koordinaten der Vektoren an. Verwenden Sie auf dem Taschenrechner den Grad modus (deg), falls Winkel in Grad angegeben sind und den Radian-Modus (rad), falls die Winkel im Bogenmass angegeben sind.

a) $r = 5, \varphi = 216.9^\circ$

d) $r = 85, \varphi = 25^\circ$

b) $r = 13, \varphi = -0.4$

e) $r = 145, \varphi = 4.55$

c) $r = 37, \varphi = 1.24$

f) $r = 197, \varphi = 98.2^\circ$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} \cos(216.9^\circ) \\ \sin(216.9^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77.04 \\ 35.92 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 13 \cdot \begin{pmatrix} \cos(-0.4) \\ \sin(-0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.97 \\ -5.06 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23.44 \\ -143.09 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.02 \\ 34.99 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28.10 \\ 194.99 \end{pmatrix}$

Beispiel 4.9 Kompass und Winkel**IJ5I6F**

- a) Nicolas läuft 3 m von Punkt O weg. Dabei schliesst er mit der positiven x -Achse einen Winkel von 30° ein. Beschreibe seinen Weg mit einem Pfeil in der Zeichnung und danach mit Zahlen.
- b) Wo landet er, wenn er 7 m läuft und mit der positiven x -Achse einen Winkel von 55° einschliesst?
- c) Wo landet er, wenn er beide Wege nacheinander läuft?

Lösung:

a)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(30^\circ) \\ 3 \cdot \sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \cdot \cos(55^\circ) \\ 7 \cdot \sin(55^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.02 \\ -5.73 \end{pmatrix}$$

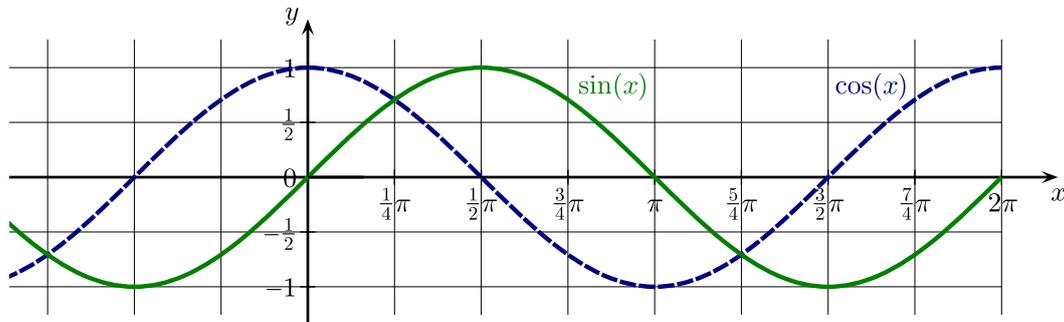
c) Gesamt

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 6.61 \\ -7.23 \end{pmatrix}$$

4.2.1 Graphen der trigonometrischen Funktionen

Infobox Funktionen

- Die Zuordnung $x \mapsto y = f(x)$ heisst $f(x)$ Funktion. Dabei ist x die freie Variable (Input) und y die abhängige Variable (Output).
- Wir nennen x das **Argument** von f und y den **Funktionswert**.



Definition Periode und Symmetrie

Eine Funktion $f(t)$ heisst

- periodisch mit **Periode** T , falls $f(t + T) = f(t)$
- **symmetrisch**, falls $f(-t) = f(t)$
- **antisymmetrisch**, falls $f(-t) = -f(t)$

Beispiel 4.10 Symmetrie von Monomen

NUDTZW

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

Lösung:

a) $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$. Also

$$f(-x) = f(x)$$

Die Funktion ist also symmetrisch.

b) $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3$. Also

$$f(-x) = -f(x)$$

Die Funktion ist also antisymmetrisch.

Beispiel 4.11 Symmetrie von Monomen

MVESAV

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x) = 1 + x^2$

c) $f(x) = x + x^2$

b) $f(x) = x - x^3$

d) $f(x) = x^3 + x^4$

Lösung:a) $f(x)$ ist symmetrisch.b) $f(x)$ ist antisymmetrisch.c) $f(x)$ hat keine Symmetrie.d) $f(x)$ hat keine Symmetrie.**Beispiel 4.12 Symmetrie der trigonometrischen Funktionen**

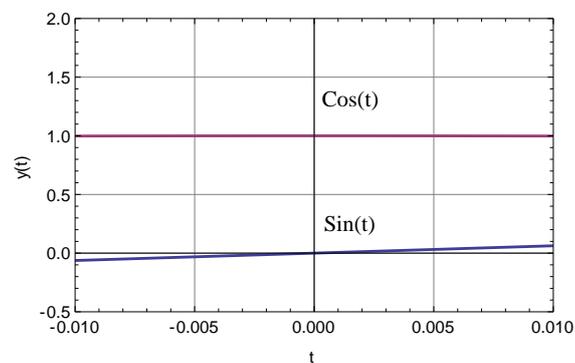
U4POS2

Benutze den Einheitskreis:

- a) Sind die trigonometrischen Funktionen periodisch. Warum? Was ist ihre Periode?
- b) Haben die trigonometrischen Funktionen Symmetrien. Welche? Warum? Betrachten (zeichnen) Sie dafür $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ in der Umgebung von $\alpha = 0$.

Lösung:

- a) Spätestens nach einer Drehung um 2π ist der Kreis geschlossen, d.h. die Graphen sind 2π periodisch. Die $\tan(\alpha)$ -Funktion ist sogar π -periodisch.
- b) Es gilt $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Die Symmetrien sind in der Umgebung von 0 gut ersichtlich



Bestimme die Symmetrien der folgenden Funktionen

a) $f(x) = \sin(x^2)$

f) $f(x) = x \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = (\sin(x))^2$

g) $f(x) = (1 + x^2) \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = \sin(\cos(x))$

h) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1-x}$

d) $f(x) = \cos(x - 6\pi)$

i) $f(x) = \sin(-x)$

e) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

j) $f(x) = \cos(-x)$

Lösung:

a) $f(x) = \sin(x^2)$ und $f(-x) = \sin((-x)^2) = \sin(x^2) = f(x)$, also ist die Funktion symmetrisch. Alternativ

$$f(x) \approx x^2$$

also ist es eine gerade Funktion.

b) symmetrisch. Alternativ

$$f(x) \approx \cos(x) \approx 1$$

also ist es eine gerade Funktion.

c) symmetrisch

d) symmetrisch

e) antisymmetrisch

f) antisymmetrisch

g) symmetrisch

h) keine Symmetrie

i) $f(x) = \sin(-x) = -\sin(x)$ und $f(-x) = \sin(x) = -f(x)$, also ist die Funktion antisymmetrisch.

Alternative: Wir nähern $\sin(x)$ mit x , d.h. mit dem Argument. Das ist eine gute Näherung für kleine x und reicht um die Symmetrie abzulesen:

$$f(x) \approx (-x).$$

$-x$ ist eine Gerade durch den Ursprung in der xy -Ebene und also ungerade Funktion.

j) $f(x) = \cos(-x) = \cos(x)$ und $f(-x) = \cos(x) = f(x)$, also ist die Funktion symmetrisch.

Alternative: Wir nähern $\cos(x)$ mit 1. Das ist eine gute Näherung für kleine x und reicht um die Symmetrie abzulesen:

$$f(x) \approx 1.$$

1 ist eine horizontale Gerade in der xy -Ebene und also gerade Funktion.

Beispiel 4.14 Symmetrien

PA3ESZ

Wir betrachten die symmetrischen Funktionen $g(x), h(x)$ und die antisymmetrischen Funktionen $u(x), v(x)$. Bestimme die Symmetrien der folgenden Funktionen

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = u(x) + v(x)$ | e) $f(x) = g(x) + h(x)$ |
| b) $f(x) = u(x) - v(x)$ | f) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ |
| c) $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ | g) $f(x) = g(x) + u(x)$ |
| d) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ | h) $f(x) = g(x) \cdot u(x)$ |

Lösung:

- a) $u(x) + v(x)$ antisymmetrisch
- b) $u(x) - v(x)$ antisymmetrisch
- c) $u(x) \cdot v(x)$ symmetrisch
- d) $\frac{u(x)}{v(x)}$ symmetrisch
- e) $g(x) + h(x)$ symmetrisch
- f) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ symmetrisch
- g) $g(x) + u(x)$ keine Symmetrie
- h) $g(x) \cdot u(x)$ antisymmetrisch

4.3 Transformationen von Funktionen

Satz Transformationen

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann wie folgt transformiert werden:

- $-f(x)$ Spiegelung an der x -Achse
- $f(-x)$ Spiegelung an der y -Achse
- $f(x) + c$ Verschiebung in Richtung der y -Achse ($c > 0$)
- $f(x - c)$ Verschiebung in Richtung der **positiven** x -Achse ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Stauchung in Richtung der x -Achse ($a > 1$).
- $a \cdot f(x)$ Streckung in Richtung der y -Achse ($a > 1$).

Die Transformationen entlang der y -Achse sind intuitiv, die entlang der x -Achse gehen oft gegen unsere Intuition.

Infobox Folgerungen Transformationen

- $f(x) - c$ Verschiebung der y -Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(x + c)$ Verschiebung der x -Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Streckung in Richtung der x -Achse ($0 < a < 1$).
- $a \cdot f(x)$ Stauchung in Richtung der y -Achse ($0 < a < 1$).

Beispiel 4.15 Transformationen mit Geogebra

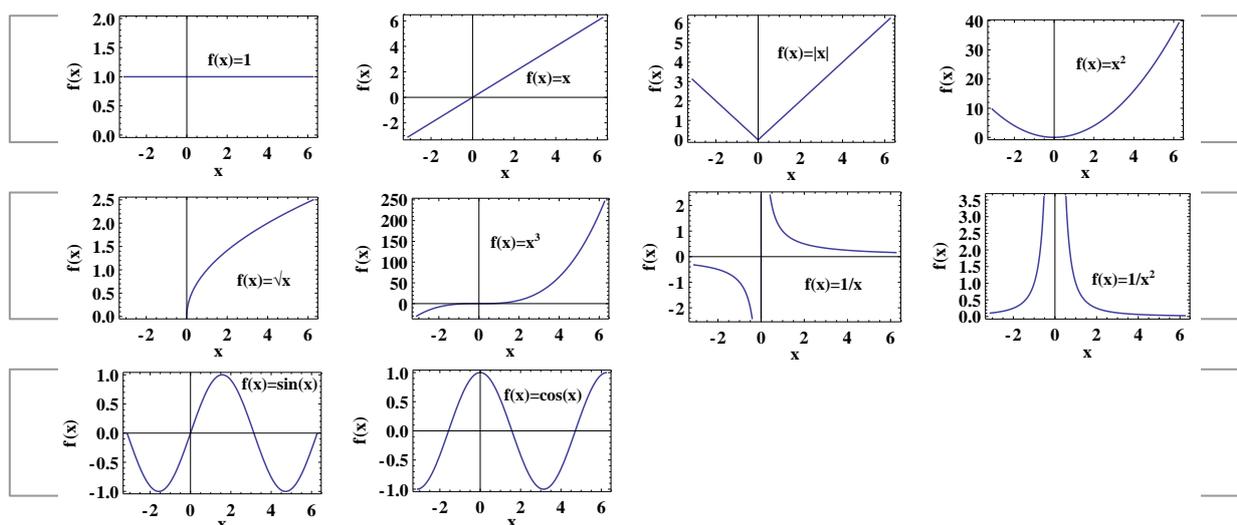
G3226M

Betrachten Sie das File auf <https://www.geogebra.org/m/nmkfm3v4>.

- Probieren Sie zunächst alle Knöpfe ($f(x) = x^2$, $f(x) = x$, ... und Schieberegler A-D aus. Beobachten Sie, was sich dabei verändert.
- Wählen Sie jetzt $f(x) = x^2$ aus, verändern Sie die Schieberegler bis die Funktion $f(x) = 1 \cdot (1x)^2 + 2$ erscheint. Was passiert mit dem Graphen, wenn Sie den Regler B verschieben? Was passiert mit dem Ausdruck $f(x) = 1 \cdot (1x)^2 + 2$? Welchen Zusammenhang erkennen Sie?
- Wählen Sie jetzt $f(x) = \sin(x)$ aus, verändern die Schieberegler bis die Funktion $f(x) = 1 \cdot \sin(1x)$ erscheint. Was passiert mit dem Graphen, wenn Sie den Regler A verschieben? Was passiert mit dem Ausdruck $f(x) = 1 \cdot \sin(1x)$? Welchen Zusammenhang erkennen Sie?
- Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Satz 'Transformationen' (unten). Finden Sie dort Ihre Resultate aus b) und c)?
- Welchen Regler benutzen Sie für die Verschiebung in Richtung x -Achse?
- Welchen Regler benutzen Sie für die Stauchung in Richtung der x -Achse?

Lösung:

- ausprobieren
- Wird der Regler z.B. auf 5 gestellt, verschiebt sich die Funktion $f(x) = x^2$ um 5 Einheiten nach oben d.h. entlang der y -Achse.
- Wird der Regler z.B. auf 3 gestellt, wird die Funktion $f(x) = 1 \cdot \sin(1x)$ entlang der y -Achse um den Faktor 3 gestreckt.
- Die Beobachtungen aus b) sind zusammengefasst mit ' $f(x) + c$ Verschiebung in Richtung der y -Achse ($c > 0$) ' und die aus c) mit ' $a \cdot f(x)$ Streckung in Richtung der y -Achse ($a > 1$) '
- Die Verschiebung in Richtung x -Achse ergibt sich mit dem Regler C. Die Funktion erfährt die Transformation $f(x - c)$.
- Die Stauchung in Richtung x -Achse ergibt sich mit dem Regler D. Die Funktion erfährt die Transformation $f(a \cdot c)$.



Die zehn Graphen oben zeigen die häufigsten Funktionen in der Algebra. Sie sollten schon mit den Charakteristiken dieser Graphen vertraut sein. Das wird Ihnen helfen, die Graphen der etwas komplizierteren Funktionen, die aus den einfachen Funktionen durch Transformation hervorgehen, besser zu verstehen.

Beispiel 4.16 Horizontale Verschiebung: Parabel

2RSKP9

Wir betrachten die Parabel $f(x) = x^2$. Sie hat bei $(x, y) = (0, 0)$ einen Scheitelpunkt.

- Ergänzen Sie die Tabelle.
- Skizzieren Sie unten die Graphen.
- Wo befindet sich der Scheitelpunkt bei der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$?

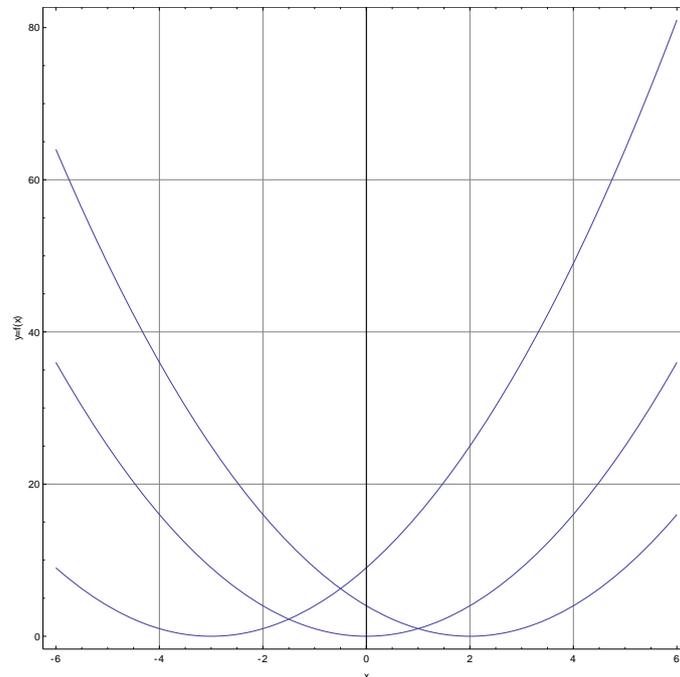
d) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = (x - c)^2$ ihren Scheitelpunkt? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke ‘Verschiebung in Richtung ...’.

e) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- “Wenn ich bei $g(x) = f(x + 3)$ für x den Wert -3 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert ... einsetze.”
- “Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x + 3)$ jetzt bei -3 so, wie ursprüngliche Funktion bei ... war.”

Lösung:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = f(x + 3) = (x + 3)^2$	$h(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2$
-4	16	1	36
-3	9	0	25
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0
3	9	36	1
4	16	49	4



a) Tabelle

b) Plot

- c) Der Scheitelpunkt der Funktion $g(x)$ liegt bei $x = -3$ und $y = 0$, der Scheitelpunkt der Funktion $h(x)$ liegt bei $x = 2$ und $y = 0$.
- d) Die Funktion $f(x) = (x - c)^2$ hat ihren Scheitelpunkt bei $x = c$ und $y = 0$. Wir stellen fest, dass Transformation $f(x - c)$ eine Verschiebung des Graphen in x -Richtung bewirkt. Ansonsten bleiben die Funktionswerte unverändert.
- e) Ergänzungen:
- “Wenn ich bei $g(x) = f(x + 3)$ für x den Wert -3 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert 0 einsetze.”
 - “Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x + 3)$ jetzt bei -3 so, wie ursprüngliche Funktion bei 0 war.”

Beispiel 4.17 Streckung und Stauchung

ZC38E4

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$. Sie hat bei $x = \pi \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) Nullstellen, bei $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ Tiefpunkte und bei $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ Hochpunkte.

- a) Ergänzen Sie die Tabelle (maximal 3 Stellen). Nutzen Sie auch Symmetrien der Funktionen aus.
- b) Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ hat ihre charakteristische Nullstelle bei $x = \pi$. Welches Kriterium muss der Ausdruck im Argument der Sinusfunktion von $g(x) = \sin(2x)$ erfüllen, damit $g(x) = 0$?
- c) Bestimmen Sie die erste Nullstelle $x > 0$ der Funktionen $h(x)$ und $p(x)$. Vergleichen Sie die gefundenen Nullstellen mit der ursprünglichen Funktion $f(x) = \sin(x)$.
- d) Wurden die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ entlang der x -Achse zusammengestaucht oder gestreckt? Argumentieren Sie mit Hilfe der ersten Nullstelle und der Tabelle.
- e) Skizzieren Sie nun die Graphen der Funktion $h(x)$, $g(x)$ und $p(x)$.
- f) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = \sin(x\omega)$ ihre erste Nullstelle $x > 0$? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke ‘Streckung des Graphen in Richtung ...’.

Lösung:

- a) Tabelle
- b) Für $\sin(2x) = 0$ kann z.B. im Argument stehen $2x = \pi$ und nach x aufgelöst $x = \frac{\pi}{2}$.

c) Die ersten Nullstelle $x > 0$ der Funktionen liegen bei

$$\begin{aligned} g(x) = \sin(2x) &\Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \\ h(x) = \sin\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) &\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot x = \pi \Rightarrow x_2 = 4\pi \\ p(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot x\right) &\Rightarrow \frac{2\pi}{5} \cdot x = \pi \Rightarrow x_3 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

d) Wir stellen fest

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{2} < \pi \\ x_2 &= 4\pi > \pi \\ x_3 &= \frac{5}{2} < \pi \end{aligned}$$

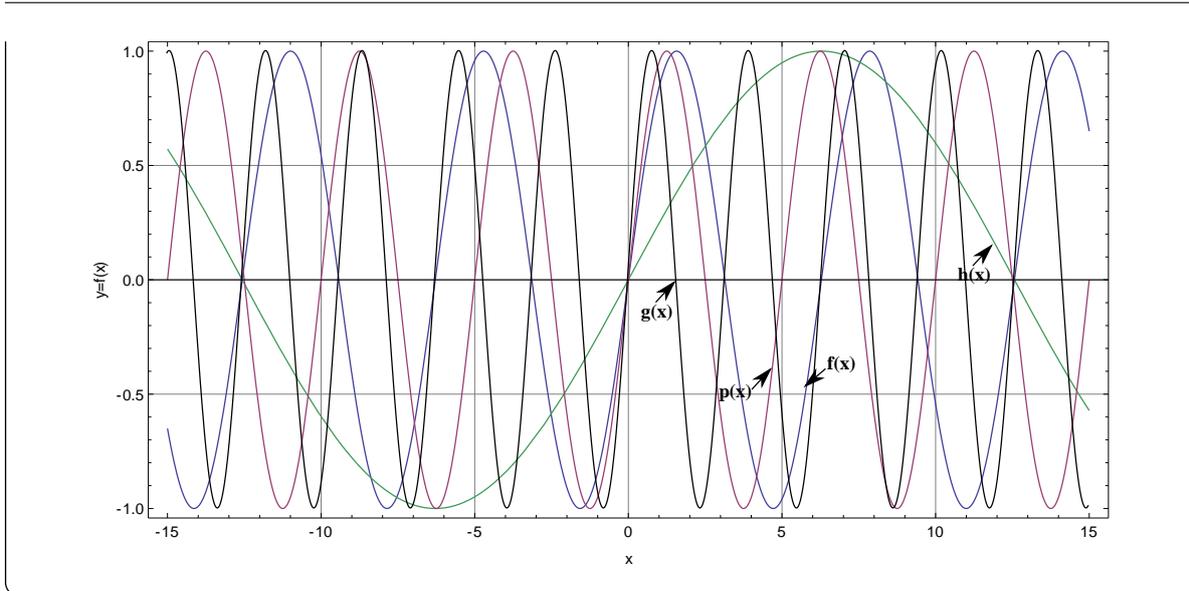
Aufgrund der Verschiebung vermuten wir: $g(x)$ wurde gestaucht, $h(x)$ wurde gestreckt und $p(x)$ wurde zusammengestaucht.

e) Graphik

f) Die Funktion $f(x) = \sin(x\omega)$ eine Nullstelle dort, wo das Argument $x\omega = \pi$, d.h. bei $x = \frac{\pi}{\omega}$.

- Für $g(x) = \sin(2x)$ finden wir die Nullstelle $x_1 = \frac{\pi}{2} < \pi$. Sie liegt näher bei 0, als die der Funktion $\sin(x)$. Der Graph der Funktion $\sin(2x)$ entsteht durch eine Stauchung des Graphen von $\sin(x)$ in x -Richtung.
- Für $h(x) = \sin\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$ finden wir die Nullstelle $x_2 = 4\pi > \pi$. Sie liegt weiter von 0 entfernt, als die der Funktion von $\sin(x)$. Der Graph der Funktion $\sin\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$ entsteht durch eine Streckung des Graphen von $\sin(x)$ in x -Richtung.
- Für $p(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot x\right)$ finden wir die Nullstelle $x_3 = \frac{5}{2} < \pi$. Sie liegt näher bei 0, als die der Funktion $\sin(x)$. Der Graph der Funktion $\sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot x\right)$ entsteht durch eine Stauchung des Graphen von $\sin(x)$ in x -Richtung.

x	$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \sin(2x)$	$h(x) = \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$	$p(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot x\right)$
-4π	0	0	0	0.083
-10	0.544	-0.913	-0.598	0
-2π	0	0	-1	-0.999
-5	0.959	0.544	-0.949	0
$-\pi$	0	0	-0.707	0.722
0	0	0	0	0
π	0	0	0.707107	-0.722
5	-0.959	-0.544	0.949	0
2π	0	0	1	0.999
10	-0.544	0.913	0.598	0
4π	0	0	0	-0.083



4.3.1 Weitere Aufgaben

Beispiel 4.18 Translationen

DG6A5Y

Wir betrachten die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$. Sie ist definiert, falls das Argument (hier x) im Intervall $[0; \infty[$ liegt.

- a) In der Funktion $r(x) = f(x - 3) = \sqrt{x - 3}$ können wir $x = 3$ einsetzen und erhalten

$$r(3) = f(3 - 3) = \sqrt{3 - 3} = \sqrt{0} = 0$$

Also ist $x = 3$ die Stelle, die den Definitionsbereich nach unten begrenzt. Geben Sie die untere Grenze des Definitionsbereichs der folgenden Funktionen an:

$$g(x) = f(x - 5) = \sqrt{x - 5}, \quad h(x) = f(x + 14) = \sqrt{x + 14}$$

$$k(x) = f(x - 10) + 2 = \sqrt{x - 10} + 2, \quad p(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right) - 3 = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - 3$$

- b) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- “Wenn ich bei $g(x) = f(x - 5)$ für x den Wert 5 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert ... einsetze.”
- “Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x - 5)$ jetzt bei 5 so, wie ursprüngliche Funktion bei ... war.”

Schreiben Sie die obigen Sätze auch allgemein für die Funktion $f(x - c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ auf.

- c) Zeichnen Sie die Graphen von $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $p(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie ebenfalls den Vektor ein um den die Funktion $f(x)$ jeweils verschoben wurde, um $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ oder $p(x)$ zu erhalten.

d) Ergänzen Sie nun folgenden Satz: “Die Transformation $f(x - c) + d$ verschiebt die Funktion $f(x)$...”

Lösung:

a) Der Definitionsbereich begrenzt an der Stelle, wo der Ausdruck unter der Wurzel gleich Null ist.

$$\begin{array}{llllll} g(x) = \sqrt{x - 5} & \Rightarrow & x - 5 = 0 & \Rightarrow & x = 5 \\ h(x) = \sqrt{x + 14} & \Rightarrow & x + 14 = 0 & \Rightarrow & x = -14 \\ k(x) = \sqrt{x - 10} + 2 & \Rightarrow & x - 10 = 0 & \Rightarrow & x = 10 \\ p(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - 3 & \Rightarrow & x + \frac{1}{4} = 0 & \Rightarrow & x = -\frac{1}{4} \end{array}$$

b) Ergänzung:

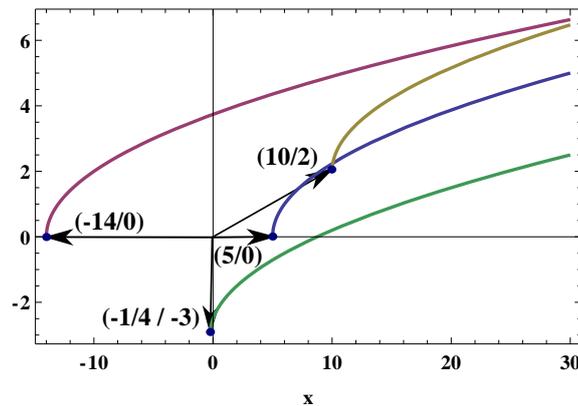
- “Wenn ich bei $g(x) = f(x - 5)$ für x den Wert 5 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x **den Wert 0** einsetze.”
- “Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x - 5)$ jetzt bei 5 so, wie ursprüngliche Funktion bei **der Stelle 0** war.”

Allgemein:

- “Wenn ich bei $g(x) = f(x - c)$ für x den Wert c einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x **den Wert 0** einsetze.”
- “Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x - c)$ jetzt bei c so, wie ursprüngliche Funktion bei **der Stelle 0** war.”

c) Graphik unten.

d) Ergänzung: “Die Transformation $f(x - c) + d$ verschiebt die Funktion $f(x)$ um c -Einheiten in Richtung der x-Achse und um d Einheiten in Richtung der y-Achse”



Beispiel 4.19 Spiegelung

82Q57Q

Wir betrachten die Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$.

- Ergänzen Sie die Tabelle
- Geben Sie für alle Funktionen die Stelle an, wo der Ausdruck unter der Wurzel 0 ist. In welche Richtung auf der x -Achse dürfen Sie sich von dieser Stelle aus bewegen, damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv wird?
- Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen an.
- Beschreiben Sie die Zeilen 3 und 5 in Worten: Was sind ihre Ähnlichkeiten? Worin unterscheiden Sie sich?
- Erklären Sie nun die Ähnlichkeiten und Unterschiede (Zeilen 3 und 5) aufgrund der Werte in den Zeilen 2 und 4.
- Plotten Sie nun die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$ mit Matlab oder GeoGebra.
- Wie verändern sich die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$, falls Sie anstatt $f(x)$ die Funktion $-f(x)$ etc. plotten?
- Vervollständigen Sie nun folgende Sätze: "Der Graph der Funktion $y = f(-x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$."
"Der Graph der Funktion $y = -f(x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$."

Lösung:

a) Tabelle

b)

$$\begin{aligned}
 f(x) = \sqrt{x} &\Rightarrow x = 0 \\
 g(x) = \sqrt{x-2} &\Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\
 h(x) = \sqrt{-x-2} &\Rightarrow -x-2 = 0 \Rightarrow x = -2
 \end{aligned}$$

Bei $f(x)$ darf man 0 oder grössere Werte (z.B. $x = 2, 3$ etc.) einsetzen und der Ausdruck unter der Wurzel bleibt positiv.

Bei $g(x)$ darf man 2 oder grössere Werte (z.B. $x = 3, 4$ etc.) einsetzen und der Ausdruck unter der Wurzel bleibt positiv.

Bei $h(x)$ darf man -2 oder *kleinere* Werte (z.B. $x = -3, -4$ etc.) einsetzen und der Ausdruck unter der Wurzel bleibt positiv.

c)

$$\begin{aligned} D_f &= [0, \infty[\\ D_g &= [2, \infty[\\ D_h &=]\infty, -2[\end{aligned}$$

d) Zeilen 3 und 5 Ähnlichkeiten: In beiden treten selben Funktionswerte auf. In beiden gibt es Stellen, wo die Funktion nicht definiert ist.

Unterschiede: Die nicht definierten Funktionswerte stehen bei $\sqrt{x-2}$ am Anfang und bei $\sqrt{-x-2}$ am Ende. $\sqrt{x-2}$ nimmt monoton zu und $\sqrt{-x-2}$ nimmt monoton ab.

e) Ähnlichkeiten: Durch die Operationen $\sqrt{x-2}$ und $\sqrt{-x-2}$ ergibt sich aus den angegebenen x-Werten die selben Mengen. Unterschied: Die Reihenfolge der Zahlen ist umgekehrt. Wir nun aus diesen Zahlen die Wurzel gezogen, entsteht die zweimal die selbe Form des Graphen, nur ist der eine das Spiegelbild des anderen.

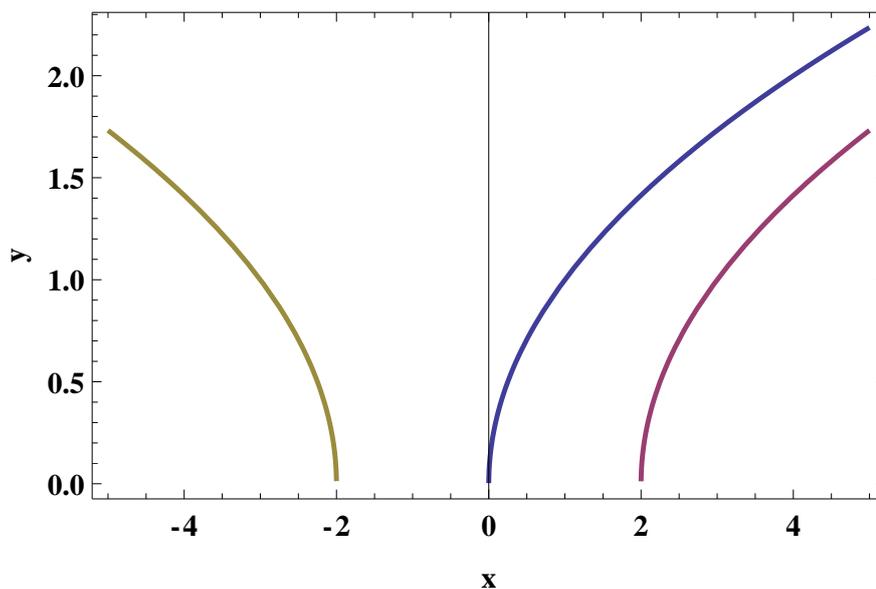
f) Graphik unten

g) Die Graphen erscheinen unter der y-Achse auf dem Kopf gestellt.

h) "Der Graph der Funktion $y = f(-x)$ ergibt sich durch Spiegelung des Graphen $f(x)$ an der y-Achse."

"Der Graph der Funktion $y = -f(x)$ ergibt sich durch Spiegelung des Graphen $f(x)$ an der x-Achse"

x	-18	-11	-6	-3	-2	2	3	6	11	18
$x - 2$	-20	-13	-8	-5	-4	0	1	4	9	16
$g(x) = \sqrt{x-2}$	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	0	1	2	3	4
$-x - 2$	16	9	4	1	0	-4	-5	-8	-13	-20
$h(x) = \sqrt{-x-2}$	4	3	2	1	0	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.



Beispiel 4.20 Spiegelung

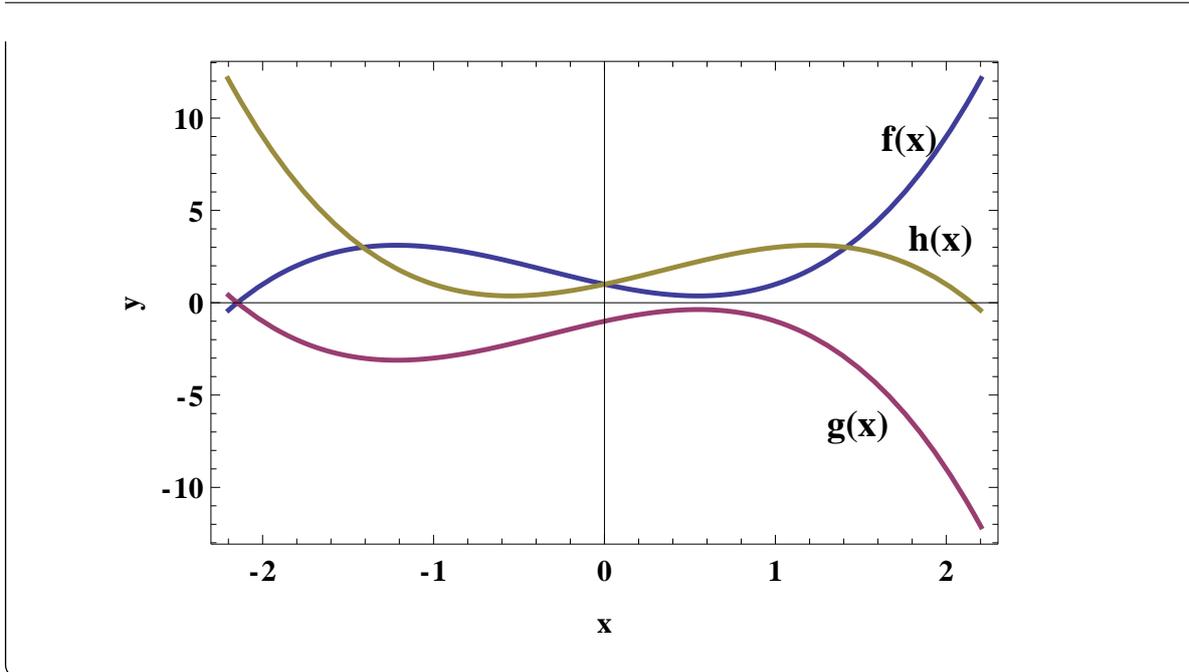
879G1J

Wir betrachten die Funktion $g(x) = 1 - 2x + x^2 + x^3$. Bestimmen Sie

- die Funktion $h(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der x-Achse ist.
- die Funktion $p(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der y-Achse ist.
- Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie alle drei Funktionen in Matlab oder GeoGebra im Bereich $x \in [-2.2; 2.2]$ plotten.

Lösung:

- $h(x) = -g(x) = -(1 - 2x + x^2 + x^3) = -1 + 2x - x^2 - x^3$
- $p(x) = g(-x) = 1 - 2(-x) + (-x)^2 + (-x)^3 = 1 + 2x + x^2 - x^3$
- Graphik unten



4.4 Arkus-Funktionen

Beispiel 4.21 Arkustangens-Funktion

T4712W

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.73 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.73 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.73 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.73 \end{pmatrix}$$

- a) Skizzieren Sie die Lage der Vektoren im Koordinatensystem. Berechnen Sie den Winkel zwischen der x -Achse den Vektoren.
- b) Berechnen Sie den Winkel zwischen der x -Achse den Vektoren. Benutzen Sie dafür die Arkustangens-Funktion.

Lösung:

a) Skizze

- b)
- Für \vec{k} berechnen wir $\arctan\left(\frac{1.73}{1}\right) = 60^\circ$ und $\alpha_k = 60^\circ$
 - Für \vec{h} berechnen wir $\arctan\left(\frac{1.73}{-1}\right) = -60^\circ$ und $\alpha_k = -60^\circ + 180^\circ = 120^\circ$
 - Für \vec{v} berechnen wir $\arctan\left(\frac{-1.73}{1}\right) = -60^\circ$ und $\alpha_k = -60^\circ$
 - Für \vec{w} berechnen wir $\arctan\left(\frac{-1.73}{-1}\right) = 60^\circ$ und $\alpha_k = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$

Definition Arkustangens-Funktion

Die Arkustangens-Funktion ordnet den Komponenten $x > 0$ und y den Winkel φ zu. Für $x \in \mathbb{R}$ benutzen wir:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 180^\circ & x < 0 \end{cases}$$

Dabei sind $x, y \in \mathbb{R}$

Wir nennen die Komponenten $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ auch **Kartesische Koordinaten**. Für jeden Vektor können wir daraus Betrag und φ (den Winkel, den \vec{v} mit der x-Achse einschliesst) berechnen. Das Paar v und φ bestimmt einen Vektor eindeutig. Wir nennen dieses Zahlenpaar die **Polar-Koordinaten** des Vektors \vec{v} .

Beispiel 4.22 Kartesische- \rightarrow Polar-Koordinaten

R3601V

Berechnen Sie die Polarkoordinaten

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7.96956 \\ -0.697246 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $a = 8, \varphi = -5^\circ$

d) $d = 10, \varphi = 120^\circ$

b) $b = 1, \varphi = 60^\circ$

e) $e = 2, \varphi = 15^\circ$

c) $c = 2, \varphi = -60^\circ$

f) $f = \sqrt{2}, \varphi = 270^\circ$

Infobox Inverse trigonometrische Funktionen

- Der Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} wird berechnet über

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \odot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$

Dabei erhalten wir korrekterweise einen Winkel $0 \leq \varphi < 180^\circ$ zwischen den Vektoren, und es wird korrekterweise kein Drehsinn berücksichtigt.

Beispiel 4.23 Neigungswinkel

084725

Berechne den Neigungswinkel für ein Gelände mit 5%, 50%, 100% und 200% Neigung.

Lösung:

Bei einer Neigung von 5% ist das Gelände parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 100 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Neigungswinkel ist also

$$\varphi = \arctan\left(\frac{5}{100}\right) = 2.86^\circ$$

Analog

$$\begin{aligned}\varphi_{50} &= \arctan\left(\frac{50}{100}\right) = 26.57^\circ \\ \varphi_{100} &= \arctan\left(\frac{100}{100}\right) = 45^\circ \\ \varphi_{200} &= \arctan\left(\frac{200}{100}\right) = 63.43^\circ\end{aligned}$$

5.1	Berechnung des Skalarprodukt in einer Orthogonalbasis	82
5.2	Projektion	92
5.3	Spiegelung und Projektionen	95
5.4	Wieso funktioniert das?	103
5.5	Geometrische Deutung der Gesetze für das Skalarprodukt	109
5.6	Spezialfall $\ a\ = 1^*$	110
5.7	Allgemeiner Fall*	111
5.8	Komponenten-Schreibweise, Basis orthonormal	111
5.9	Skalarprodukt in nicht orthogonaler Basis*	113
5.10	Basiswechsel zwischen Orthogonalbasen	114

5.1 Berechnung des Skalarprodukt in einer Orthogonalbasis

Definition Skalarprodukt

Für \vec{a} und \vec{b} , die den Winkel φ einschliessen, ist das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$$

[Papula, 2009, Bd. 1 II 2.3]

Satz Skalarprodukt für Vektoren in Komponenten-Schreibweise einer Orthonormalbasis

Das Skalarprodukt in einer Orthonormalbasis in \mathbb{R}^N ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N$$

Wie Abschnitt 5.4 zeigen wird, handelt es sich hier nicht um eine Definition sondern bereits um das Resultat einer Herleitung.

Beispiel 5.1 In einer Orthonormalbasis

6PUK6M

Berechnen Sie die Skalarprodukte

a) $\vec{c} \odot \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e} \odot \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{c} \odot \vec{d} = -7$

b) $\vec{e} \odot \vec{f} = 0$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = 16$

Beispiel 5.2 In einer Orthonormalbasis

M6C2WL

Berechnen Sie die Skalarprodukte

a) $\vec{c} \odot \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e} \odot \vec{f} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Was können wir anhand dieser Resultate über den Winkel zwischen den Vektoren φ sagen?

Lösung:

a) $\vec{e} \odot \vec{d} = -14$

b) $\vec{e} \odot \vec{f} = 2$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = 0$

Aus der Definition 5.1 schliessen wir, dass gilt

- $\vec{a} \odot \vec{b} = 0$ für $\varphi = 90^\circ$
- $\vec{a} \odot \vec{b} < 0$ für $\varphi > 90^\circ$
- $\vec{a} \odot \vec{b} > 0$ für $\varphi < 90^\circ$

Mit dem Satz 5.1 können wir Winkel zwischen Vektoren berechnen. Die Definition des Skalarprodukts aufgelöst nach dem Winkel gibt

$$\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \cos(\varphi)$$

oder sogar

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right).$$

Andererseits wissen wir nun wie wir das Skalarprodukt und die Längen der Vektoren berechnen. Beachte, dass der Ausdruck $\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$ gemäss der Schwarz'schen Ungleichung (Satz 5.4) im Bereich $[-1; 1]$ liegt und dass deshalb der Winkel stets eindeutig definiert ist.

Beispiel 5.3 Berechne das Skalarprodukt und den Zwischenwinkel 600065

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{a} \odot \vec{b} = 1 \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{4}, \text{ d.h. } \varphi = 45^\circ.$$

Infobox Cos/ArcCos

Bei der Berechnung des Zwischenwinkels mit Hilfe des Skalarprodukts und \arccos entstehen **keine** Probleme. Oder auch:

Wenn wir Zwischenwinkel mit Hilfe des Skalarprodukts und \arccos berechnen, wird immer ein Winkel $0 < \varphi < 180^\circ$ berechnet.

Beispiel 5.4 Berechne alle Skalarprodukte und die Zwischenwinkel 599954

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- $\vec{a} \odot \vec{b} = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{3}$, d.h. $\varphi = 60^\circ$.
- $\vec{b} \odot \vec{c} = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\varphi = 90^\circ$.
- $\vec{a} \odot \vec{c} = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$, d.h. $\varphi = 45^\circ$.

Beispiel 5.5 Skalarprodukt, Orthogonalität

891584

Bestimme die Vektoren in der Liste, die zu \vec{v} orthogonal sind.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 263 \\ -35 \\ -44 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -121 \\ 15 \\ -48 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 71 \\ 5 \\ -48 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{v} \odot \vec{a} &= 0 \\ \vec{v} \odot \vec{b} &= -142 \\ \vec{v} \odot \vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

Also stehen \vec{a} und \vec{c} orthogonal zu \vec{v}

Beispiel 5.6 Winkel zwischen Vektoren

520784

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1351 \\ 362 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a)

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \right) = 109.471^\circ$$

mit $\vec{a} \odot \vec{b} = -1$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{3}$ und $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$.

b) $\varphi = 90^\circ$ mit $\vec{a} \odot \vec{b} = 0$

c) $\varphi = 120^\circ$ mit $\vec{a} \odot \vec{b} = -989$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$ und $\|\vec{b}\| \approx 1398.7$.

d) $\varphi = 60^\circ$

5.1.1 Norm und Normierung

Beispiel 5.7 Berechne die Norm

3J47VL

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$

i) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$

b) $2 \cdot \vec{a}$

f) $\frac{1}{5} \cdot \vec{c}$

j) $(-1) \cdot \vec{u}$

c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

g) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

k) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $10 \cdot \vec{b}$

h) $\frac{1}{9} \cdot \vec{d}$

l) $\frac{1}{11} \cdot \vec{v}$

Lösung:

a) $\|\vec{a}\| = 5$

g) $\|\vec{d}\| = 9$

b) $\|2 \cdot \vec{a}\| = 2 \cdot 5 = 10$

h) $\|\frac{1}{9} \cdot \vec{d}\| = 1$

c) $\|\vec{b}\| = 3$

i) $\|\vec{u}\| = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$

d) $\|10 \cdot \vec{b}\| = 30$

j) $\|(-1) \cdot \vec{u}\| = 17$

e) $\|\vec{c}\| = 25$

k) $\|\vec{v}\| = 11$

f) $\|\frac{1}{5} \cdot \vec{c}\| = 5$

l) $\|\frac{1}{11} \cdot \vec{v}\| = 1$

Definition Normierter Vektor

Der Vektor $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ hat die Länge 1 und heisst deshalb **normiert**.

Achtung: Den Vektor mit $\|\vec{a}\| = 0$ kann man nicht normieren.

Beispiel 5.8 Normierung

503757

Normiere den Vektor. Zeige dann, dass der normierte Vektor die Länge 1 hat.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{a}' = \vec{a} \frac{1}{\|\vec{a}\|} = \begin{pmatrix} -9 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{41}$$

Das ist die Schreibweise mit der man im Kopf am schnellsten rechnen kann. Wir könnten auch schreiben (das wird aber später umständlicher zum Rechnen):

$$\vec{a}' = \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ 40 \end{pmatrix}}{41} \text{ oder } \vec{a}' = \begin{pmatrix} -9/41 \\ 40/41 \end{pmatrix}$$

Die Länge ist 1:

$$\|\vec{a}'\| = \left\| \frac{1}{41} \vec{a} \right\| = \left| \frac{1}{41} \right| \cdot \|\vec{a}\| = \frac{1}{41} \cdot 41 = 1$$

Dabei wurde verwendet, dass $\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$ gilt.

Beispiel 5.9 Normierung

492646

Normiere die Vektoren. Zeige dann, dass der normierte Vektor die Länge 1 hat.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -20 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\text{a) } \vec{a}' = \vec{a} \frac{1}{\|\vec{a}\|} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$$

Länge ist 1:

$$\|\vec{a}'\| = \left\| \frac{1}{5} \vec{a} \right\| = \left| \frac{1}{5} \right| \cdot \|\vec{a}\| = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

$$\text{b) } \vec{b} \frac{1}{\|\vec{b}\|} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13}$$

$$\text{c) } \vec{c} \frac{1}{\|\vec{c}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{d} \frac{1}{\|\vec{d}\|} = \begin{pmatrix} -20 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{101}$$

$$\text{e) } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Länge ist 1:

$$\|\vec{x}'\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \right| \cdot \|\vec{x}\| = 1$$

Die Norm oben heisst in der Fachsprache 'karthetische Norm'. Es gibt aber andere Möglichkeiten eine Norm festzulegen — siehe Beispiel 5.11. Aus der Definition folgt ausserdem

$$\vec{a} \odot \vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \|\vec{a}\|^2$$

oder also

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \odot \vec{a}}$$

Alle Normen erfüllt folgende Eigenschaften.

Definition Definition und Eigenschaften der Norm

Die Norm ist für alle Elemente der Grundmenge definiert und es gilt:

- $\|\vec{0}\| = 0$
- $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Beispiel 5.10 Eigenschaften der Norm

CESMGH

Wir wollen die Norm des Vektors $\vec{a} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen. Welches ist ein korrekter Ausdruck für $\|\vec{a}\|$? Mehrere Antworten möglich.

$$\text{a) } \|\vec{a}\| = \frac{1}{5}$$

$$\text{d) } \|\vec{a}\| = \sqrt{5}$$

$$\text{b) } \|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{e) } \|\vec{a}\| = \frac{1}{5} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\text{c) } \|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$\text{f) } \|\vec{a}\| = 5$$

Lösung:

a) falsch

b) $\|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, korrekt

c) $\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}$, korrekt aber umständlich

d) falsch

e) $\|\vec{a}\| = \frac{1}{5} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$, korrekt und einfach zu berechnen

f) falsch

Beispiel 5.11 Eine Norm?

SROOVS

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Funktionen um Normen handelt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Hinweise:

Allgemeine Gesetze für den Betrag der Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\max\{|\lambda \cdot x_1|, |\lambda \cdot x_2|\} = |\lambda| \cdot \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

A) $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$

E) $\|\vec{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$

B) $\|\vec{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

F) $\|\vec{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 - (x_2)^2}$

C) $\|\vec{x}\| = x_1$

D) $\|\vec{x}\| = |x_1|$

G) $\|\vec{x}\| = \min\{|x_1|, |x_2|\}$

Lösung:

A) Ist eine Norm, denn

- $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 0$

- $\left\| \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda \cdot x_1| + |\lambda \cdot x_2| = |\lambda| \cdot (|x_1| + |x_2|) = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$

- $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|$

B) Ist eine Norm, denn

- $\|\vec{0}\| = \max\{|0|, |0|\} = 0$
- $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = \max\{|\lambda \cdot x_1|, |\lambda \cdot x_2|\} = |\lambda| \cdot \max\{|x_1|, |x_2|\} = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
- Fallunterscheidung $|x_1| \leq |x_2|$ und $|y_1| \leq |y_2|$:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} = |x_2 + y_2|$$

Andererseits

$$\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\} = |x_2| + |y_2|$$

Da $|a + b| \leq |a| + |b|$ gilt, haben wir gezeigt, dass $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

2. Fall $|x_2| < |x_1|$ und $|y_2| < |y_1|$:

Alle Schritte gehen gleich wie beim Fall 1, nur sind alle Indizes vertauscht $1 \rightarrow 2$ und $2 \rightarrow 1$.

3. Fall $|x_2| < |x_1|$ und $|y_2| > |y_1|$:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} = |x_2 + y_2|$$

Andererseits

$$\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\} = |x_1| + |y_2| < |x_2| + |y_2| < |x_2 + y_2|$$

es gilt aber auch

$$= |x_1| + |y_2| < |x_1| + |y_1| < |x_1 + y_1|$$

d.h. in jedem Fall, ist $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

4. Fall $|x_2| > |x_1|$ und $|y_2| < |y_1|$:

Alle Schritte gehen gleich wie beim Fall 3, nur sind alle Indizes vertauscht $1 \rightarrow 2$ und $2 \rightarrow 1$.

C) Ist keine Norm, denn z.B. $\left\| -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = -1 \neq |-1| \cdot 1$

D) Ist eine Norm.

E) Ist eine Norm.

- $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 0$
-

$$\begin{aligned} \left\| \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2[(x_1)^2 + (x_2)^2]} = |\lambda| \cdot \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \\
&= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 + \underbrace{2x_1 \cdot x_2 + 2y_1 \cdot y_2}_{2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} \\
&= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 + 2 \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \cos(\alpha) \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + 2 \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite berechnen wir (Binom):

$$\left(\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| \right)^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + 2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|$$

Wir erhalten hier genau den Ausdruck, den wir schon oben erhalten haben. Wir können deshalb die *rechten* Seiten der Gleichungen oben vergleichen

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \leq \left(\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| \right)^2$$

Dieser Ausdruck gilt auch ohne Quadrierung links und rechts.

F) Ist keine Norm auf \mathbb{R}^2 . In der Relativitätstheorie gilt aber für alle Vektoren $(x_1)^2 \geq (x_2)^2$, dann kann der Ausdruck als Norm benutzt werden.

G) $\|\vec{x}\| = \min\{|x_1|, |x_2|\}$ ist keine Norm. Der Beweis geht zunächst analog zu Beispiel B, er versagt aber bei der Fallunterscheidung (3. Fall $|x_2| < |x_1|$ und $|y_2| > |y_1|$).

Es genügt auch folgendes eine Zahlenbeispiel anzugeben, wo die Norm versagt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann erhalten wir

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \min\{|1 + 4|, |3 + 2|\} = 5$$

und

$$\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| = 1 + 2 = 3$$

Deshalb gilt hier $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ nicht.

Beispiel 5.12 Richtung und Länge

TVJ58M

Geben sie die kartesischen Koordinaten des folgenden Vektors an:

\vec{a} hat Länge 7 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \cdot 7 = \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.13 Richtung und Länge

SWI49N

Geben sie die kartesischen Koordinaten der folgenden Vektoren an:

a) \vec{a} hat Länge 10 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 8 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

b) \vec{b} hat Länge 5 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} -33 \\ 56 \end{pmatrix}$

c) \vec{c} hat Länge λ und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 9 \\ 40 \end{pmatrix}$

d) \vec{d} hat Länge ν und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Lösung:

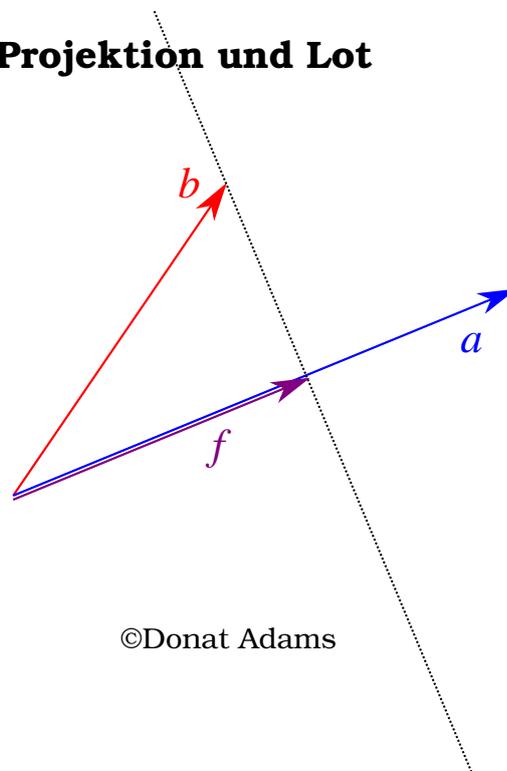
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -0.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{8^2+(-0.5)^2}} \cdot 10 = \begin{pmatrix} 9.98 \\ -0.624 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \frac{5}{65} \begin{pmatrix} -33 \\ 56 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -33 \\ 56 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \frac{\lambda}{41} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 40 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \frac{\nu}{\sqrt{65/4}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

5.2 Orthogonale Projektion und Lot



Satz Projektion und Lot

Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren. Der Vektor \vec{b} lässt sich eindeutig als $\vec{b} = \vec{f} + \vec{h}$ schreiben, wobei \vec{f} parallel zu \vec{a} steht und \vec{h} senkrecht zu \vec{a} . Dabei sind \vec{f} und \vec{h} eindeutig festgelegt über:

$$\vec{f} = \left(\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \right) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{und} \quad \vec{h} = \vec{b} - \vec{f}$$

Definition Projektion und Lot

\vec{f} heisst die **Projektion** von \vec{b} auf \vec{a} und \vec{h} heisst das **Lot** von \vec{b} auf \vec{a}

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.1, p.398]

Die "Logik dahinter" ist, dass wir mit dem Ausdruck $\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ die Länge des Schattens von \vec{b} auf \vec{a} berechnen. Merke, dass die Länge des Schattens nur dann richtig berechnet wird, wenn das Skalarprodukt mit einem Vektor der Länge 1 berechnet wird — hier mit $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ — projiziert wird. Danach wird die Länge des Schattens mit einem Vektor der Länge 1 multipliziert — auch das ist $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$. Deshalb hat \vec{f} genau die Länge des Schattens von \vec{b} auf \vec{a} und liegt auf der Geraden durch $\vec{0}$ und die Spitze von \vec{a} . Übrigens projiziert man schneller, wenn man oben die Faktoren etwas umordnet:

$$\vec{f} = \frac{\vec{b} \odot \vec{a}}{\vec{a} \odot \vec{a}} \cdot \vec{a}.$$

und das Vorzeichen bei der Bestimmung von \vec{h} kann sich durch den Ausdruck $\vec{f} + \vec{h} = \vec{b}$ merken.

Beispiel 5.14 Zerlege \vec{b} in Projektion und Lot bezüglich \vec{a}

251965

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

In der Formel für die Projektion kommt der Ausdruck $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ zwei mal vor, deshalb berechnen wir ihn im Voraus

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit vereinfacht sich die Projektion zu

$$\vec{f} = \left(\vec{b} \odot \vec{a}' \right) \cdot \vec{a}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{h} = \vec{b} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.15 Schatten, spitzer/stumpfer Zwischenwinkel

GHZIHV

Berechnen Sie die Länge des Schattens von \vec{b} auf \vec{a} und geben Sie an, ob der Zwischenwinkel $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ oder $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6.84 \\ 5.12 \end{pmatrix}$

Lösung:

Lösung durch Projektion:

a) $s = \vec{b} \odot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = 8$. Die Zahl ist positiv, also ist der Zwischenwinkel $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$

b) $s = \vec{b} \odot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = 45 \cdot \frac{1}{5} = 9$. Die Zahl ist positiv, also ist der Zwischenwinkel $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$

c) $s = \vec{b} \odot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = 0$, die Vektoren stehen senkrecht aufeinander. $\varphi = 90^\circ$

d) $s = \vec{b} \odot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = -3 \cdot \frac{1}{25} = -\frac{3}{25}$. Die Zahl ist negativ, also ist der Zwischenwinkel $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$.

Beispiel 5.16 Schatten als Vektor

JBARLL

Geben Sie den Schatten von \vec{b} auf \vec{a} als Vektor an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6.84 \\ 5.12 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{f} = \vec{b} \odot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{8}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\text{b) } \vec{f} = \vec{b} \odot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 45 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{9}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander, also $\vec{f} = \vec{0}$

$$\text{d) } \vec{f} = \vec{b} \odot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = -3 \cdot \frac{1}{25^2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix} = \frac{-3}{625} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5.17 Geometrie am Dreieck

713581

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Berechne für das Dreieck ABC die Koordinaten des Fusspunktes \vec{F}_C und den Höhenvektor \vec{h}_C . Siehe auch Skizze Abbildung 5.3.

Lösung:

Wir berechnen die Verbindungsvektoren

$$\vec{b} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Projektion \vec{f} und das Lot \vec{h}_C , des Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{c} :

$$s = \vec{b} \odot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$$

also

$$\vec{f} = s \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{9}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} = \frac{9}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Fusspunkt liegt bei

$$\vec{F}_C = \vec{A} + \vec{f} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 127 \\ 50 \\ 11 \end{pmatrix}$$

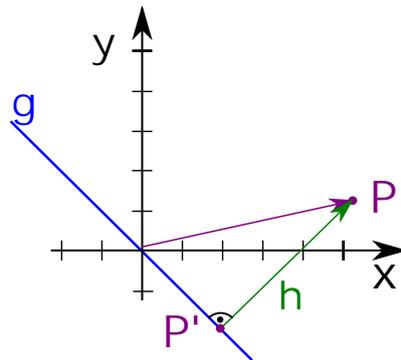
Und

$$\vec{h}_C = \vec{b} - \vec{f} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -52 \\ -50 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

5.3 Spiegelung und Projektionen

Beispiel 5.18 Spiegelung an Geraden Einführung

KT558I



P'

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Die Gerade g verläuft durch den Ursprung.

- Projizieren den Punkt \vec{P} auf die Gerade g
- Spiegeln Sie anschliessen den Punkt \vec{P} an der Geraden g .

Lösung:

- Projektion

$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Spiegelung

$$\vec{P}'' = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

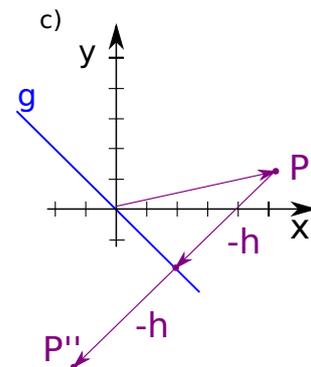
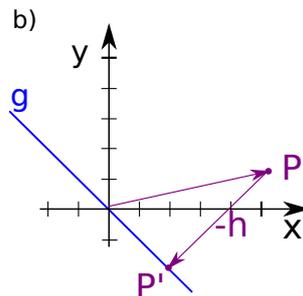
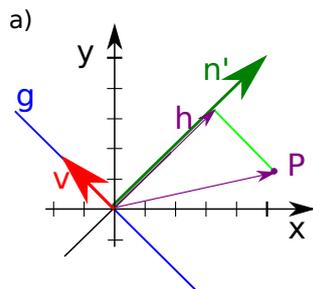


Abbildung 5.1: a) Der Ortsvektor wird auf den Normalvenvektor projiziert b) Projektion: $\vec{P} - \vec{h}$ fällt auf die Gerade c) Spiegelung: $\vec{P} - 2\vec{h}$.

Beachte, dass eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerschneidet. Die Projektion $(\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ zeigt stets in die selbe Halbebene wie \vec{P} , egal ob \vec{n}' in der selben Halbebene liegt wie \vec{P} . Deshalb bringt $\vec{P} - \vec{h}$ den Punkt zurück auf die Gerade

(Fig. 5.1), d.h. wir brauchen uns mit dem Vorzeichen in Gleichung 5.1 nicht zu beschäftigen.

Satz Projektion und Spiegelung an einer Geraden durch $\vec{0}$

Wir projizieren \vec{P} auf den Normalenvektor:

$$\vec{h} = \vec{P} \odot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{P} \odot \vec{n}}{\vec{n} \odot \vec{n}} \cdot \vec{n}$$

Dabei ist \vec{n} ein Normalenvektor der Geraden $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$.

Wir können den Punkt $\vec{P} \in \mathbb{R}^2$ auf g projizieren durch

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{h} \tag{5.1}$$

oder an g spiegeln durch

$$\vec{P}'' = \vec{P} - 2\vec{h}.$$

Beispiel 5.19 Spiegelungen und Projektionen an einer Geraden IES6DX

Spiegeln Sie den Punkt \vec{P} an der Geraden g mit dem Richtungsvektor mit \vec{v} . projizieren Sie anschliessend \vec{P} auf g . Alle Geraden g verlaufen durch den Ursprung.

a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 8.4 \\ 6.2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 16.88 \\ 47.16 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$

b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 26.85 \\ -59.23 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$

d) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 120.56 \\ -33.08 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Wir berechnen zuerst den Normalenvektor und normieren ihn

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ -1.8 \end{pmatrix}$$

Spiegelung:

$$\vec{P}'' = \vec{P} - 2\vec{h} = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 9.8 \end{pmatrix}$$

Projektion:

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) Wir berechnen zuerst den Normalenvektor

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h} = \begin{pmatrix} 1.8497 \\ 0.77071 \end{pmatrix}$$

Spiegelung:

$$\vec{P}'' = \vec{P} - 2\vec{h} = \begin{pmatrix} 23.15 \\ -60.77 \end{pmatrix}$$

Projektion:

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{h} = \begin{pmatrix} 25 \\ -60 \end{pmatrix}$$

c) Wir berechnen zuerst den Normalenvektor

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h} = \begin{pmatrix} 2.88 \\ -0.84 \end{pmatrix}$$

Spiegelung:

$$\vec{P}'' = \vec{P} - 2\vec{h} = \begin{pmatrix} 11.12 \\ 48.84 \end{pmatrix}$$

Projektion:

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{h} = \begin{pmatrix} 14 \\ 48 \end{pmatrix}$$

d) Wir berechnen zuerst den Normalenvektor und normieren ihn

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -24 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h} = \begin{pmatrix} 0.56 \\ 1.92 \end{pmatrix}$$

Spiegelung:

$$\vec{P}'' = \vec{P} - 2\vec{h} = \begin{pmatrix} 119.44 \\ -36.92 \end{pmatrix}$$

Projektion:

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{h} = \begin{pmatrix} 120 \\ -35 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.20 Geometrie am Dreieck

713581

Berechne für das Dreieck ABC die Koordinaten des Fusspunktes \vec{F}_C und die Höhe h_C .

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Siehe auch Skizze oben, Abbildung 5.3.

Lösung: Wir berechnen die Projektion \vec{f} und das Lot \vec{h}_C , des Vektors \vec{b} auf

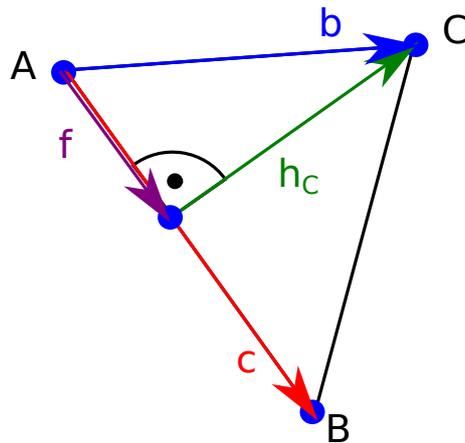


Abbildung 5.2: Zur Aufgabe 5.20

den Vektor \vec{c} :

$$f = \vec{b} \odot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$$

also

$$\vec{f} = f \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{9}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} = \frac{9}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{h}_C = \vec{b} - \vec{f} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -52 \\ -50 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Höhe h_C des Dreiecks und der Fusspunkt

$$h_C = |\vec{h}_C| = \sqrt{269/25} \approx 3.28024$$

und

$$\vec{F}_C = \vec{A} + \vec{f} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 136 \\ 48 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 127 \\ 50 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Wichtig: Die Projektion von \vec{b} auf \vec{c} ist

$$\vec{f} = \frac{\vec{b} \odot \vec{c}}{|\vec{c}|} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\vec{b} \odot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \cdot \vec{c}.$$

Die Richtung von \vec{f} hängt nur von der Richtung von \vec{b} aber nicht von der Richtung von \vec{c}

Wird \vec{c} in umgekehrter Richtung gewählt — von \vec{B} zu \vec{A} — dann hätte \vec{f} immer noch die selbe Richtung:

$$\frac{\vec{b} \odot (-\vec{c})}{|(-\vec{c})|^2} \cdot (-\vec{c}) = \vec{f}$$

Hätten wir aber \vec{b} in umgekehrter Richtung gewählt — von \vec{C} zu \vec{A} — dann hätte \vec{f} die entgegengesetzte Richtung:

Beispiel 5.21 Lot

381963

Fällen Sie das Lot vom Punkt \vec{C} auf die Gerade g und berechnen Sie den Abstand des Punktes \vec{C} zur Geraden g :

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: a) Skizze wie in Abbildung 5.3, wir stellen uns einfach vor, \vec{A} sei der Aufpunkt, und \vec{c} der Richtungsvektor der Geraden.

$$\vec{f} = \vec{b} \odot \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

also

$$\vec{f} = \|\vec{f}\| \cdot \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = 2\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{h}_C = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{h}_C| = 2\sqrt{5} \approx 4.47.$$

b) $2\sqrt{10} \approx 6.32$

Beispiel 5.22 Abstand, effizientes Vorgehen

797792

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes \vec{C} von der Geraden g :

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: a) Es wird ausschliesslich der Abstand gesucht. Wir können ihn — wie so oft — als Projektion des Verbindungsvektors zwischen Punkt \vec{C} und g den Vektor \vec{n} , der senkrecht auf der Geraden steht, berechnen:

$$h = \left| \vec{n} \odot (\vec{C} - \vec{A}) \right|.$$

Der Vektor \vec{n} lässt sich schnell berechnen. Wir nehmen den Richtungsvektor,

tauschen die Komponenten und multiplizieren eine Komponente mit -1 :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}'$$

Durch die Normierung erhalten wir

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{n}'|} \vec{n}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist der Abstand

$$h = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-10}{\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

b) $2\sqrt{10} \approx 6.32$

Beispiel 5.23 Spiegelung an Geraden durch Ursprung

659289

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g: \vec{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir nennen den den Richtungsvektor der Geraden \vec{v} .

Die Idee ist, dass wir den Ortsvektor der Punkte, die wir spiegeln wollen, z.B. \vec{B} , zerlegen in eine Komponente, parallel zu g und senkrecht zu g :

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_s$$

Ist \vec{B}_s bekannt, können wir spiegeln:

$$\vec{B}' = \vec{B} - 2 \cdot \vec{B}_s.$$

\vec{A} liegt auf der Geraden also gilt

$$\vec{A}' = \vec{A}.$$

Für die anderen Punkte berechnen die einen Vektor der senkrecht auf der Geraden steht durch Vertauschen der Komponenten des Richtungsvektors und Ändern eines Vorzeichens:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}'.$$

Die senkrechten Komponenten ergeben sich durch Projektion auf diesen Vektor:

$$\vec{B}_s = \vec{B} \odot \vec{n}' \frac{1}{|\vec{n}'|} = \vec{B} \odot \vec{n}' \frac{1}{|\vec{n}'|} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

und genau gleich

$$\vec{C}_s = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

Der gespiegelte Punkt ist also bei

$$\vec{B}' = \vec{B} - 2\vec{B}_s = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{C}' = \vec{C} - 2\vec{C}_s = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \end{pmatrix}$$

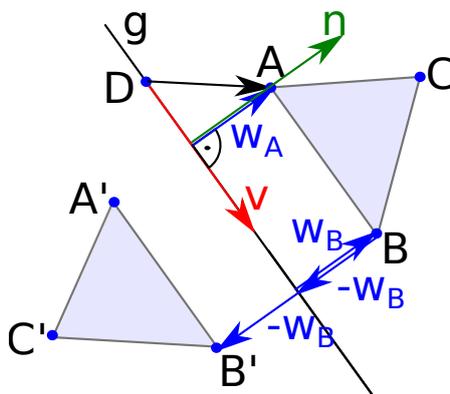
Beispiel 5.24 Spiegelung

109810

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:



Wir nennen den Aufpunkt der Geraden \vec{D} und den Richtungsvektor \vec{v} .

Die Idee ist — in der Grafik wird dies anhand des Punktes \vec{B} gezeigt — dass wir einen Vektor berechnen, g und den Punkt \vec{B} verbindet und der senkrecht auf g steht. Wir nennen diesen Vektor \vec{w}_B . Ist der bekannt, kann der Spiegelpunkt berechnet werden als

$$\vec{B}' = \vec{B} - 2\vec{w}_B.$$

Wie wird \vec{w}_B berechnet? Diese Methode wird anhand von Punkt \vec{A} gezeigt: Wir berechnen den Vektor \vec{n} , der senkrecht auf g steht und normiert ist. Dafür nehmen wir den Richtungsvektor, tauschen die Komponenten und multiplizieren eine Komponente mit -1 :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}'$$

Durch die Normierung erhalten wir

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{n}'|} \vec{n}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Projektion auf diesen Vektor ist

$$\vec{w}_A = \vec{n} \odot (\vec{A} - \vec{D}) \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Der gespiegelte Punkt ist also bei

$$\vec{A}' = \vec{A} - 2\vec{w}_A = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Weitere (Zwischen-) Resultate:

$$\vec{w}_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w}_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die gespiegelten Punkte ergeben sich zu

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{C}' = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

5.4 Wieso funktioniert das?

Gesetze für das Skalarprodukt

Satz Gesetze für das Skalarprodukt

- | | |
|---|-------------------------|
| 1. $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a},$ | Kommutativ-Gesetz |
| 2. $(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r(\vec{b} \odot \vec{a}),$ | Assoziativ-Gesetz |
| 3. $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a},$ | Distributiv-Gesetz |
| 4. $\ \vec{a} \odot \vec{b}\ \leq \ \vec{a}\ \cdot \ \vec{b}\ ,$ | Ungleichung von Schwarz |

[Papula, 2009, Bd. 1 II 3.3] [Goebbels and Ritter, 2011, 3.1,p.394]

Für die erste Gleichung wurde verwendet, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\varphi) = \|b\| \cdot \|a\| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a}$$

Bisher haben wir ausschliesslich die abstrakte Schreibweise für Vektoren benutzt. Im Folgenden werden wir herleiten, wie man das Skalarprodukt für Vektoren in Komponenten-Schreibweise berechnet.

Beispiel 5.25 Gesetze Skalarprodukt

D9YQP1

$$\vec{a} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen das Skalarprodukt für die obigen Vektoren berechnen. Welche Ausdrücke sind korrekt? Mehrere Antworten möglich.

a) $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

b) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = 2$

d) $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{2}{5}$

e) $\vec{a} \odot \vec{b} = \left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \cos(45^\circ)$

f) $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$

Lösung:

a) korrekt (Assoziativität des Skalarprodukts)

b) nicht korrekt; Das Skalarprodukt ist definiert als

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

deshalb beeinflusst die Länge der Vektoren das Endresultat.

c) nicht korrekt; sieht oben

d) korrekt: $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{2}{5}$

e) korrekt; Definition des Skalarprodukts

f) korrekt; das Skalarprodukts ist kommutativ

Beispiel 5.26 Rechenregeln Skalarprodukt

248034

Es seien die Skalarprodukte

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{a} \odot \vec{c} = \vec{b} \odot \vec{c} = \frac{1}{2} \text{ und } \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1.$$

Berechne

a) $\vec{b} \odot \vec{a}$

c) $\vec{b} \odot (\vec{b} - \vec{c})$

b) $\vec{a} \odot (\vec{b} + \vec{c})$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \odot (\vec{b} - \vec{c})$

Lösung:a) Gemäss der Regeln für das Skalarprodukt und der Aufgabenstellung gilt $\vec{b} \odot \vec{a} = \vec{a} \odot \vec{b} = \frac{1}{2}$

b)

$$\vec{a} \odot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \odot \vec{b} + \vec{a} \odot \vec{c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

c)

$$\vec{b} \odot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b} \odot \vec{b} - \vec{b} \odot \vec{c} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d)

$$(\vec{a} + \vec{b}) \odot (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) \odot \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \odot \vec{c}$$

also

$$\vec{a} \odot \vec{b} + \vec{b} \odot \vec{b} - (\vec{a} \odot \vec{c} + \vec{b} \odot \vec{c}) = \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

5.4.1 Basis, Komponenten

Definition Basis

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ heissen Basis des Vektorraums V , falls

- sie linear unabhängig sind
- und jeder Vektor in V als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ geschrieben werden kann.

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ heissen **Basisvektoren**.

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.12,p.433]

Definition Dimension

Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums V heisst **Dimension** von V

Definition Koordinate (Komponente)

Seien die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ eine Basis eines Vektorraums und

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n,$$

dann nennen wir (v_1, v_2, \dots, v_n) die **Koordinaten** von \vec{v} (oder auch die **Komponenten** von \vec{v}).

Wir werden später zeigen, dass sich jeder Vektor in Komponenten zerlegen lässt,

auch bezüglich einer Basis, die weder aus senkrechten noch normierten Basisvektoren besteht.

Beispiel 5.27 Vektor vs. Komponente

785039

Schreiben Sie die Vektoren mit den Komponenten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der Basis $1, t, t^2$ oder

in der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = t, \vec{e}_3 = t^2$

b) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = t^2 - 1, \vec{e}_3 = t^2 - t$

d) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = \cos(t), \vec{e}_3 = \sin(t)$

Lösung:

a) $1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t - 2 \cdot t^2 = 1 - 2t^2$

b) $1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $1 + 2t - 2t^2$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

e) $1 \cdot 1 + 0 \cdot \cos(t) - 2 \sin(t) = 1 - 2 \sin(t)$

Beispiel 5.28 Vektorkomponenten

128857

Zeichnen Sie die Vektoren \vec{U}, \vec{V} und \vec{W} . Die Basis-Vektoren sind

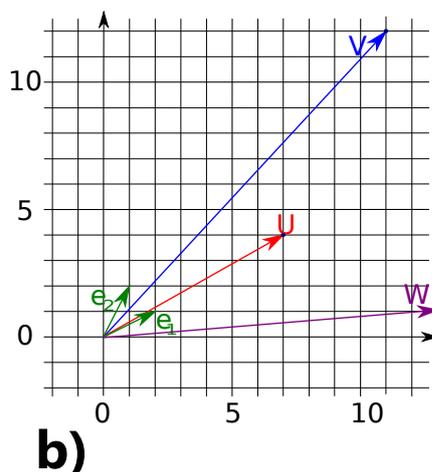
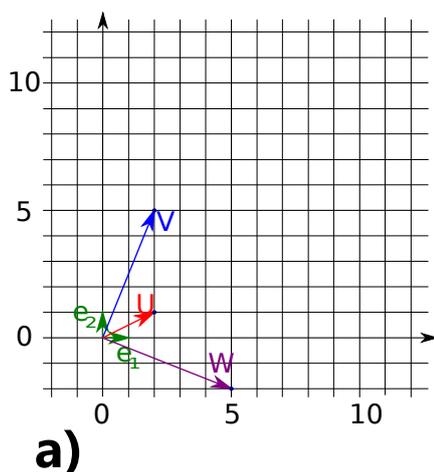
a) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Komponenten der Vektoren sind in jeder Basis

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:



Definition Orthogonal-Basis

Eine Basis $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ heisst **orthogonal**, wenn die Basisvektoren rechtwinklig zu einander stehen.

Definition Normierte Basis

Eine Basis heisst **normiert**, wenn die Basisvektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ die Länge 1 haben.

Definition Orthonormalbasis

Ist die Basis sowohl orthogonal wie auch normiert, heisst sie **Orthonormalbasis**.

5.4.2 Was ist eine Basis?

Infobox Basis von \mathbb{R}^3

Jeder Satz von 3 Vektoren (die nicht in einer Ebene liegen) ist eine Basis von \mathbb{R}^3 .

Wir haben gesehen, dass sich jeder Punkt in der Ebene schreiben lässt als die Summe von zwei Vektoren. Wir wollen kurz analysieren, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dies möglich ist. Wählen wir \vec{e}_1 und \vec{e}_2 wie in Abb. 5.3 a), ist die Zerlegung immer möglich. Im Beispiel ist $\vec{A} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Wählen wir \vec{e}_1 und \vec{e}_2 wie in

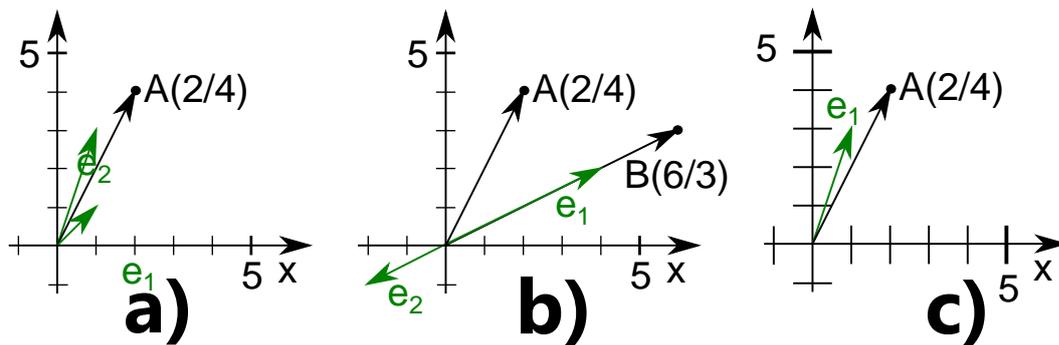


Abbildung 5.3: Die Darstellung eines Punktes in der Ebene als Summe von (zwei) Vektoren.

Abb. 5.3 b), ist die Zerlegung des Vektors \vec{B} möglich — es gibt sogar mehrere Möglichkeiten für die Zerlegung. Der Vektor \vec{A} hingegen kann nicht dargestellt werden! \vec{e}_1 und \vec{e}_2 liegen auf einer Geraden — sie sind kollinear — und mit einer Addition dieser Vektoren ist es nicht möglich, von dieser Geraden wegzukommen. In Abb. 5.3 c) hingegen ist nur der Vektor \vec{e}_2 gegeben. Er reicht nicht um die Ebene abzudecken und um den Vektor \vec{A} als Linearkombination darzustellen.

Mit den Fachbegriffen ausgedrückt bedeutet dies: Für alle Situationen in Abb. 5.3 gilt, dass wir uns in der Ebene \mathbb{R}^2 bewegen. Sie hat zwei Dimensionen, also brauchen wir mindestens zwei Basisvektoren. Deshalb ist der Vektor in Abb. 5.3 c) keine Basis. In Abb. 5.3 b) sind die Basisvektoren linear abhängig. Deshalb bilden sie keine Basis. Nur in Abb. 5.3 a) handelt es sich um eine Basis: Wir haben zwei Basisvektoren die linear unabhängig sind.

Beispiel 5.29 Basis von \mathbb{R}^3

279728

Welches ist eine Orthogonal-Basis, welches eine Orthonormal-Basis von \mathbb{R}^3 ?

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Lösung:

- a) Orthonormal-Basis, denn die drei Vektoren sind orthogonal zueinander, haben alle die Länge 1 und sind linear unabhängig.
- b) Keine Basis, denn die Vektoren sind linear abhängig.
- c) Die Vektoren sind eine Basis, auch wenn sie einen Winkel vom 60° miteinander einschließen.

- d) Orthonormal-Basis, denn die drei Vektoren sind orthogonal zueinander, haben alle die Länge 1 und sind linear unabhängig.

Beispiel 5.30 Basis von \mathbb{R}^3

133855

Welches ist eine Orthogonal-Basis, welches eine Orthonormal-Basis von \mathbb{R}^3 ?

a) $\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Lösung:

- a) Die Vektoren sind eine Orthogonal-Basis, aber der erste hat eine Länge $\neq 1$.
 b) Die Vektoren bilden eine Orthogonal-Basis.
 c) Die Vektoren bilden zwar eine Basis, sie stehen aber weder senkrecht aufeinander, noch sind sie normiert.

5.5 Geometrische Deutung der Gesetze für das Skalarprodukt

Wir wollen hier darüber nachdenken, ob die Gesetze 5.4 für das Skalarprodukt geometrisch nachvollziehbar sind. Dieser Abschnitt und die drei folgenden sind ein schönes Beispiel für die axiomatische Arbeitsweise der modernen Mathematik. Am Anfang steht eine geschickte Definition 5.1. Daraus werden nacheinander Eigenschaften abgeleitet. Zuerst stellen wir fest, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$$

denn

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi) = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a}.$$

Danach finden wir

$$(\lambda \vec{a}) \odot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b})$$

Um dies zu zeigen müssen wir den folgenden Ausdruck anschauen:

$$(\lambda \vec{a}) \odot \vec{b} = \|\lambda \vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi).$$

Ist $\lambda > 0$ dann wird der Zwischenwinkel bei der Multiplikation mit \vec{a} nicht verändert, also gilt

$$\|\lambda \vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b}).$$

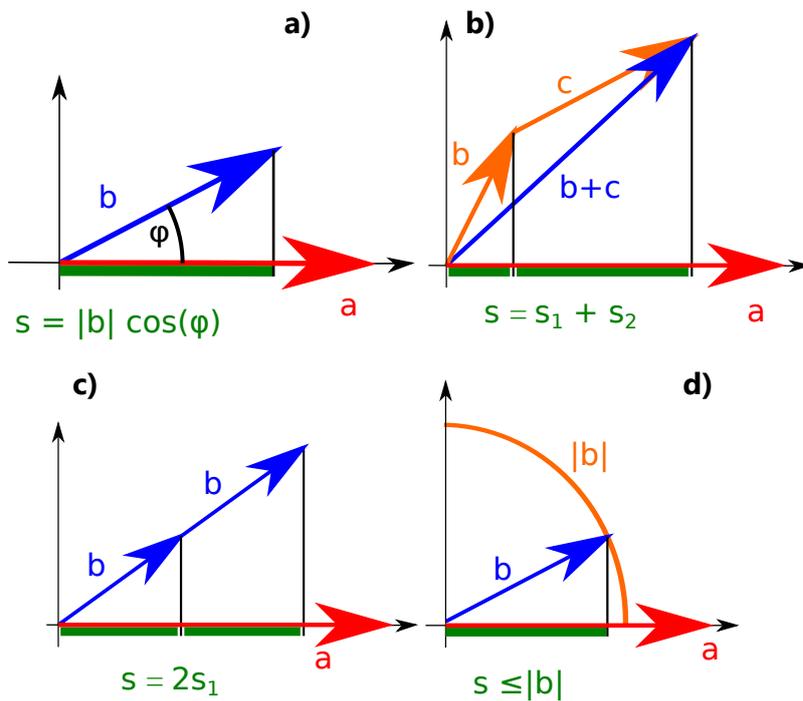


Abbildung 5.4: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Skalarprodukt folgen direkt aus geometrischen Betrachtungen.

Ist $\lambda < 0$ dann wird durch die Multiplikation der Zwischenwinkel verändert: $\varphi \rightarrow \varphi'$, aber es gilt $\cos(\varphi') = -\cos(\varphi)$. Also

$$\|\lambda \vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi) = -\lambda \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot [-\cos(\varphi)] = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b}) .$$

Wir finden also, dass das Skalarprodukt alle (für positive und negative) Faktoren λ assoziativ ist. Der Spezialfall $|a| = 1$ ist nun besonders anschaulich:

5.6 Spezialfall $\|a\| = 1$ *

Gemäss der Definition 5.1 ist hier $\vec{a} \odot \vec{b} = \|b\| \cdot \cos(\varphi)$. Aus der Skizze in Abb. 5.4 a) ist aber ersichtlich, dass $\|b\| \cdot \cos(\varphi)$ genau die Länge des Schattens (grün) von \vec{b} auf \vec{a} ist. Das merken wir uns. Wir wollen nun $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a}$ berechnen, d.h. den Schatten von $(\vec{b} + \vec{c})$ auf \vec{a} . Gemäss Abb. 5.4 b) ist dieser Schatten gleich der Summe der Schatten von \vec{b} und von \vec{c} . Also gilt

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a} . \quad (5.2)$$

Jetzt interessieren wir uns für den Schatten von $r \cdot \vec{b}$ auf \vec{a} , d.h. der Schatten des Vektors \vec{b} , der um den Faktor r gedehnt wurde. Gemäss Abb. 5.4 c) muss dieser Schatten um den selben Faktor gedehnt sein:

$$(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r \cdot (\vec{b} \odot \vec{a}) . \quad (5.3)$$

Wie Abb. 5.4 c) zeigt, müssen wir auch zulassen, dass ein Schatten eine "negative Länge" hat, sollte λ mal negativ ausfallen. Schliesslich stellen wir noch fest, dass

der Schatten (bei einem rechtwinkligen Lichteinfall) nie länger als das reale Objekt sein kann

$$\|\vec{b} \odot \vec{a}\| \leq \|\vec{b}\| . \quad (5.4)$$

5.7 Allgemeiner Fall*

Wir wollen nun die Gleichungen 5.2 bis 5.4 benutzen um Gesetze für den allgemeinen Fall $\|a\| \neq 1$ zu finden. Zuerst stellen wir fest, dass aus der Definition des Skalarprodukts folgt

$$\vec{v} \odot \vec{v} = \|v\| \cdot \|v\| \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=1} = \|v\|^2$$

Dann stellen wir fest, dass jeder Vektor¹ \vec{v} auf die Länge 1 gebracht werden kann, indem wir ihn durch seine Länge dividieren:

$$\vec{v}' = \frac{1}{\|v\|} \vec{v} .$$

Nun ist Eqn. 5.2 nur gültig, wenn \vec{a} die Länge 1 hat. Deshalb müssen wir darin \vec{a} jeweils mit $\frac{\vec{a}}{\|a\|}$ ersetzen:

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \frac{\vec{a}}{\|a\|} = \vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{\|a\|} + \vec{c} \odot \frac{\vec{a}}{\|a\|} . \quad (5.5)$$

Diese Gleichung kann auf beiden Seiten mit $|a|$ multipliziert werden. Wir benutzen die Assoziativität aus Satz 5.4 und die Distributivität der Addition und erhalten

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a}$$

Damit haben wir alle Gesetze aus Satz 5.4 nacheinander bewiesen. Bei jedem Schritt haben wir nur Eigenschaften verwendet, die aus den vorherigen Schritten schon bekannt waren.

5.8 Komponenten-Schreibweise in Orthonormalbasis

Wenn wir \vec{a} und \vec{b} in Komponenten-Schreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} ,$$

angeben, wie berechnen wir dann das Skalarprodukt $\vec{a} \odot \vec{b}$? Die meisten werden wohl antworten

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 ,$$

was zwar richtig ist, solange man mit einer Orthonormalbasis arbeitet. Für jede andere Basis ist diese Antwort aber *falsch*. Z.B. nehmen wir die Basis

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E \right\} .$$

¹Um genau zu sein, jeder Vektor mit Ausnahme von $\vec{0}$

Mit dem Index E drücken wir aus, dass die Vektoren in der Standardbasis $\mathbf{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ gegeben sind. Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Die Basisvektoren geschrieben in dieser Basis sind

$$\vec{f}_1 = 1 \cdot \vec{f}_1 + 0 \cdot \vec{f}_2 + 0 \cdot \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F, \quad \vec{f}_2 = 1 \cdot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_F, \quad \vec{f}_3 = 1 \cdot \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_F$$

Wenn wir hier naiv die Komponentenschreibweise für das Skalarprodukt benutzen, dann erhielten wir

$$\vec{f}_1 \odot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_F = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

Das würde ja bedeuten, dass \vec{f}_1 senkrecht auf \vec{f}_2 steht, aber das ist eben falsch. Die Basisvektoren stehen gerade nicht senkrecht aufeinander.

Wir werden deshalb hier die Berechnung des Skalarprodukts für Vektoren in Komponentenschreibweise einer Orthonormalbasis herleiten. Für andere Basen kann das Skalarprodukt auf gleiche Weise hergeleitet werden.

Beispiel 5.31 Skalarprodukt in \mathbb{R}^2 für die Basisvektoren

195709

Berechnen Sie das Skalarprodukt der Basisvektoren der Orthonormalbasis \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Betrachten Sie dazu den Schatten von \vec{e}_1 auf \vec{e}_2 , von \vec{e}_2 auf \vec{e}_1 , von \vec{e}_1 auf \vec{e}_1 , von \vec{e}_2 auf \vec{e}_2 . **Lösung:**

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \odot \vec{e}_2 &= 0; & \vec{e}_2 \odot \vec{e}_1 &= 0 \\ \vec{e}_1 \odot \vec{e}_1 &= 1; & \vec{e}_2 \odot \vec{e}_2 &= 1 \end{aligned}$$

Beispiel 5.32 Skalarprodukt in \mathbb{R}^2 für beliebige Vektoren

536234

Berechne das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Schreibe dafür die Vektoren als Summe der Basisvektoren der Orthonormalbasis \vec{e}_1, \vec{e}_2 und wende dann die Gesetze für das Skalarprodukt (Satz 5.4) an.

Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \odot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 b_1 \vec{e}_1 \odot \vec{e}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \odot \vec{e}_2 \\ &\quad + a_2 b_1 \vec{e}_2 \odot \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \odot \vec{e}_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

5.9 Skalarprodukt in nicht orthogonaler Basis*

Wir betrachten das Beispiel der Basis

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E \right\}$$

Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Um das Skalarprodukt von zwei allgemeinen Vektoren in dieser Basis zu berechnen, berechnen wir zuerst das Skalarprodukt zwischen den Basisvektoren. Dafür verwenden wir die Schreibweise der Basisvektoren in der Orthonormalbasis

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 \odot \vec{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E \odot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E = 1 & \quad \vec{f}_1 \odot \vec{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E \odot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \frac{1}{2} \\ \vec{f}_1 \odot \vec{f}_3 &= \frac{1}{2} & \quad \vec{f}_2 \odot \vec{f}_2 &= 1 \\ \vec{f}_2 \odot \vec{f}_3 &= \frac{1}{2} & \quad \vec{f}_3 \odot \vec{f}_3 &= 1 \end{aligned}$$

Nun berechnen wir das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_F$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_F$ in dieser Basis und wenden dann die Gesetze für das Skalarprodukt (Satz 5.4) an:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_F &= (a_1 \vec{f}_1 + a_2 \vec{f}_2 + a_3 \vec{f}_3) \odot (b_1 \vec{f}_1 + b_2 \vec{f}_2 + b_3 \vec{f}_3) \\ &= (a_1 \vec{f}_1) \odot (b_1 \vec{f}_1) + (a_1 \vec{f}_1) \odot (b_2 \vec{f}_2) + (a_1 \vec{f}_1) \odot (b_3 \vec{f}_3) \\ &\quad + (a_2 \vec{f}_2) \odot (b_1 \vec{f}_1) + (a_2 \vec{f}_2) \odot (b_2 \vec{f}_2) + (a_2 \vec{f}_2) \odot (b_3 \vec{f}_3) \\ &\quad + (a_3 \vec{f}_3) \odot (b_1 \vec{f}_1) + (a_3 \vec{f}_3) \odot (b_2 \vec{f}_2) + (a_3 \vec{f}_3) \odot (b_3 \vec{f}_3) \\ &= a_1 b_1 + \frac{1}{2} a_1 b_2 + \frac{1}{2} a_1 b_3 + \frac{1}{2} a_2 b_1 + a_2 b_2 + \frac{1}{2} a_2 b_3 + \frac{1}{2} a_3 b_1 + \frac{1}{2} a_3 b_2 + a_3 b_3 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 \end{aligned}$$

Als Kontrolle berechnen wir das Skalarprodukt zwischen den orthogonalen Vektoren $\vec{a} = \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F$ und dem Vektor $\vec{b} = \vec{f}_2 + \vec{f}_3 - \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_F$.

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_F = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$$

Tatsächlich ergibt die Rechnung, dass die Vektoren orthogonal aufeinander stehen.

5.10 Basiswechsel zwischen Orthogonalbasen

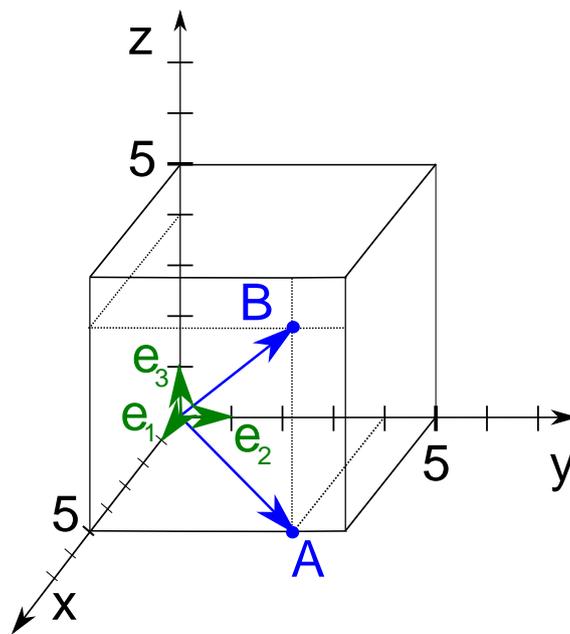
Wir schreiben die Komponenten meist in eine vertikale Liste

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Beachte, dass diese Liste noch kein geometrischer Vektor ist! Um den Vektor \vec{v} zu erhalten müssen die Komponenten mit den Basisvektoren multipliziert und dann addiert werden.

5.10.1 Komponenten in einer Basis

Beispiel 5.33 Drücke \vec{A} und \vec{B} als Linearkombination von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3$ aus 158844



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

Definition Standard-Basis

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ heissen **Standard-Basis** (auch kartesische Basis, kartesisches Koordinatensystem)

Was wir also bis jetzt intuitiv² gemacht haben, ist die Zerlegung von Vektoren in Komponenten entlang der Standardbasis. Diese Komponenten werden dann in Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ untereinander notiert.

²d.h. ohne viel nachzudenken

Lernziele Vektorprodukt

Wenn nicht anders deklariert beziehen sich die Lernziele auf eine rechtshändige Orthogonalbasis.

- Die Studierenden können das Vektorprodukt von Vektoren in \mathbb{R}^3 berechnen.
- Sie wissen, dass das Vektorprodukt antikommutativ, distributiv und assoziativ ist.
- Sie können das Spatprodukt von Vektoren in \mathbb{R}^3 berechnen.
- Sie können das Vektorprodukt benutzen um Abstände von Punkten zu einer Geraden in \mathbb{R}^3 zu berechnen.

Beispiel 6.1 Leseauftrag Vektorprodukt

57DXTK

Lesen Sie im Buch “Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1” von Papula den Abschnitt 3.4. zum Vektorprodukt, d.h. die Seiten 90-96). Beantworten Sie dann folgende Fragen.

- a) Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt?
- b) Wie berechnet man das Vektorprodukt in einer rechtshändigen Orthonormalbasis?

Die Online-Ressource zum Buch finden Sie hier

Google: E-Medien FHNW

wähle: E-Books

wähle: Springer

wähle: Technik-Informatik

suche: Papula

wähle: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1

Lösung:

- a) Eigenschaften des Vektorprodukts: Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird. Es gelten die Eigenschaften in Satz 6.1.
- b) Die Berechnung des Vektorprodukts ist in Infobox 6.1 angegeben.

6.1 Berechnung Vektorprodukt

Definition Vektorprodukt

Für \vec{a} und \vec{b} in \mathbb{R}^3 , die den Winkel φ einschliessen, ist das **Vektorprodukt** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, mit den Eigenschaften:

- $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$
- \vec{c} ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b}
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

[Papula, 2009, Bd. 1 II 3.4], [Goebbels and Ritter, 2011, p.401]

Wir merken uns auch: Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird.

Infobox Praktische Berechnung des Vektorprodukts

Das Vektorprodukt von zwei Vektoren kann wie folgt berechnet werden:

- Wir schreiben die Produktvektoren auf
- Wir schreiben die ersten beiden Komponenten unten an die Vektoren hin. Wir streichen die erste Zeile.
- Wir füllen jede Zeile im Resultat, indem wir Kreuze berechnen, z.B. $a_2b_3 - a_3b_2$ für die erste Komponente. Für jede neue Komponente im Resultat rücken wir eine Zeile nach unten in den Produktvektoren.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.2 Vektorprodukt

306988

Berechne das Vektorprodukt von \vec{a} und \vec{b} .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

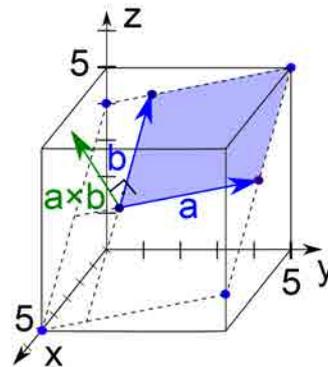
Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.3 Berechne die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch \vec{a} und \vec{b}

519844

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Wir berechnen zuerst das Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ -25 \\ 8 \end{pmatrix} =: \vec{c}$$

Danach benutzen wir, dass der Betrag des Vektorprodukts gleich der Fläche des aufgespannten Parallelogramms ist:

$$\|\vec{c}\| = 33$$

Infobox "Vektorprodukt" für $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

In \mathbb{R}^2 lässt sich ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ steht schnell finden:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6.4 Vektorprodukt in Orthonormalbasis

BT8J1D

Berechnen Sie die Vektorprodukte

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{g} \times \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{k} \times \vec{l} = (1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_3) \times (2 \cdot \vec{e}_3)$

f) $\vec{p} \times \vec{q} = (8 \cdot \vec{e}_1 + 9 \cdot \vec{e}_2 + 4 \cdot \vec{e}_3) \times (2 \cdot \vec{e}_2)$

c) $\vec{e} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -18 \end{pmatrix}$

d) $\vec{g} \times \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

e) $\vec{k} \times \vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $\vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

Beispiel 6.5 Fläche und Vektorprodukt

68EML3

Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = 19\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$$\text{e) } \vec{a} = 10\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 + 19\vec{e}_3, \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- a) Wir überlegen, dass die Fläche den Betrag $F = |a| \cdot \underbrace{|b| \cdot \sin(\alpha)}_{=h}$ hat. Diesen Betrag können wir auf folgende Weise berechnen: Wir berechnen zuerst den Normalenvektor

$$\vec{n}' = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

Seine Länge (Norm) entspricht der Fläche des Parallelogramms:

$$F = |\vec{n}'| = 29$$

- b) Wir berechnen zuerst den Normalenvektor

$$\vec{n}' = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 \\ -170 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seine Länge (Norm) entspricht der Fläche des Parallelogramms:

$$|\vec{n}'| = 34\sqrt{29} \approx 183.096$$

- c) Wir berechnen zuerst den Normalenvektor

$$\vec{n}' = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 90 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Seine Länge (Norm) entspricht der Fläche des Parallelogramms:

$$|\vec{n}'| = 2\sqrt{2701} \approx 103.942$$

d) Normalenvektor

$$\vec{n}' = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ -73 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

$$|\vec{n}'| = \sqrt{9899} \approx 99.4937$$

e) Normalenvektor

$$\vec{n}' = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 19 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 159 \\ -80 \end{pmatrix}.$$

$$|\vec{n}'| = \sqrt{31730} \approx 178.129$$

Beispiel 6.6 Fläche Dreieck

62FVCH

Berechne die Fläche des Dreiecks mit den Ecken \vec{A} , \vec{B} und \vec{C} .

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 25 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 36 \end{pmatrix}$

b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Die Fläche des Dreiecks ist die Hälfte der Fläche des Parallelogramms. Wir berechnen zunächst Vektoren, die zwei Kanten beschreiben

$$\vec{c} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dann berechnen wir den Normalenvektor

$$\vec{n}' = \vec{c} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Länge berechnen wir die Fläche des Dreiecks

$$F = \frac{\|\vec{n}'\|}{2} = 12$$

b)

$$\vec{c} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \vec{c} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$F = \frac{\|\vec{n}'\|}{2} = 200$$

c)

$$\vec{c} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \vec{c} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 338 \\ -76 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$F = \frac{\|\vec{n}'\|}{2} = \sqrt{30041} \approx 173.323$$

d)

$$\vec{c} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \vec{c} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 84 \\ -124 \\ -34 \end{pmatrix}.$$

$$F = \frac{\|\vec{n}'\|}{2} = \sqrt{5897} \approx 76.7919$$

Satz Gesetze für das Vektorprodukt

i) Betrag des Vektorprodukts: Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.

ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,

Distributiv-Gesetz

iii) $\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$,

Assoziativ-Gesetz

iv) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,

Anti-Kommutativ-Gesetz

v) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

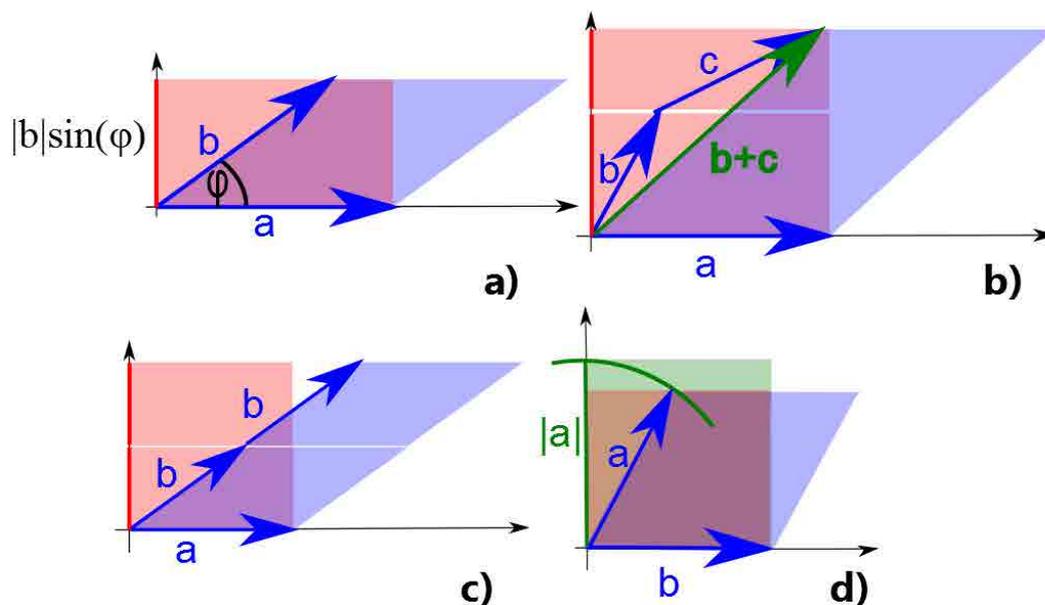


Abbildung 6.1: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Vektorprodukt folgen direkt aus geometrischen betrachtungen.

6.2 Herleitungen

Auch hier gehen wir axiomatisch vor, genau so wie wir es bereits beim Skalarprodukt getan haben. Welche allgemeinen Gesetze gelten für das Vektorprodukt? Gilt das Assoziativ-Gesetz, gilt das Kommutativgesetz? Wir definieren dafür zuerst, welche Eigenschaften wir für das Vektorprodukt wünschen. Erst später kümmern wir uns darum, wie man das Vektorprodukt in einer gegebenen Basis berechnet.

Wie Abb.6.1 a) zeigt, ist der Betrag des Vektorprodukts gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird. Mit $\|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$ wird die Komponente (rot) von \vec{b} berechnet, die senkrecht auf \vec{a} steht. Wie Abb.6.1 b) zeigt, kann die Fläche des grossen blauen Parallelogramms auf zwei Arten berechnet werden: entweder direkt als $\|\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})\|$ oder als Summe der kleinen roten Rechtecke, die sich zu $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ und $\|\vec{a} \times \vec{c}\|$ berechnen. Also muss gelten

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Abb.6.1 c) zeigt, dass eine Streckung um den Faktor Zwei, auch zur Verdoppelung des blauen Parallelogramms — d.h. des Skalarprodukts — führt. Dies muss für alle Streckungsfaktoren gelten also folgt

$$\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) .$$

Schliesslich zeigt Abb.6.1 d), dass die Fläche des blauen Parallelogramms meistens kleiner — höchstens aber gleich gross — ist, als die des Rechtecks mit dem Seitenlängen $\|\vec{a}\|$ und $\|\vec{b}\|$. Deshalb gilt für das Vektorprodukt

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| .$$

Das letzte Gesetz in 6.1 lässt sich nachvollziehen, indem Sie zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} festlegen, z.B. \vec{a} nach rechts und \vec{b} nach vorne. Dann zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ mit der Rechten-Hand-Regel nach oben und $\vec{b} \times \vec{a}$ nach unten.

6.3 Das Vektorprodukt in einer rechtshändigen Orthonormalbasis

Beispiel 6.7 Vektorprodukt für Basisvektoren

745623

Berechne das Vektorprodukt zwischen *allen* Basisvektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis. Benutze dazu nur die Definition 6.1 des Vektorprodukts.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = ? \dots$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = ? \dots$$

Lösung:

- $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0$ ($i \in \{1, 2, 3\}$, gilt für alle Basisvektoren)
- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$
- $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$
- $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

Beispiel 6.8 Vektorprodukt für allgemeine Vektoren

936044

Berechne das Vektorprodukt zwischen zwei allgemeinen Vektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis. Benutze dafür auch die Sätze 6.1. Drücke dazu

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Basisvektoren aus:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

Berechne dann das Vektorprodukt für die allgemeinen Vektoren \vec{a} und \vec{b}
Übrigens gilt auch $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\
&= a_1 \cdot b_1\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + a_1 \cdot b_2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1 \cdot b_3\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\
&\quad + a_2 \cdot b_1\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + a_2 \cdot b_2\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + a_2 \cdot b_3\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\
&\quad + a_3 \cdot b_1\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_3 \cdot b_2\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + a_3 \cdot b_3\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \\
&= a_1b_2\vec{e}_3 - a_1b_3\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3 + a_2b_3\vec{e}_1 + a_3b_1\vec{e}_2 - a_3b_2\vec{e}_1 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Achtung, dieser Ausdruck gilt nur in einem orthonormalen, rechtshändigen Koordinatensystem! Für andere Koordinatensysteme ergeben sich — wie beim Skalarprodukt — andere Ausdrücke für das Vektorprodukt.

Der Ausdruck, der am Ende in Beispiel 6.1 entsteht lässt sich nur schwer merken. Die Infobox 6.1 zeigt ein Verfahren, wie der Ausdruck von Beispiel 6.1 ohne Auswendiglernen sondern mit einem einfachen Verfahren hingeschrieben werden kann.

Beispiel 6.9 Rechenregeln Vektorprodukt

020196

Berechne für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die Teilresultate der ersten Teilaufgaben für die Berechnung der letzteren.

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

d) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

f) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c})$

b) $\vec{a} \times \vec{c}$

c) $\vec{b} \times \vec{c}$

e) $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c})$

g) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Lösung:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

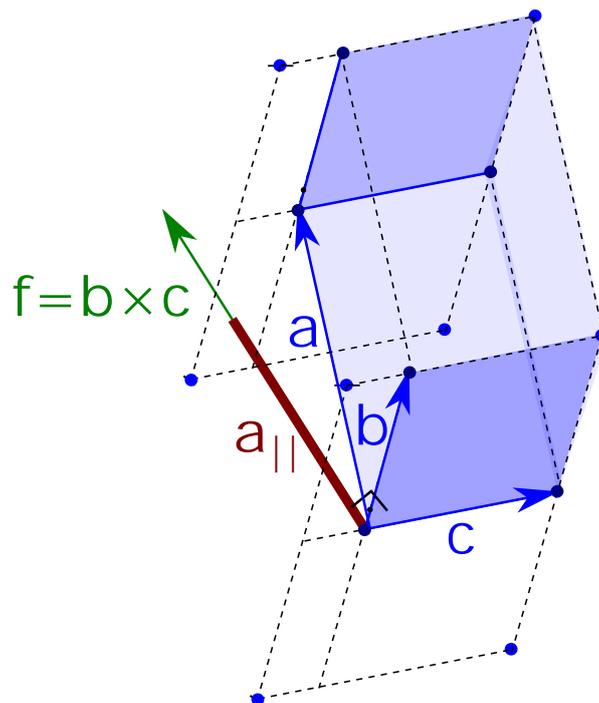
$$\text{d) } \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

6.4 Spatprodukt



Beispiel 6.10 Spatprodukt Herleitung

2WOFDK

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\vec{f} = \vec{b} \times \vec{c}$. Schreiben Sie dann $\vec{f} = F \cdot \vec{f}'$, wobei $\|\vec{f}'\| = 1$.

b) Markieren Sie in der Skizze oben F und die Richtung von \vec{f} .

- c) Berechnen Sie nun $\vec{a} \odot \vec{f}'$. Was bedeutet das Resultat und wo markieren Sie es in der Skizze?
- d) Berechnen Sie $F \cdot \vec{a} \odot \vec{f}' = \vec{a} \odot (\vec{b} \times \vec{c})$. Was bedeutet das Resultat und wo markieren Sie es in der Skizze?
- e) Bestimmen Sie jetzt allgemein, d.h. ohne die Komponenten festzulegen, für die Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} : Was bedeutet $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$?

Lösung:

a) $\vec{f} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{f} = \underbrace{9}_{=F} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/9 \\ 4/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}}_{=\vec{f}'}$$

- b) F kann man markieren als die Fläche aufgespannt durch \vec{b} und \vec{c} . \vec{f} steht senkrecht auf dieser Fläche.
- c) $\vec{a} \cdot \vec{f}' = 2$. Dies bedeutet, dass die Figur die Höhe 2 hat. Argument: \vec{f}' ist normiert, also ist $\vec{a} \cdot \vec{f}'$ der Schatten von \vec{a} auf \vec{f}' . Ausserdem steht \vec{f}' senkrecht auf der Grundfläche. Deshalb berechnen wir hier die Höhe der Figur.
- d) $F \cdot \vec{a} \odot \vec{f}' = \vec{a} \odot (\vec{b} \times \vec{c}) = 18$. Der erste Ausdruck zeigt, dass wir hier 'Grundfläche' mal 'Höhe' = 'Volumen' berechnen.
- e) Allgemeine Argumentation: Im Folgenden betrachten wir drei Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} und den Ausdruck

$$F \cdot (\vec{a} \odot \vec{f}') = \vec{a} \odot (F \cdot \vec{f}') = \vec{a} \odot \vec{f} = \vec{a} \odot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Wir schreiben $\vec{f} = F \cdot \vec{f}'$, wobei $\|\vec{f}'\| = 1$. Dann stellen wir fest, dass das Vektorprodukt $\vec{f} = \vec{b} \times \vec{c}$ senkrecht auf dem Parallelogramm aufgespannt durch \vec{b} und \vec{c} steht und dass $F = \|\vec{f}\|$ gleich der Fläche des Parallelogramm aufgespannt durch \vec{b} und \vec{c} ist. Durch das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{f}'$$

wird der Schatten a_{\parallel} von \vec{a} auf \vec{f}' berechnet. Dies ist genau die Höhe des Körpers aufgespannt durch \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} . Zusammengefasst schreiben wir für den Ausdruck Grundfläche \cdot Höhe = Volumen:

$$F \cdot (\vec{a} \odot \vec{f}') = \vec{a} \odot (F \cdot \vec{f}') = \vec{a} \odot \vec{f} = \vec{a} \odot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Definition Spatprodukt

Das Parallelepiped aufgespannt durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} nennen wir **Spat**. Für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ heisst die Zahl

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a} \odot (\vec{b} \times \vec{c})$$

das **Spatprodukt**.

Der Betrag des Spatprodukts ist gleich dem Volumen des Spats.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.403] [Papula, 2009, Bd. 1 II 3.5]

Satz Gesetze für das Spatprodukt

- Paarweise Vertauschung :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$$

- Zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

Wir merken uns also: Das Volumen des Spats ist unabhängig von der Reihenfolge in der $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufzählet werden. Nur das Vorzeichen kann eventuell ändern, wenn die Reihenfolge vertauscht wird.

Beispiel 6.11 Berechne das Volumen des Spats aufgespannt durch \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} 340107

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zuerst berechnen wir das Vektorprodukt

$$\vec{f} := \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dann berechnen wir das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{f} = -7$$

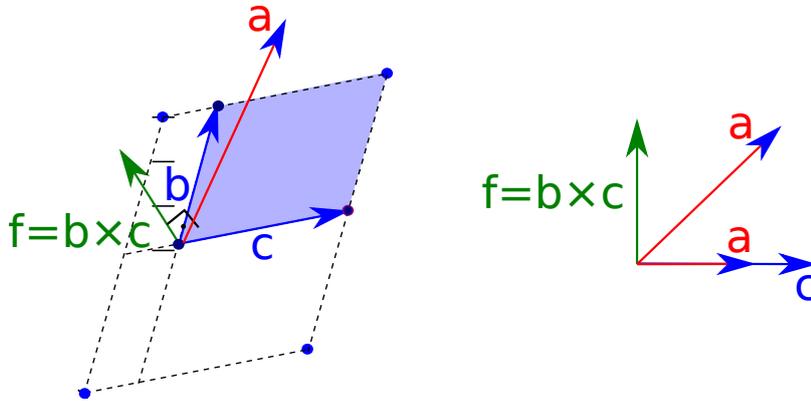
Also ist das Volumen $|\vec{a} \odot \vec{f}| = V = 7$.

Beispiel 6.12 Bestimme, ob die Vektoren linear abhängig sind

451218

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Benutze dazu das Spatprodukt.



Lösung:

Liegen die drei Vektoren in einer Ebene, sind sie linear abhängig. Andererseits ist das Volumen des aufgespannten Spates gleich Null.

Daraus folgt, dass man das Vektorprodukt wie folgt benutzen kann um die lineare Abhängigkeit zu überprüfen. Zuerst berechnen wir das Vektorprodukt

$$\vec{f} := \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dann berechnen wir das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{f} = 0$$

Also ist das Volumen $V = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ und die Vektoren sind linear abhängig.

Beispiel 6.13 Spatprodukt

5AHNL8

Berechne das Volumen des Parallelepipeds aufgespannt durch die Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} . Gibt jeweils an, ob die Vektoren linear abhängig sind.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Wir benutzen das Spatprodukt

$$a = \vec{u} \odot \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = -24.$$

Das Volumen ist $V = |a| = 24$. Die Vektoren sind linear unabhängig.

b) $a = \vec{u} \odot \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = -40$. Das Volumen ist $V = |a| = 40$. Die Vektoren sind linear unabhängig.

c) $a = \vec{u} \odot \vec{v} \times \vec{w} = 0$. Das Volumen ist $V = 0$. Die Vektoren sind linear *abhängig*.

d) $a = \vec{u} \odot \vec{v} \times \vec{w} = -1014$. Das Volumen ist $V = \|a\| = 1014$. Die Vektoren sind linear unabhängig.

6.5 Abstand Punkt-Gerade

Satz Abstand Punkt Gerade

Der Abstand eines Punktes \vec{B} von der Geraden $g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ ist $h = \frac{\|\vec{u} \times (\vec{B} - \vec{A})\|}{\|\vec{u}\|}$

[Papula, 2009, Bd. 1 II 4.1.3]

Beispiel 6.14 Abstand Punkt-Gerade

DK2JYA

Wir betrachten die Gerade $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v}$ und den Punkt \vec{B} ($\vec{A}, \vec{B}, \vec{X} \in \mathbb{R}^3; \lambda \in \mathbb{R}$). Wie gross ist ihr Abstand? Berechnen Sie dazu zuerst die Fläche aufgespannt durch $\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$ und \vec{v} .

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Fläche aufgespannt durch $\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$ und \vec{v} .

$$\vec{n}' = \vec{v} \times (\vec{B} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Also $F = \|\vec{n}'\| = 20$. Danach fällt uns auf, dass sich die Fläche des Parallelogramms auch ausdrücken lässt durch die Höhe im Parallelogramm h

$$F = h \cdot \|\vec{v}\|$$

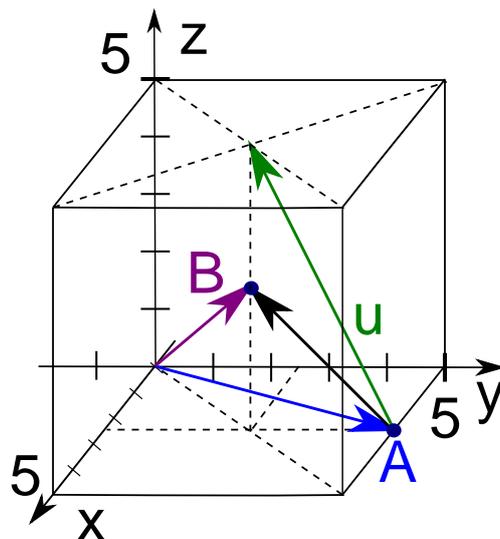
Die Höhe ist auch gleichzeitig der Abstand der Geraden zum Punkt. Also lösen wir auf nach h

$$h = \frac{F}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{v} \times (\vec{B} - \vec{A})\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{20}{2} = 10$$

Beispiel 6.15 Abstand Punkt-Gerade im Raum

292982

Wie gross ist der Abstand zum Raum-Mittelpunkt des Würfels $5 \times 5 \times 5$?



Lösung:

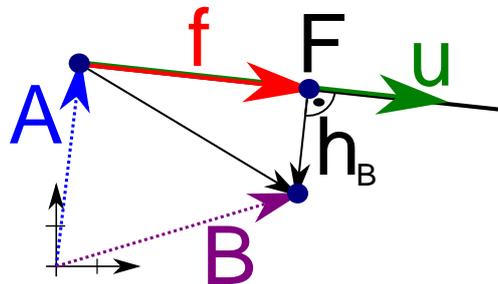
Vektoren auslesen: $\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ Vektoren einsetzen:

$$(\vec{B} - \vec{A}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times (\vec{B} - \vec{A}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h = \frac{25 \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{125}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.12$$

Achtung, der Satz ist eine Eigenheit von \mathbb{R}^3 . Er basiert darauf, dass in \mathbb{R}^3 das Vektorprodukt existiert. In \mathbb{R}^N mit $N > 3$ gibt es keine Vektorprodukt. Deshalb muss dort der Abstand zwischen dem Punkt \vec{B} und der Geraden $g: \vec{A} + \lambda \vec{u}$ über den Fusspunkt $\vec{F} = \vec{A} + \vec{f}$ und das Lot $\vec{h}_B = \vec{B} - \vec{F}$ berechnet werden.



Zerlege dazu $\vec{B} - \vec{A}$ in eine Komponente \vec{f} parallel (\parallel) und in eine Komponente \vec{h}_B senkrecht (\perp) zu \vec{u} . Zur Kontrolle kann die Länge des Verbindungsvektors von Fusspunkt zu \vec{B} . Sie sollte gleich lang sein, wie der Abstand, der in der vorherigen Aufgabe berechnet wurde. **Lösung:**

Um den Verbindungsvektor vom Aufpunkt \vec{A} zum Fusspunkt zu berechnen projizieren^a wir den Verbindungsvektor $\vec{B} - \vec{A}$ auf \vec{u} :

$$\vec{f} = [(\vec{B} - \vec{A}) \odot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}] \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Fusspunkt befindet sich also bei

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{f} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Das Lot ist

$$\vec{h}_B = \vec{B} - \vec{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und die Länge davon

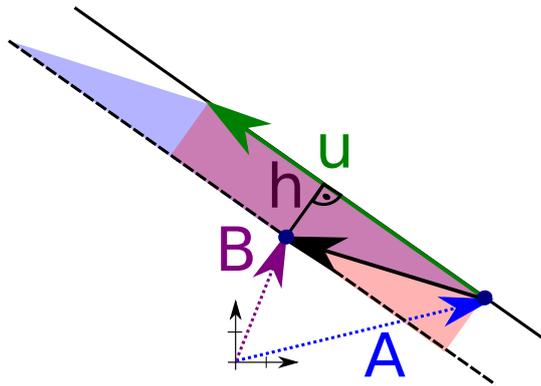
$$\|\vec{h}_B\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat aus der vorherigen Aufgabe.

^awir berechnen die Länge des Schattens

6.6 Wieso funktioniert das? (Herleitung)

Berechne den Abstand eines Punktes \vec{B} zur Gerade gegeben durch $g : \vec{A} + \lambda\vec{u}$.



Drücke dazu die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch \vec{u} und $\vec{B} - \vec{A}$ einmal mit Hilfe des Vektorprodukts aus und einmal mit Hilfe des Abstands aus
Lösung:

- $F = \|\vec{u} \times (\vec{B} - \vec{A})\|$

- $F = \|\vec{u}\| \cdot h$

$$h = \frac{\|\vec{u} \times (\vec{B} - \vec{A})\|}{\|\vec{u}\|}$$

Beispiel 6.18 Abstand Punkt-Gerade

CJ1IXZ

Wir betrachten die Gerade $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v}$ und den Punkt \vec{B} ($\vec{A}, \vec{B}, \vec{X} \in \mathbb{R}^3; \lambda \in \mathbb{R}$). Wie gross ist ihr Abstand? Berechnen Sie dazu zuerst die Fläche aufgespannt durch $\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$ und \vec{v} .

a) $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\text{a) } \vec{r} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -15 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{v} \times \vec{r}\| \approx 23.34$$

$$h \approx \frac{23.34}{17} \approx 1.37325 \quad (\text{genau: } = \frac{\sqrt{545}}{17})$$

b)

$$h = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -140 \\ -48 \\ -60 \end{pmatrix} \right\|}{37} = \frac{4\sqrt{1594}}{37} \approx 4.31621$$

c)

$$h = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -6 \\ -32 \\ 20 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{365}}{\sqrt{65}} \approx 4.73936$$

7.1 Abstand Punkt Ebene	135
7.2 Hesse-Normalenform	150
7.3 Wie kann man eine Ebene in \mathbb{R}^3 darstellen?	155
7.4 Wie man die Darstellungen der Ebene ineinander überführt	159
7.5 Wie kann man die Koeffizienten der Koordinatenform interpretieren? .	166
7.6 Übungen	169

7.1 Abstand Punkt Ebene

Durch einen festen Punkt (den Aufpunkt) und eine gegebene Richtung (den Richtungsvektor) erhält man eine Gerade. Nimmt man einen zweiten Richtungsvektor hinzu, dann entsteht eine Ebene.

Definition Parameterdarstellung einer Ebene in \mathbb{R}^3

Die Parameterdarstellung einer Ebene in \mathbb{R}^3 ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v}$$

- $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ heisst **Aufpunkt** (oder Stützpunkt)
- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ heissen **Richtungsvektoren**
- $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ sind freie Parameter

Die Richtungsvektoren müssen nicht unbedingt senkrecht aufeinander stehen. Sie dürfen aber *nicht kollinear* sein.

Beispiel 7.1 Parameterdarstellung der Ebene

898246

Die Ebene E geht durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimme Parameterdarstellung der Ebene.
b) Welche Freiheiten haben wir bei dieser Darstellung?

Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \vec{A} + \lambda (\vec{B} - \vec{A}) + \nu (\vec{C} - \vec{A}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}} + \nu \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}} \end{aligned}$$

mit $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$.**Freiheiten bei der Wahl:** Wir können \vec{A} , \vec{B} oder \vec{C} als Aufpunkt wählen. Wir können Richtungsvektoren strecken oder durch eine Linearkombination von \vec{u} und \vec{v} ersetzen.**Beispiel 7.2 Parameterdarstellung Ebene**

787135

Die Ebene E geht durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Parameterdarstellung der Ebene. **Lösung:**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \vec{A} + \lambda (\vec{B} - \vec{A}) + \nu (\vec{C} - \vec{A}) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 7.3 Liegen die Punkte in der Ebene E ?

642893

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -22 \\ 28 \\ -22 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Schneller Weg zur Lösung: Wir berechnen die Spatprodukte $[\vec{Q} - \vec{A}, \vec{u}, \vec{v}]$ usw. (\vec{u}, \vec{v} sind Richtungsvektoren der Ebene). Ist das Volumen des Spates 0, liegen der Punkt \vec{Q} in der Ebene.

Optimierung: $\vec{u} \times \vec{v}$ einmal berechnen und für alle 3 Punkte benutzen.

Alternativ: Um zu beurteilen, ob \vec{Q} in der Ebene liegt berechnen wir den Verbindungsvektor vom Aufpunkt zu \vec{Q} :

$$\vec{q} = \vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -24 \\ 28 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Gelingt es nun \vec{q} als Summe der beiden Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} darzustellen, liegt \vec{Q} in der Ebene:

$$\begin{pmatrix} -24 \\ 28 \\ -24 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aus der zwei ersten Komponenten berechnen wir λ und ν :

$$\begin{aligned} L_1: \quad -24 &= 2\lambda + 6\nu \\ L_2: \quad 28 &= -4\lambda - 8\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 + 2L_1: \quad -20 &= 4\nu \\ &\Rightarrow \nu = -5 \Rightarrow \lambda = 3. \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in die dritte Komponente ein, ergibt sich eine wahre Aussage:

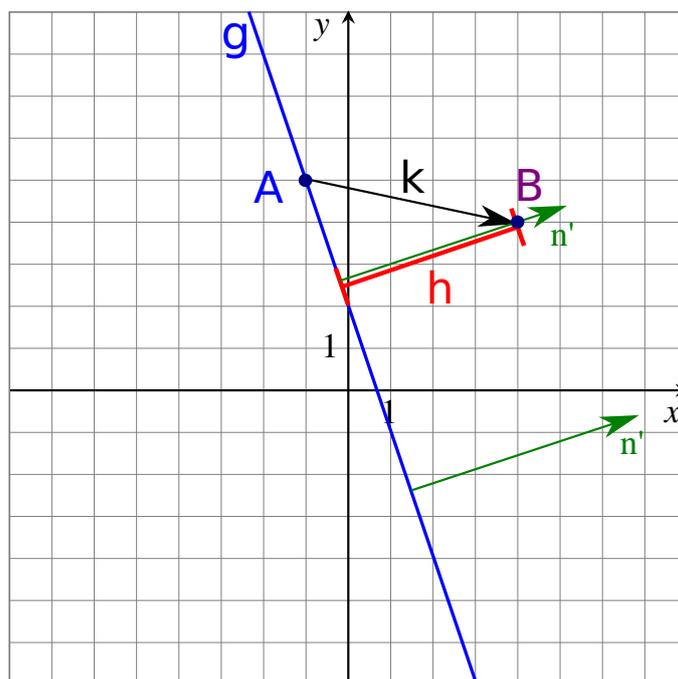
$$-24 = 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-5)$$

Der Verbindungsvektor \vec{q} lässt sich also zerlegen in eine Komponente entlang \vec{u} und eine entlang \vec{v} . Deshalb liegt \vec{Q} in der Ebene.

Für \vec{R} ergibt sich beim Einsetzen in die dritte Komponente ein Widerspruch. Deshalb liegt \vec{R} nicht in der Ebene dafür aber der Punkt \vec{S} mit $\lambda = 5; \nu = -3$.

Beispiel 7.4 Abstand Punkt Gerade in \mathbb{R}^2

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes \vec{B} von der Geraden g



Lösung:

Wir lesen die Punkte und den Richtungsvektor aus.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Daraus bestimmen wir den Verbindungsvektor Gerade-Punkt und den Normalenvektor

$$\vec{k} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Abstand ist nun die Projektion von \vec{k} auf \vec{n}'

$$h = \vec{k} \odot \vec{n}' \cdot \frac{1}{\|\vec{n}'\|} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

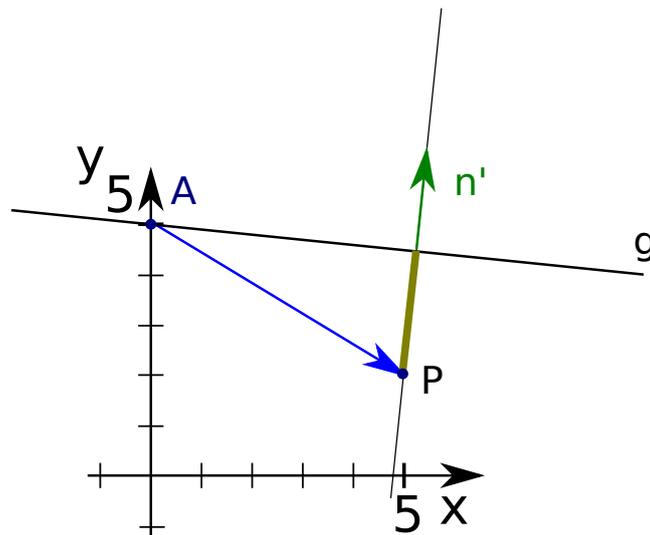
Beispiel 7.5 Abstand Punkt Gerade in \mathbb{R}^2

ZIZIX3

Die Gerade g lautet $y = -0.1 \cdot x + 5$. Wir wollen den Abstand zu Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ berechnen (ohne Vektorprodukt). Gehen Sie dafür wie folgt vor:

- Machen Sie eine Skizze der Situation in der x-y-Ebene.
- Geben Sie die Gerade in Parameterform an.
- Berechnen Sie einen Vektor \vec{n}' , der senkrecht zu g steht. Zeichnen Sie diesen Vektor ein.

- d) Berechnen Sie einen Vektor \vec{w} , der \vec{P} mit der Geraden verbindet. Zeichnen Sie diesen Vektor ein.
- e) Berechnen Sie die Länge des Schattens von \vec{w} auf \vec{n}' .
- f) Wie kann man nun den Abstand von \vec{P} zu g berechnen?.



Lösung:

a) Skizze

b) Parameterform $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Normalenvektor: $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\vec{w} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) Schatten:

$$h = \frac{\vec{w} \odot \vec{n}'}{\|\vec{n}'\|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}}{\sqrt{101}} \approx -2.49$$

f) Der Abstand ist $|h| = 2.49$

Beispiel 7.6 Abstand Punkt Gerade in \mathbb{R}^2

UE9YTP

Berechnen Sie den Abstand der folgenden Geraden vom angegebenen Punkt.

a) $g: y = 0.1 \cdot x + 3$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) i verläuft durch die Punkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist der Abstand zu $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $k: 2x - y = 24$ und $\vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Der Abstand $|h|$ kann berechnet werden aus

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}'}{\|\vec{n}'\|}$$

a) Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abstand

$$h\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \vec{A}\right) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-10)^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{101}} \approx 1.49$$

b) $h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Abstand:

$$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\|\vec{n}'\|} = \frac{5}{\sqrt{13}} \approx 1.39$$

c) Richtungsvektor

$$\vec{v} = \vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Abstand

$$h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}}{\|\vec{n}'\|} = \frac{-17}{\sqrt{146}} \approx -1.41$$

Abstand $|h| = 1.41$

d) Direkter Weg über Hesse-Normalenform. Auflösen nach 0: $2x - y - 24 = 0$

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{2x - y - 24}{\|\vec{n}'\|} = \frac{2x - y - 24}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2x - y - 24}{\sqrt{5}}$$

Abstand:

$$h\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{2 \cdot 5 - 2 - 24}{\sqrt{5}} \approx -7.16$$

also ist der Abstand $|h| = 7.16$.

Beispiel 7.7 Gerade in Parameterdarstellung in \mathbb{R}^2

1PGCCB

Geben Sie die Parameterform der Geraden an.

Berechnen Sie den Abstand zu einem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Ebene.

Lesen Sie dann den Normalenvektor und den Abstand zum Ursprung aus.

a) f: $y(x) = 4 - 2 \cdot x$

d) i: $y(x) = \frac{3x+8}{2}$

b) g: $y(x) = -8 + x$

e) j: $2x - y = 14$

c) h: $y(x) = \frac{9-x}{3}$

f) k: $2x = 26$

Lösung:

a) Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit dem Normalenvektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Abstand

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{-y + 4 - 2 \cdot x}{\sqrt{5}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1.789$

Es ist wichtig, dass in der Hesseschen Normalenform $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ der Normalenvektor auf dem Bruchstrich und unter dem Bruchstrich identisch sind (oder zumindest die selbe Länge haben). Hier haben wir im Zähler $\vec{n}'' = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit der Länge $|\vec{n}''| = \sqrt{5}$

b) Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Normalenvektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Abstand

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{-y - 8 + x}{\sqrt{2}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}} \approx 5.65685$

c) h: $y(x) = 3 - \frac{x}{3}$ Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9/4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Abstand: Wir lösen nach 0 auf: $-y + 3 - \frac{x}{3} = 0$ oder $-3y + 9 - x = 0$ und lesen den Normalenvektor aus

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{-3y + 9 - x}{\sqrt{10}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{9}{\sqrt{10}} \approx 2.85$

d) i: $y(x) = 4 + \frac{3}{2} \cdot x$ Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Abstand: Wir lösen nach 0 auf: $-y + 4 + \frac{3}{2} \cdot x = 0$ oder $-2y + 8 + 3 \cdot x = 0$ und lesen den Normalenvektor aus

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{-2y + 8 + 3 \cdot x}{\sqrt{13}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{8}{\sqrt{13}} \approx 2.22$

e) j: $y = -14 + 2x$ Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abstand: Wir lösen nach 0 auf: $-y - 14 + 2x = 0$ und lesen den Normalenvektor aus

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{-y - 14 + 2x}{\sqrt{5}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{14}{\sqrt{5}} \approx 6.26$

f) k: $2x = 26$ Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abstand: Wir lösen nach 0 auf: $26 - 2x = 0$ und lesen den Normalenvektor aus

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{26 - 2x}{2} = 13 - x$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 13$

Beispiel 7.8 Gerade in Koordinatenform in \mathbb{R}^2

UPMT9H

Geben Sie die Koordinatenform der Geraden an. Berechnen Sie den Abstand zu einem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Ebene.

Lesen Sie dann den Normalenvektor und den Abstand zum Ursprung aus. Berechnen Sie schliesslich den Abstand zum Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) f: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 59 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) i: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) j: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

c) h: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3.22 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 11 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Wir lesen Normalenvektor und Aufpunkt aus

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 59 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Jetzt multiplizieren wir aus und erhalten

$$-4 - 5x + y = 0$$

Der Abstand zu einem allgemeinen Punkt ist

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{-4 - 5x + y}{\sqrt{26}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{-4}{\sqrt{26}}$ also $|h| \approx 0.784465$ und der Abstand zu \vec{P}

$$h(\vec{P}) = \frac{-6}{\sqrt{26}} \text{ also } |h| \approx 1.18 .$$

b) Wir lesen Normalenvektor und Aufpunkt aus

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Jetzt multiplizieren wir aus und erhalten

$$2 - 3x - y = 0$$

Der Abstand zu einem allgemeinen Punkt ist

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{2 - 3x - y}{\sqrt{10}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{2}{\sqrt{10}}$ also $|h| \approx 0.632456$ und der Abstand zu \vec{P}

$$h(\vec{P}) = \frac{-4}{\sqrt{10}} \text{ also } |h| \approx 1.26 .$$

c) Wir lesen Normalenvektor und Aufpunkt aus

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Jetzt multiplizieren wir aus und erhalten

$$-3x - 4y = 0$$

Der Abstand zu einem allgemeinen Punkt ist

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{-3x - 4y}{5}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ und der Abstand zu \vec{P}

$$h(\vec{P}) = \frac{-15}{5} \text{ also } |h| = 3 .$$

d)

$$72 - 2x + 18y = 0$$

Der Abstand zu einem allgemeinen Punkt:

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{72 - 2x + 18y}{2\sqrt{18}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{72}{2\sqrt{18}}$ also $|h| \approx 3.98$ und der Abstand zu \vec{P}

$$h(\vec{P}) = \frac{124}{2\sqrt{18}} \text{ also } |h| \approx 6.85 .$$

e)

$$80 - 10x = 0$$

Der Abstand zu einem allgemeinen Punkt ist

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{80 - 10x}{10} = 8 - x$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 8$ und der Abstand zu \vec{P}

$$h(\vec{P}) = 7$$

f)

$$300 - 11x + 100y = 0$$

Der Abstand zu einem allgemeinen Punkt ist

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{300 - 11x + 100y}{\sqrt{10121}}$$

Abstand zum Ursprung ist $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{300}{\sqrt{10121}}$ also $|h| \approx 2.98$ und der Abstand zu \vec{P}

$$h(\vec{P}) = \frac{589}{\sqrt{10121}} \text{ also } |h| \approx 5.85 .$$

Beispiel 7.9 Abstand Punkt Ebene in \mathbb{R}^3

1R9P4G

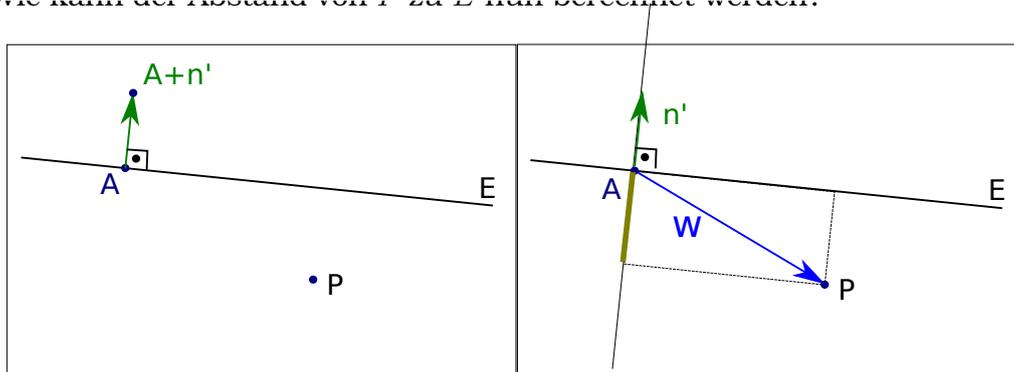
Die Ebene lautet $E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sie wollen ihren Abstand zu Punkt

$\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

- Berechnen Sie einen Vektor \vec{n}' , der senkrecht zu E steht.
- Machen Sie eine Skizze der Situation in der Ebene, in der die folgenden Punk-

te liegen: Aufpunkt \vec{A} von E , \vec{P} , $\vec{A} + \vec{n}'$ und die Ebene E selber.
Zeichnen Sie den Normalenvektor \vec{n}' und die Ebene E ein.

- c) Berechnen Sie einen Vektor \vec{w} , der \vec{P} mit der Ebene verbindet. Zeichnen Sie diesen Vektor in der Skizze ein.
- d) Berechnen Sie die Länge des Schattens von \vec{w} auf \vec{n}' .
- e) Wie kann der Abstand von \vec{P} zu E nun berechnet werden?



Lösung:

a) $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

- b) Skizze oben. Zeichnen in drei Schritten i) die drei Punkte definieren eine Ebene ii) der Normalenvektor \vec{n}' liegt in dieser Ebene und auch der Verbindungsvektor iii) also liegt die Ebene E senkrecht zu dieser und kann durch einen Strich dargestellt werden, der senkrecht zu \vec{n}' steht und durch \vec{A} verläuft.

c) $\vec{w} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

- d) Schatten:

$$h = \vec{w} \odot \frac{\vec{n}'}{\|\vec{n}'\|} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$$

- e) Der Abstand ist $|h| = 6.4$

Beispiel 7.10 Abstand Punkt Ebene

2MZJ54

Berechnen Sie den Abstand zwischen E und \vec{P} ($\mu, \nu \in \mathbb{R}$)

a) $E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) $E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \\ 105 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 117 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 35 \\ 129 \end{pmatrix}$ liegen in E und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt ausserhalb

d) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 56 \\ 13 \\ 135 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 146 \\ 18 \\ 79 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 101 \\ 8 \\ 107 \end{pmatrix}$ liegen in E und $\vec{P} = \begin{pmatrix} -28 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt ausserhalb

Lösung:

a)

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -400 \\ 0 \\ 420 \end{pmatrix}; \quad \vec{w} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Schatten:

$$h = \frac{\vec{w} \odot \vec{n}'}{\|\vec{n}'\|} = \frac{33640}{580} = 58$$

Der Abstand ist $|h| = 58$

b)

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 90 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{w} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -45 \\ -200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schatten:

$$h = \frac{\vec{w} \odot \vec{n}'}{\|\vec{n}'\|} = \frac{-84050}{410} = -205$$

Der Abstand ist $|h| = 205$

c)

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 35 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 70 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -156 \\ 455 \end{pmatrix}; \quad \vec{w} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \\ -105 \end{pmatrix}$$

Schatten:

$$h = \frac{\vec{w} \odot \vec{n}'}{\|\vec{n}'\|} = \frac{-53391}{481} = -111$$

Der Abstand ist $|h| = 111$

d)

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 90 \\ 5 \\ -56 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 45 \\ -5 \\ -28 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -420 \\ 0 \\ -675 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -84 \\ 0 \\ -135 \end{pmatrix}$$

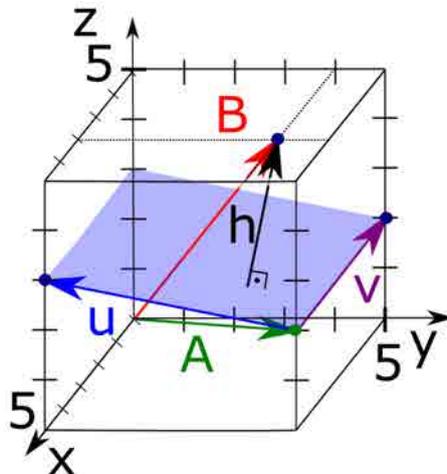
Schatten:

$$h = \frac{\vec{w} \odot \vec{n}'}{\|\vec{n}'\|} = \frac{-126405}{795} = -159$$

Der Abstand ist $|h| = 159$

Beispiel 7.11 Abstand Punkt-Ebene im Raum

026648



Lesen Sie die Punkte \vec{A} und \vec{B} und die Vektoren \vec{u}, \vec{v} aus der Grafik aus. Projizieren Sie dann den Verbindungsvektor $\vec{B} - \vec{A}$ auf den Normalenvektor der Ebene. Berechnen Sie daraus den Abstand von \vec{B} zur Ebene E .

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v}$$

Lösung:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vec{h}_B ist die Projektion von $(\vec{B} - \vec{A})$ auf \vec{n} .

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{n}\| = 2 \cdot \sqrt{26}$$

$$\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h_B = \frac{1}{\|\vec{n}\|} (\vec{B} - \vec{A}) \odot \vec{n} = -7\sqrt{\frac{2}{13}} \approx -2.75$$

Der Abstand ist also 2.75.

Satz Abstand Punkt-Ebene im Raum, Hesse-Normalenform

Der Abstand eines Punktes $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene $E : \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist $|h|$ und berechnet sich aus

$$h(\vec{P}) = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot (\vec{P} - \vec{A}) \odot \vec{n}$$

Dabei benutzen wir den Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

[Papula, 2009, Bd. 1 II 4.2.4]

Wir betrachten die Ebene mit den Aufpunkt $= \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Hesse-Normalenform lautet dann

$$h(\vec{P}) = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot (\vec{P} - \vec{A}) \odot \vec{n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{P} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir das Skalarprodukt aus und schreiben $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dann ergibt sich

$$h(\vec{P}) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Schliesslich erhalten wir

$$h(\vec{P}) = \frac{1}{3} (x + 2y + 2z - 3)$$

Mit diesem Ausdruck kann man zwei Dinge tun:

- Wir können $h(\vec{P})$ benutzen um Abstände von Punkten \vec{P} von der Ebene E zu berechnen.
- Wir können mit $(\vec{P} - \vec{A}) \odot \vec{n} = 0$ implizit alle Punkte in einer Ebene definieren, d.h. alle Vektoren \vec{P} , die $(\vec{P} - \vec{A}) \odot \vec{n} = 0$ erfüllen liegen in der Ebene.

7.2 Hesse-Normalenform

Infobox Hesse-Normalenform: Abstand Punkt-Ebene

- Liegt die Ebene in der Koordinatenform vor $ax + by + cz + d = 0$, so erfolgt die Abstandsmessung über die Hesse-Normalenform in Koordinatenform

$$h(x, y, z) = \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Sie ist besonders ökonomisch, wenn man den Abstand von E zu vielen verschiedenen Punkten berechnen will.

Um beispielsweise die Abstände von der Ebene $12x - 5y - 78 = 0$ zu bestimmen, benutzen wir die Funktion

$$h(x, y, z) = \frac{12x - 5y - 78}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{12x - 5y - 78}{13}$$

Beispiel 7.12 Hesse-Normalenform Koordinatenform

1V9ECJ

Berechnen Sie den Abstand zwischen E und den Punkten \vec{P} und \vec{R} .

a) $E : 15x - 12y + 16z = 184$, $\vec{P} = \begin{pmatrix} -19 \\ 37 \\ 18 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = (-147, 37, 138)$

b) $E : 9x + 12y + 8z = 104$, $\vec{P} = \begin{pmatrix} -83 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} -109 \\ -42 \\ 18 \end{pmatrix}$

c) $E : 12x + 12y - z = 104$, $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 100 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 52 \end{pmatrix}$

d) $E : 2x + 10y - 25z = 146$, $\vec{P} = \begin{pmatrix} 118 \\ -31 \\ 137 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} 118 \\ -83 \\ 262 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $h_P = 25$, $h_R = 25$

b) $h_P = 51$, $h_R = 85$

c) $h_P = 0, h_R = 0$

d) $h_P = 135, h_R = 270$

Beispiel 7.13 Hesse-Normalenform

6ZXEAL

$$E : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

a) Berechnen Sie den Abstand von E zum Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$.

b) Geben Sie den Abstand zum allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene an (Hesse-Normalenform).

c) Multiplizieren Sie im Ausdruck das Skalarprodukt aus.

d) Charakterisieren Sie dann die Ebene durch die Koordinatenform, Normalenvektor und Abstand zum Ursprung.

Lösung:

Der Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ mit } \|\vec{n}'\| = 5$$

Der Abstand ist $|h|$.

a) Abstand zu \vec{P}

$$h\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{5} = 10$$

b) Der Ausdruck berechnet auch den Abstand zum allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{5}$$

c) Ausmultiplizieren:

$$h(x, y, z) = \frac{4x}{5} - \frac{3z}{5} - \frac{26}{5}$$

d) Koordinatenform

$$4x - 3z - 26 = 0$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \|\vec{n}\| = 5$$

Abstand der Ebene zum Ursprung

$$h(0, 0, 0) = -\frac{26}{5} = -5.2$$

Also $|h| = 5.2$.

Beispiel 7.14 Hesse-Normalenform, Abstand Ursprung

854087

$$E : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda, \nu \in \mathbb{R}$$

Wie gross ist der Abstand der Ebene E vom Ursprung? Werte $h(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{A}) \odot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ für $\vec{x} = \vec{0}$ aus. Betrachte die Resultate und formuliere eine Vermutung.

Lösung:

Der Abstand der Ebene vom Ursprung ist $\sqrt{\frac{3}{79}}$. Wir erhalten

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{237}} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \odot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Am Ursprung ausgewertet ergibt dies $-\sqrt{3/79}$. Die Übereinstimmung der beiden Resultate ist kein Zufall. Der Ausdruck

$$\vec{n} \odot (\vec{x} - \vec{A})$$

ist die Projektion des Vektors $(\vec{x} - \vec{A})$ auf den Normalenvektor, d.h. der Abstand zwischen \vec{x} und der Ebene.

Wir stellen fest:

Infobox Rolle der Konstante in der Ebenengleichung

Der Abstand zum Ursprung ist die Konstante der Koordinatenform geteilt durch die Länge des Normalenvektors.

Geben Sie den Abstand zum allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene an (Hesse-Normalenform). Charakterisieren Sie dann die Ebene durch die Koordinatenform, Normalenvektor und Abstand zum Ursprung. Berechnen Sie schliesslich den Abstand zum Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{a) } E : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 65 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{b) } E : \text{Aufpunkt } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Normalenvektor: } \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } E : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{d) } E : \text{Aufpunkt } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Normalenvektor: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Der Abstand ist $|h|$

a) Der Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 65 \end{pmatrix} \text{ mit } \|\vec{n}\| = 97$$

Abstand von Ebene

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 65 \end{pmatrix}}{97}$$

Durch Ausmultiplizieren der Normalenform erhalten wir auf dem Bruchstrich

$$72x + 65z - 230$$

und der Abstand zum Ursprung ist $d = \left| -\frac{230}{97} \right| \approx 2.37$. Und der Abstand zu \vec{P} ist

$$h(\vec{P}) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 65 \end{pmatrix}}{97} \approx 0.381$$

b) Der Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \|\vec{n}\| = 29$$

Abstand von Ebene

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}}{29}$$

Durch Ausmultiplizieren der Normalenform erhalten wir auf dem Bruchstrich

$$-81 + 20x + 21y$$

und der Abstand zum Ursprung ist $d = \frac{81}{21} \approx 2.79$.

$$h(\vec{P}) = \frac{-81 + 20 \cdot 1 + 21 \cdot 0}{29} \approx -2.10 \text{ also } |h| \approx 2.10$$

c) Der Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } \|\vec{n}\| = 3\sqrt{3}$$

Abstand von Ebene

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}{3\sqrt{3}}$$

Durch Ausmultiplizieren der Normalenform erhalten wir auf dem Bruchstrich

$$3 + 3x + 3y + 3z$$

und der Abstand zum Ursprung ist $d = \frac{3}{3\sqrt{3}} \approx 0.577$.

$$h(\vec{P}) = \frac{3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 3}{3\sqrt{3}} = 5/\sqrt{3} \text{ also } |h| \approx 2.88675$$

d) Der Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } \|\vec{n}\| = 3$$

Abstand von Ebene

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}{3}$$

Durch Ausmultiplizieren der Normalenform erhalten wir auf dem Bruchstrich

$$3 + x + 2y - 2z$$

und der Abstand zum Ursprung ist $d = \frac{3}{3} = 1$.

$$h(\vec{P}) = \frac{3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3}{3} = -2/3 \text{ also } |h| \approx 0.667$$

7.3 Wie kann man eine Ebene in \mathbb{R}^3 darstellen?

Definition Normalenform der Ebene im Raum

Ebene E ist definiert durch den Normalenvektor \vec{n} und den Ortsvektor des Aufpunktes \vec{A} . Für den allgemeinen Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene gilt

$$E : (\vec{x} - \vec{A}) \odot \vec{n} = 0$$

Die Normalenform kann man auf zwei Arten verstehen:

- Für einen Vektor \vec{x} in der Ebene gilt, dass $(\vec{x} - \vec{A})$ senkrecht auf \vec{n} steht.
- Liegt ein Punkt \vec{x} in der Ebene, so hat er den Abstand 0 zur Ebene.

Beispiel 7.16 Gleichungen der Ebene im Raum

510881

$$E : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

- Berechne den Normalenvektor der Ebene E . Wie gross ist seine Norm?.
- Bestimme die Normalenform von E .
- Führe dann das Skalarprodukt aus und ordne die Terme (Koordinatenform).

d) Wie gross ist der Abstand von E zu $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix}$

e) Bestimme die Koordinatenform der Ebene F :

$$F : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ und } \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Lösung:

a) Der Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Norm:

$$\|\vec{n}\| = 7$$

b) Normalenform durch Einsetzen von $(\vec{x} - \vec{A})$:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

c) Skalarprodukt ausführen

$$2x + 3y + 6z = 75$$

d) Abstand

$$h(x, y, z) = \frac{2x + 3y + 6z - 75}{7}, \quad h(3, 12, 30) = 21$$

e) Koordinatenform F :

$$-20x + 21z + 163 = 0$$

Beispiel 7.17 Gleichungen der Ebene im Raum

409770

Bestimme die Normalenform der Ebene E

$$E : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechne dazu den Normalenvektor. Vereinfache soweit, dass keine Vektoren mehr in der Normalenform auftreten. **Lösung:**

Der Normalenvektor ist

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $(\vec{x} - \vec{A})$ ergibt

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

was sich zu $-10x + 4y + 11z - 3 = 0$ vereinfacht.

Definition Koordinatenform der Ebene im Raum

Eine Ebene ist definiert durch die vier Parameter n_1, n_2, n_3 und d . Für den allgemeinen Punkt \vec{x} in der Ebene gilt $E: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + d = 0$

Die Koordinatenform ergibt sich z.B. durch das Auswerten der Normalenform. Die Koeffizienten n'_1, n'_2, n'_3 sind die Komponenten des Normalenvektors.

Beispiel 7.18 Gleichungen der Ebene im Raum

173961

Bestimme für die Ebene E

$$E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v}$$

den Normalenvektor. Drücke dann mathematisch aus, dass der Verbindungsvektor von einem Punkt \vec{x} in der Ebene zum Aufpunkt den Abstand Null zur Ebene hat.

Lösung:

Wir benutzen den Normalenvektor \vec{n} um den Abstand zu berechnen. Der Verbindungsvektor von einem Punkt in der Ebene zum Aufpunkt ist $(\vec{A} - \vec{x})$. Er soll den Abstand Null haben, also gilt

$$(\vec{A} - \vec{x}) \odot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = 0$$

Wir können diesen Ausdruck noch mit $\|\vec{n}\|$ multiplizieren

$$(\vec{A} - \vec{x}) \odot \vec{n} = 0$$

Beispiel 7.19 Normalenform und Koordinatenform der Ebene

UE9YTP

Gibt die Normalenform und die Koordinatenform der folgenden Ebenen an.

a) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \\ 105 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 117 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 35 \\ 129 \end{pmatrix}$ liegen in E

c) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 56 \\ 13 \\ 135 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 146 \\ 18 \\ 79 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 101 \\ 8 \\ 107 \end{pmatrix}$ liegen in E

Lösung:

a)

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} \quad \vec{n}'' = \frac{1}{10} \cdot \vec{n}' = \begin{pmatrix} 9 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenform

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{A} \right) \odot \vec{n}'' = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 9 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform (ausmultiplizieren):

$$-850 + 9x + 40y = 0$$

b)

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 35 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 70 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} \quad \vec{n}'' = \frac{1}{13} \cdot \vec{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Normalenform

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{A} \right) \odot \vec{n}'' = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \\ 105 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 35 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform (ausmultiplizieren):

$$-4095 - 12y + 35z = 0$$

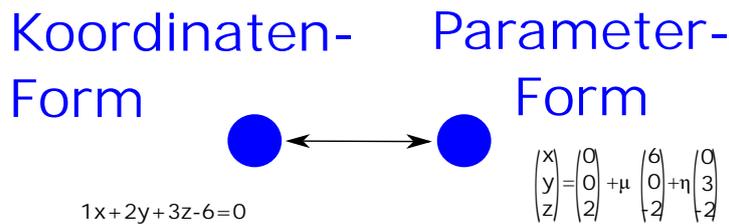


Abbildung 7.1: Die verschiedenen mathematischen Darstellungen der Ebene in \mathbb{R}^3 .

c)

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 90 \\ 5 \\ -56 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 45 \\ -5 \\ -28 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} \quad \vec{n}'' = \frac{1}{15} \cdot \vec{n}' = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ -45 \end{pmatrix}$$

Normalenform

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{A} \right) \odot \vec{n}'' = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 56 \\ 13 \\ 135 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ -45 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform (ausmultiplizieren):

$$7643 - 28x - 45z = 0$$

7.4 Wie man die Darstellungen der Ebene ineinander überführt

Wir kennen zwei Darstellungen der Ebene im Raum, die Parameter-Form und die Koordinaten-Form.

Wie die Formen am effizientesten ineinander anderen überführt werden, das wird hier besprochen.

7.4.1 Von der Koordinaten-Form $1x + 2y + 3z - 6 = 0$ zu ...

Suchen wir Punkte in der Ebene, lassen sich zwei Koordinaten wählen, z.B. für $1x + 2y + 3z - 6 = 0$ können wir $y = 0$ und $z = 0$ setzen. Dann ergibt sich für den

Punkt $x = 6$, also $\vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für die Ebene $E : 1z = 12$, geht die Wahl $y = 0$ und $z = 0$ nicht. Welche Variablen lassen sich also wählen, welche nicht?

Infobox Pivot-, freie Variablen

Für das Wählen der Variablen bietet sich folgendes Vorgehen an:
Wir betrachten die Ebenengleichung von links nach rechts.

- Die erste Variable, deren Koeffizient nicht 0 ist, bezeichnen wir als **Pivot-Variable**.
- Alle anderen Variablen als *freie Variablen*.

Freie Variablen können frei gewählt werden. Aus dieser Wahl ergeben sich dann die Pivot-Variable.

Mit diesem Vorgehen finden wir z.B. für $E: 2x + 1z = 12$

- Pivot-Variable: x
- freie Variablen: y, z

Variablen wählen, evtl. Ebenengleichung umformen auf $x = \frac{12-z}{2}$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 7.20 Punkte in Ebene erzeugen

7EQKL7

Geben Sie einen Punkt der Ebene an. Lesen Sie dann den Normalenvektor und Abstand zum Ursprung aus und geben Sie die Parameterform der Ebenen an.

a) E: $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

d) E: $6x - 3y - 2z = -30$

b) E: $x - y - z + 1 = 0$

e) E: $7x = 3$

c) E: $5y = 0$

f) E: $-4x + 2y - z + 8 = 0$

Lösung:

a) Ein Punkt ist

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und der Abstand zum Ursprung $|h| = \frac{12}{\sqrt{61}} \approx 1.54$. Koordinatenform ($s, t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Übrigens ist die Normalenform:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

b) Ein Punkt ist

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und der Abstand zum Ursprung $|h| = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$. Koordinatenform ($s, t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übrigens ist die Normalenform:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

c) Ein Punkt ist

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Abstand zum Ursprung $|h| = 0$. Koordinatenform ($s, t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übrigens ist die Normalenform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

d) Ein Punkt ist

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und der Abstand zum Ursprung $|h| = \frac{30}{7} \approx 4.29$. Koordinatenform ($s, t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Übrigens ist die Normalenform:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

e) Ein Punkt ist

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Abstand zum Ursprung $|h| = \frac{3}{7} = 0.43$. Koordinatenform ($s, t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übrigens ist die Normalenform:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

f) Ein Punkt ist

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und der Abstand zum Ursprung $|h| = \frac{8}{\sqrt{21}} \approx 1.74$. Koordinatenform ($s, t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Übrigens ist die Normalenform:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Beispiel 7.21 Richtungsvektoren einer Ebene bestimmen

Y2NLAE

Gibt die Ebene in Parameterform an. Bestimme dazu die Richtungsvektoren der Ebene

$$2x + y - z = 3$$

Lösung:

x ist eine Pivot-Variable, y und z sind freie Variablen.

Richtungsvektoren $\vec{l}_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ stehen senkrecht auf dem Normalenvektor:

$$\vec{n}' \odot \vec{l}_h = 0 \text{ oder eingesetzt } 2x + 1 - z = 0$$

a) Um dies zu lösen, setzen wir $y = 1$, $z = 0$ und lösen das homogene LGS

$$2x + 1 - 0 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Der erste Richtungsvektor ist also $\vec{l}_{h,1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Wir setzen $y = 0$ und $z = 1$ und lösen das homogene LGS

$$2x + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Der zweite Richtungsvektor ist also $\vec{l}_{h,2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir skalieren die Richtungsvektoren und schreiben die Parameterform als $(\lambda, \nu \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Infobox Richtungsvektor generieren (Profi)

Ist eine Ebene in der Koordinaten-Form $n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ gegeben, setzen wir eine freie Variable 1 und die andere 0 und lösen dann die homogene Gleichung

$$n_1x + n_2y + n_3z = 0$$

Für jede freie Variable gibt es einen linear unabhängigen Richtungsvektor.

Infobox Richtungsvektoren generieren (quick and dirty)

Ist eine Ebene in der Koordinaten-Form $n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ gegeben, gibt es meist Richtungsvektoren in der Form

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_3 \\ n_2 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{v} = \begin{pmatrix} n_3 \\ 0 \\ -n_1 \end{pmatrix} .$$

Infobox Koordinaten-Form zur Parameter-Form

Es werden Pivot- und freie Variablen bestimmt. Dann kann ein Aufpunkt generiert werden. Der Normalenvektor \vec{n} kann ausgelesen werden. Mit den obigen Methoden ergeben sich daraus die Richtungsvektoren.

$$E : \vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Beispiel 7.22 Von der Koordinaten-Form zur Parameterform

467643

Berechnen Sie eine Parameterform der Ebene gegeben durch

a)

$$E : 1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

b)

$$E : 12x + 9z - 55 = 0$$

Lösung:

a) Wir erzeugen den Punkt

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Richtungsvektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda, \nu \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55/12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \nu \in \mathbb{R}$$

7.4.2 Von der Parameter-Form ...

Infobox Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form

Mit dem Vektorprodukt kann aus dem Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} der Normalenvektor berechnet werden.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Die Ebene schreibt sich nun als

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$$

wobei d die Konstante durch Einsetzen der Koordinaten des Aufpunktes bestimmt wird.

Beispiel 7.23 Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form

211568

Berechnen Sie die Koordinaten-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir lesen berechnen den Normalenvektor mit dem Vektorprodukt

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

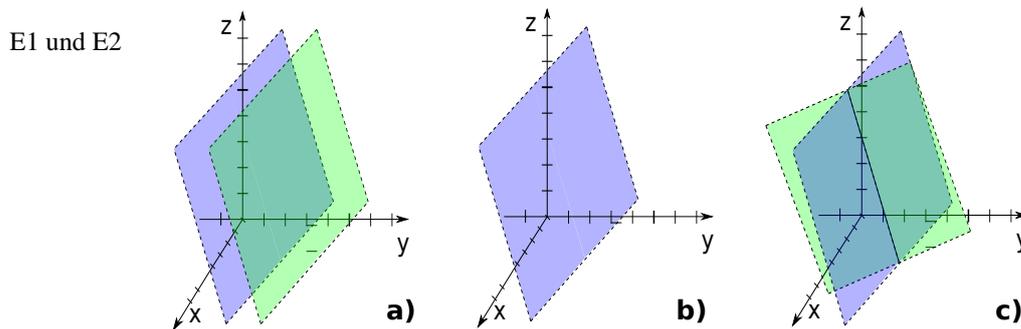


Abbildung 7.2: Mögliche Schnittmengen von zwei Ebenen

Achtung, der Normalenvektor kann stets reskaliert werden. D.h. die Länge kann beliebig geändert werden. Hier verkürzen wir den Normalenvektor um den Faktor 6.

Dann setzen wir den Aufpunkt ein und bestimmen so die Konstante

$$\begin{aligned}
 1x + 2y + 3z + d &= 0 \\
 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + d &= 0 \\
 \Rightarrow 1x + 2y + 3z - 6 &= 0
 \end{aligned}$$

7.5 Wie kann man die Koeffizienten der Koordinatenform interpretieren?

Infobox Koeffizienten und Konstante der Koordinatenform

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot y + c_3 \cdot z = d$$

- Die Koeffizienten c_1 , c_2 und c_3 sind die Koordinaten des Normalenvektors \vec{n} .
- Der Betrag von $\frac{d}{|\vec{n}|}$ gibt den Abstand zum Ursprung an.
- Für $d > 0$ gilt: Verändern wir \vec{n} nicht, sondern vergrößern nur d , so wächst der Abstand der Ebene zum Ursprung.

Beispiel 7.24 Unterscheidung nach Schnittmenge, 2 Ebenen

QWHA5Z

Betrachten Sie die Schnittmengen von zwei Ebenen in Abbildung 7.2.

- Welche Schnittmengen gibt es? Beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.
- Wie können Sie die Fälle unterscheiden anhand der Normalenvektoren oder der Konstanten.

- c) Für ein homogenes lineares Gleichungssystem, d.h. die Konstanten aller Ebenen sind 0: Welche der oben besprochenen Fälle können jetzt noch auftreten?

Lösung:

- a) Die Abbildung Abbildung 7.2 zeigt alle möglichen Schnittmengen: a) keine Lösung, b) bei identischen Ebenen ist Schnittmenge eine Ebene, c) eine Schnittgerade
- b) Parallele Ebenen erkennt man daran, dass die Normalenvektoren kollinear sind a). Da gibt es keine Schnittmenge.
Identische Ebenen erkennt man daran, dass die Normalenvektoren kollinear sind und $d/|\vec{n}|$ den selben Wert ergibt (b)
Sich schneidende Ebenen erkennt man daran, dass die Normalenvektoren nicht kollinear sind.
- c) Bei homogenen LGS beide Ebenen durch den Ursprung, d.h. $\vec{0}$ ist immer in der Schnittmenge, also kann es bei der Lösung nur um eine Schnittgerade oder identische Ebenen handeln.

Beispiel 7.25 Schnittmengen qualitativ

FK36P5

Betrachten Sie die Schnittmengen in Abbildung 7.3. Unten finden Sie die Gleichungen der Ebenen E_1 , E_2 und E_3 — vor und nach der Elimination. Welche gegenseitige Lage haben E_1 , E_2 und E_3 . Wie sieht die Schnittmenge aus? Antworten Sie ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

a)

$$\begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & +9y & +8z & = 0 \\ 8x & +9y & +6z & = 0 \\ 10x & +0 & +6z & = 0 \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} 2x \\ 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} +0 & +8z & = 0 \\ +9y & +8z & = 0 \\ +0 & +34z & = 0 \end{array} \right|$$

b)

$$\begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 2x & +y & -2z & = -1 \\ x & +8y & -4z & = 10 \\ 6x & -y & +18z & = 81 \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} x \\ 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} +0 & +44z & = 178 \\ +y & +246z & = 987 \\ +0 & +336z & = 1344 \end{array} \right|$$

c)

$$\begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 2x & +y & -2z & = 7 \\ x & +8y & -4z & = 20 \\ -3x & +6y & +0 & = 6 \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} x \\ 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} +8y & -4z & = 20 \\ +15y & -6z & = 33 \\ +0 & +0 & = 0 \end{array} \right|$$

- d) Halten Sie nun Ihr Vorgehen fest: Welche Schnittmengen gibt es? Woran erkennen Sie diese in den beiden Formen des LGS — vor und nach der Elimination? Wie können Sie für jeden Typ von Schnittmenge die Lage der Ebenen erkennen?

Lösung:

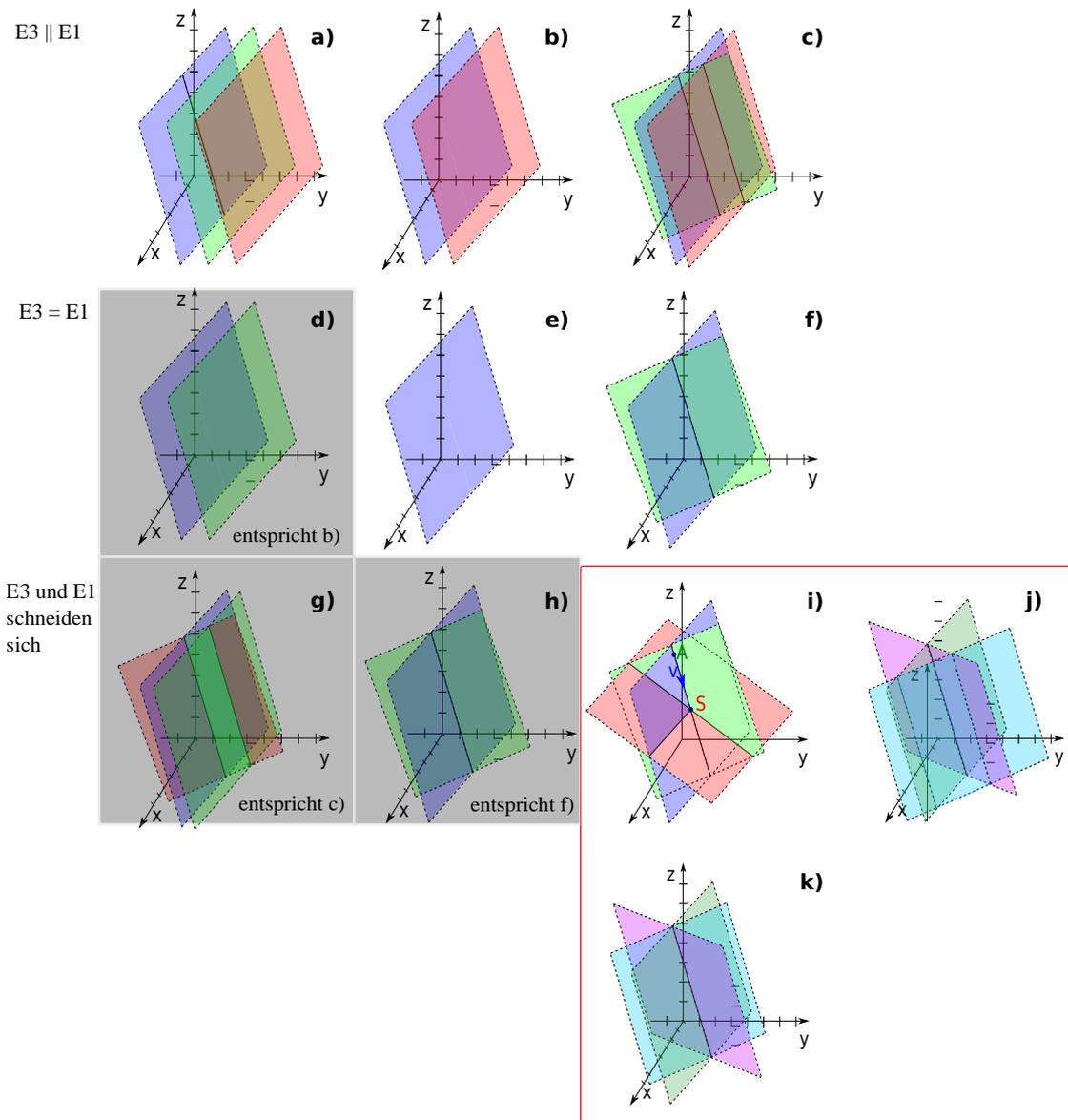


Abbildung 7.3: Mögliche Schnittmengen von drei Ebenen: die Ebenen E_1 und E_2 aus Abbildung 7.2 (parallele, identische und sich schneidende Ebenen) werden mit einer dritten Ebenen E_3 (rot) kombiniert.

- a) Alle Konstanten sind 0, also schneiden sich die Ebenen dort. Setzt man nach der Gauss-Elimination in das LGS ein, ergibt sich tatsächlich nur dieser Punkt als Lösung (Fall i in Abbildung 7.3).
- b) Setzt man nach der Gauss-Elimination in das LGS ein, ergibt sich nur ein Punkt als Lösung (Fall i in Abbildung 7.3)..
- c) Nach der Gauss-Elimination ergibt sich in der dritten Zeile $(0, 0, 0)$, d.h. die Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig. Nach der Gauss-Elimination sehen wir auch, dass nur zwei Gleichungen übrig bleiben, d.h. das System ist unterbestimmt, wir erhalten eine Schnittgerade. Es bleiben somit nur die Fälle f), g) und k) in Abbildung 7.3 interessant. Die Fälle f) und g) können wir jedoch ausschliessen, weil wir vor der Gauss-Elimination sehen, dass die Normalenvektoren nicht kollinear sind. Also handelt es sich um drei Ebenen, die sich in der selben Geraden schneiden.
- d) Es gibt die Schnittmengen 'leere Menge' (IM), 'Schnittpunkt' (P), 'Schnittgerade' (g) und 'Ebene' (E).
- IM (a,b,c,j Kamin): hauptsächlich sind die Fälle a/b/c zu unterscheiden vom Kamin. Wir erkennen a/b/c daran, dass Normalenvektoren vor der Elimination kollinear sind.
 - P (i): es gibt nur einen Fall. Wir sagen, die Ebenen sind windschief.
 - g (k, f): die beiden Fälle unterscheiden sich darin, dass bei f) zwei identische Ebenen vorliegen. Bei k) gibt es keine Normalenvektoren, die vor der Elimination kollinear sind.
 - E: es gibt nur einen Fall.

7.6 Übungen

Beispiel 7.26 Abstand Punkt-Ebene im Raum

007592

Berechnen Sie den Abstand des Punktes \vec{R} von den Ebenen.

a) E enthält u.a. die Punkte $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\vec{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) E enthält u.a. die Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\vec{R} = \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) E enthält u.a. die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\vec{R} = \begin{pmatrix} 13.8 \\ 20.9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\text{a) } h = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2. \text{ Der Abstand ist}$$

$$|h| = 2$$

$$\text{b) } h = \left(\begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4. \text{ Der Abstand ist}$$

$$|h| = 4$$

$$\text{c) } h = \left(\begin{pmatrix} 13.8 \\ 20.9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.8 \\ 20.9 \\ 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} = -3.1. \text{ Der Abstand}$$

ist

$$|h| = 3.1$$

 Lösungen von linearen Gleichungssystemen

8.1 Lösungsmengen bestimmen (qualitativ)	171
8.2 Lösungsverfahren mit elementaren Zeilenoperationen	176
8.3 Homogene und inhomogene Lösungen bestimmen	182
8.4 Geometrische Interpretation der Lösung	197
8.5 Ebenen in \mathbb{R}^3	201

8.1 Lösungsmengen bestimmen (qualitativ)

Beispiel 8.1 Unterscheidung nach Schnittmenge, 3 Ebenen

PVKJ6M

Betrachten Sie die Schnittmengen von drei Ebenen in Abbildung 7.3.

- Welche Schnittmengen gibt es? Beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.
- Wie können Sie die Fälle unterscheiden anhand der Normalenvektoren oder der Konstanten.
- Zeichnen Sie ein entsprechendes Schema für homogene LGS.
- Erstellen Sie ein Schema um die möglichen Schnittmengen einzuteilen. Charakterisieren Sie die Fälle nach dem Rang der Koeffizientenmatrix und nach dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Lösung:

- Die Abbildung 7.3 zeigt alle möglichen Schnittmengen.

- b) Parallele Ebenen erkennt man daran, dass die Normalenvektoren kollinear sind (a-d und g). Da gibt es keine Schnittmenge.
Identische Ebenen erkennt man daran, dass die Normalenvektoren kollinear sind und $d/\|\vec{n}\|$ in zwei Ebenen den selben Wert ergibt (d-f und h)
Bei j) und k) sind die Normalenvektoren komplanar, bei i) sind die Normalenvektoren linear unabhängig.
- c) Bei homogenen LGS gehen alle Ebenen durch den Ursprung, d.h. $\vec{0}$ ist immer eine Lösung des LGS. Es kommen also nur die Fälle e), f)= h), i) und k) in Frage
- d) Wir bezeichnen die erweiterte Koeffizientenmatrix mit \mathbf{A}_e und die Koeffizientenmatrix mit \mathbf{A} . Falls es keine Lösung gibt (a-d, g, und j) gilt $3 = \text{rank}(\mathbf{A}_e) > \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ (d.h. nach der Gausselimination enthält \mathbf{A}_e einen Widerspruch in der letzten Zeile. Falls es genau eine Lösung gibt (i) gilt $3 = \text{rank}(\mathbf{A}_e) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 3$. Falls die Lösungsmenge eine Schnittgerade ist gilt $2 = \text{rank}(\mathbf{A}_e) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$

Beispiel 8.2 Schnittmengen qualitativ

DSF4HG

Unten finden Sie die Ebenen E_1 , E_2 und E_3 — vor und nach der Gauss-Elimination. Wie sehen die Schnittmengen von der Ebenen $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \wedge E_3$ und $E_2 \wedge E_3$ aus? Wie sieht die Schnittmenge der drei Ebenen ($E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$) aus? Antworten Sie vorerst ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 5x & -2y & -2z & = & 8 \\ 8x & +5y & -z & = & -3 \\ 13x & +3y & -3z & = & 5 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{cc|cc} 41x & & -12z & = & 34 \\ & 41y & +11z & = & -79 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right|$$

Lösung:

Wir finden die Pivot-Variablen x und y , also ist z eine freie Variable.
Die Lösungsmenge ist eine Schnittgerade. Wir beobachten, dass eine Linearkombination der Normalenvektoren den Nullvektor ergibt. D.h. die Normalenvektoren sind linear abhängig, d.h. sie sind komplanar (sie liegen in einer Ebenen). Daraus schliessen wir, dass sich die drei Ebenen in einer gemeinsamen Schnittgeraden schneiden.

Beim letzten Schritt der Elimination ausserdem in der letzten Zeile drei Situationen auftreten:

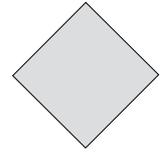
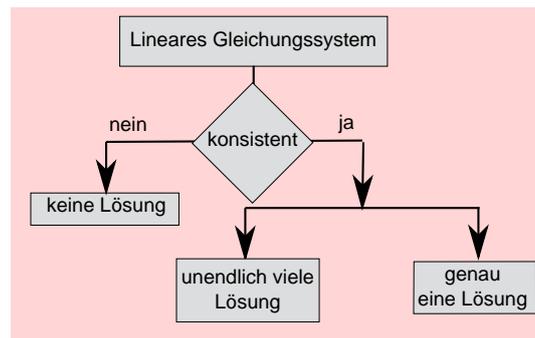


Abbildung 8.1: Mögliche Situationen für die Lösung eines linearen Gleichungssystems. [Papula, 2009, Bd. 2 I 5.4]

Satz Formen von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem $a \cdot x = b$ kann drei Formen annehmen

- Es liegt die Form $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ vor. Es gibt eine Lösung $x = \frac{b}{a}$.
- Es liegt die Form $0 \cdot x = b$ mit $b \neq 0$ vor. Es gibt keine Lösung.
- Es liegt die Form $0 \cdot x = 0$ vor. Dann gibt es unendlich viele Lösungen $x = \mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Definition Inkonsistente lineare Gleichungen

Die lineare Gleichung $0 \cdot x = b$ mit $b \neq 0$ nennen wir **inkonsistent** (Fall 2 in Satz 8.1). Alle anderen Fälle der linearen Gleichungen heißen **konsistent** (Fall 1 und 3 in Satz 8.1).

Ist *eine* Gleichung inkonsistent, ist auch das zugehörige Gleichungssystem inkonsistent. Beachte auch, dass für konsistente Gleichungssysteme (Fall 1 und 3 in Satz 8.1) wieder zwei Unterscheidungen gemacht werden: Es gibt den Fall mit *einer* Lösung oder mit *unendlich vielen* Lösungen. Deshalb ergibt sich das Schema für linear Gleichungssysteme, wie es in Abb.8.1 gegeben ist. Ob genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen (d.h. freie Variablen) vorliegen, entscheidet man, indem man das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform bringt und freie Variablen sucht. Gibt es freie Variablen, resultieren unendlich viele Lösungen, ansonsten gibt es genau eine Lösung.

Beispiel 8.3 Schnittmengen qualitativ: Homogene LGS

GL27L6

Unten finden Sie Ebenen E_1 , E_2 und E_3 — vor und nach der Gauss-Elimination. Wie sehen die Schnittmengen der Ebenen $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \wedge E_3$ und $E_2 \wedge E_3$ aus? Wie sieht die Schnittmenge der drei Ebenen $(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$ aus? Antworten Sie vorerst ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & +9y & +8z & = & 0 \\ 8x & +9y & +6z & = & 0 \\ 10x & +0 & +6z & = & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2x & +0 & +8z & = & 0 \\ 0 & +9y & +8z & = & 0 \\ 0 & +0 & +34z & = & 0 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} -7x & +y & +9z & = & 0 \\ 0 & +4y & +8z & = & 0 \\ 14x & +2y & -10z & = & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 7x & +3y & -z & = & 0 \\ 0 & +1y & +2z & = & 0 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} -14x & +2y & +18z & = & 0 \\ -7x & +y & +9z & = & 0 \\ 0 & +4y & +8z & = & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 7x & +3y & -z & = & 0 \\ 0 & +1y & +2z & = & 0 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} 2x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +8y & -4z & = & 0 \\ -3x & +6y & +0 & = & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x & +8y & -4z & = & 0 \\ 0 & +15y & -6z & = & 0 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{vmatrix}$$

e)

$$\begin{vmatrix} 2x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +8y & -4z & = & 0 \\ 6x & -y & +18z & = & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x & +0 & +44z & = & 0 \\ 0 & +y & +246z & = & 0 \\ 0 & +0 & +336z & = & 0 \end{vmatrix}$$

f)

$$\begin{vmatrix} 4x & +3y & -5z & = & 0 \\ -3x & +3y & +10z & = & 0 \\ 5x & +9y & +0 & = & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x & +6y & +5z & = & 0 \\ 0 & +21y & +25z & = & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Da bei allen Gleichungen die Konstanten 0 sind, gehen alle Ebenen durch den Ursprung. Der Vektor $\vec{0}$ liegt deshalb immer in der Schnittmenge und ist entweder Schnittpunkt oder Aufpunkt der Schnittmenge.

- a) und e) ergeben einen Schnittpunkt nämlich $\vec{0}$. Jeweils zwei Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden.
- b) d) f) ergeben eine Schnittgerade. Wir beobachten, dass eine Linearkombination der Normalenvektoren den Nullvektor ergibt. D.h. die Normalenvektoren sind linear abhängig, d.h. sie sind komplanar (sie liegen in einer Ebenen). Daraus schliessen wir, dass sich die drei Ebenen in einer gemeinsamen Schnittgeraden schneiden.
- c) ergibt eine Schnittgerade. Hier ist speziell, dass die Ebenen E_1 und E_2 identisch sind und sich mit E_3 in einer Geraden schneiden. Das erkennen wir daran, dass gleichzeitig die Normalenvektoren von E_1 und E_2 kollinear sind und die Konstanten beide gleich sind, nämlich 0.

Unten finden Sie Ebenen E_1 , E_2 und E_3 vor und nach der Gauss-Elimination. Wie sehen die Schnittmengen von der Ebenen $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \wedge E_3$ und $E_2 \wedge E_3$ aus? Wie sieht die Schnittmenge der drei Ebenen ($E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$) aus? Antworten Sie vorerst ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

a)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} 2x & +y & -2z & = -1 \\ x & +8y & -4z & = 10 \\ 6x & -y & +18z & = 81 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} x & +0 & +44z & = 178 \\ 0 & +y & +246z & = 987 \\ 0 & +0 & +336z & = 1344 \end{array} \right| \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} 2x & +y & -2z & = 7 \\ x & +8y & -4z & = 20 \\ -3x & +6y & +0 & = 6 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} x & +8y & -4z & = 20 \\ 0 & +15y & -6z & = 33 \\ 0 & +0 & +0 & = 0 \end{array} \right| \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} 4x & +18y & -12z & = 62 \\ 2x & +9y & -6z & = 29 \\ 12x & -3y & +4z & = 67 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2x & +9y & -6z & = 1 \\ 0 & +57y & -40z & = 3 \\ 0 & +0 & +0 & = 4 \end{array} \right| \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} 2x & +y & -2z & = 9 \\ 6x & -y & +18z & = 41 \\ 24x & +8y & +0 & = 110 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2x & +y & -2z & = 9 \\ 0 & +4y & -24z & = 10 \\ 0 & +0 & +0 & = 12 \end{array} \right| \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & +9y & +8z & = 40 \\ 8x & +9y & +6z & = 56 \\ 10x & +0 & +6z & = -14 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2x & +0 & +8z & = -30 \\ 0 & +9y & +8z & = 40 \\ 0 & +0 & +34z & = -136 \end{array} \right| \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} -14x & +2y & +18z & = 78 \\ -7x & +y & +9z & = -41 \\ 0 & +4y & +8z & = 9 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 7x & +3y & -z & = 2 \\ 0 & +4y & +8z & = 1 \\ 0 & +0 & +0 & = 4 \end{array} \right| \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} -7x & +y & +9z & = -31 \\ 0 & +4y & +8z & = -12 \\ 14x & +2y & -10z & = 50 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 7x & +3y & -z & = 19 \\ 0 & +4y & +8z & = -12 \\ 0 & +0 & +0 & = 0 \end{array} \right| \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} 4x & +3y & -5z & = 18 \\ -3x & +3y & +10z & = 5 \\ 5x & +9y & +0 & = 36 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} x & +6y & +5z & = 3 \\ 0 & +21y & +25z & = 4 \\ 0 & +0 & +0 & = 5 \end{array} \right| \end{array}$$

i)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 4x & +18y & -12z \\ 2x & +9y & -6z \\ x & -3y & +4z \end{array} \right| = \begin{array}{l} 62 \\ 31 \\ 2 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 2x & +9y & -6z \\ 0 & +15y & -14z \\ 0 & +0 & +0 \end{array} \right| = \begin{array}{l} 1 \\ 27 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Lösung:

Im Gegensatz zu den homogenen LGS sind die Konstanten nicht alle gleich 0. Deshalb haben die Ebenen die Möglichkeit parallel zu liegen und sich trotzdem nicht zu schneiden.

- a) und e) ergeben einen Schnittpunkt, d.h. jeweils zwei Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden.
- b) und g) ergeben eine Schnittgerade. Wir beobachten, dass eine Linearkombination der Normalenvektoren den Nullvektor ergibt. D.h. die Normalenvektoren sind linear abhängig, d.h. sie sind komplanar (sie liegen in einer Ebenen). Daraus schliessen wir, dass sich die drei Ebenen in einer gemeinsamen Schnittgeraden schneiden.
- d) und h) leere Schnittmenge. Die Normalenvektoren sind linear abhängig, aber es gibt keine zwei, die kollinear sind. Trotzdem schneiden sich die Ebenen nicht (Widerspruch in der letzten Zeile nach dem Eliminieren). Die Ebenen beschreiben also einen Kamin
- i) ergibt eine Schnittgerade. Hier ist speziell, dass die Ebenen E_1 und E_2 identisch sind und sich mit E_3 in einer Geraden schneiden.
- c) und f) leere Schnittmenge. Hier ist speziell, dass die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind (kollinear Normalenvektoren) aber verschiedene Koonstanten haben.

8.2 Lösungsverfahren mit elementaren Zeilenoperationen

Beispiel 8.5 Linear-Kombinationen von Gleichungen

070402

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} L_1 : & 8x_1 & +x_2 \\ L_2 : & x_1 & +3 \cdot x_2 \end{array} \right| = \begin{array}{l} 17 \\ 5 \end{array} \end{array} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir benennen die Gleichungen L_1, L_2 und L_3 . Wir wissen von vorher, dass \vec{v} eine Lösung des LGS ist. Ist nun \vec{v} auch eine Lösung der lineare Gleichung

$$L' = 2L_1 + 3L_2 ?$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die lineare Gleichung $L_1 + 3L_2$:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot L_1 : \quad 16x_1 \quad +2x_2 \quad = \quad 34 \\ 3 \cdot L_2 : \quad 3x_1 \quad +9x_2 \quad = \quad 15 \\ \hline L' : \quad 19x_1 \quad +11x_2 \quad = \quad 49 \end{array}$$

Wenn wir nun $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in L' einsetzen, erhalten wir nacheinander

$$19 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 49 \quad \text{oder} \quad 49 = 49$$

also ist \vec{v} eine Lösung von L' .

Beispiel 8.6 Linear-Kombinationen von Gleichungen

969391

$$\left| \begin{array}{l} L_1 : \quad x_1 \quad +x_2 \quad +4 \cdot x_3 \quad +3 \cdot x_4 = 5 \\ L_2 : \quad 2 \cdot x_1 \quad +3 \cdot x_2 \quad +x_3 \quad -2 \cdot x_4 = 1 \\ L_3 : \quad x_1 \quad +2 \cdot x_2 \quad -5 \cdot x_3 \quad +4 \cdot x_4 = 3 \end{array} \right| \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir benennen die Gleichungen L_1, L_2 und L_3 . Wir wissen von vorher, dass \vec{v} eine Lösung des LGS ist. Ist nun \vec{v} auch eine Lösung der lineare Gleichung

$$L' = L_2 - L_1 - L_3 ?$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die lineare Gleichung $L_2 - L_1 - L_3$:

$$\left| \begin{array}{l} 1 \cdot L_2 : \quad 2x_1 \quad +3x_2 \quad +1x_3 \quad -2x_4 = 1 \\ -1 \cdot L_1 : \quad -x_1 \quad -x_2 \quad -4x_3 \quad -3x_4 = -5 \\ -1 \cdot L_3 : \quad -x_1 \quad -2x_2 \quad +5x_3 \quad -4x_4 = -3 \\ \hline L' : \quad 0 \cdot x_1 \quad +0 \cdot x_2 \quad +2x_3 \quad -9x_4 = -7 \end{array} \right|$$

Wenn wir nun $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in L' einsetzen, erhalten wir nacheinander

$$2 \cdot (1) - 9 \cdot (1) = -7 \quad \text{oder} \quad 25 = 25$$

Wir folgern daraus, dass durch die Linearkombination von linearen Gleichungen die Lösungsmenge nicht verändert wird.

Definition Elementare Zeilenoperationen

Die elementaren Zeilenoperationen sind

- Vertauschung von zwei Gleichungen: $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $k \neq 0$: $L_i \rightarrow L_i \cdot k$
- Addition der Gleichungen L_i und $L_j \cdot k$: $L_i \rightarrow L_i + L_j \cdot k$

[Papula, 2009, Bd. 2 I 5.2]

Satz Elementare Zeilenoperationen

Elementare Zeilenoperationen verändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ nicht.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.464]

Das Gauss'sche Eliminations-Verfahren wendet die elementaren Zeilenoperationen nacheinander an, um das lineare Gleichungssystem in die **Zeilenstufenform** (meist sogar **Dreiecks-Form**) zu bringen. Daraus kann die Lösung des Gleichungssystems einfach bestimmt werden. Dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 8.7 Einsetzen in die Dreiecksform

959281

Löse das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 9 \\ + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ + 7x_3 - x_4 = 3 \\ + 2x_4 = 8 \end{array}$$

Lösung:

- a) In der letzten Zeile erhalten wir $x_4 = 4$.
- b) Das setzen wir in die dritte Zeile ein und erhalten die Gleichung mit einer Unbekannten:

$$7x_3 - 4 = 3 \text{ also } 7x_3 = 7 \Rightarrow x_3 = 1$$

- c) Jetzt setzen wir $x_3 = 1$ und $x_4 = 4$ in die zweite Gleichung ein und erhalten wieder eine Gleichung mit nur einer Unbekannten:

$$5x_2 - 1 + 12 = 1 \text{ oder } 5x_2 + 11 = 1 \text{ oder } 5x_2 = -10 \Rightarrow x_2 = -2$$

- d) Schliesslich setzen wir $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ und $x_4 = 4$, in die erste Gleichung ein und lösen nach x_1 auf:

$$2x_1 + 6 + 5 - 8 = 9 \text{ oder } 2x_1 + 3 = 9 \text{ oder } 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Dreiecksform zeichnet sich dadurch aus, dass genau so viele Gleichungen vorliegen wie Unbekannte. Gibt es weniger Gleichungen als Unbekannte, sprechen wir von der **Zeilenstufenform**. Die Dreiecksform ist also ein Spezialfall der Zeilenstufenform mit Anzahl Unbekannte gleich Anzahl Gleichung, $n = m$.

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 15 \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ 3x_4 - 9x_5 = 6 \end{cases}.$$

Lösung:

Die Variablen, die auf jeder Zeile zuvorderst stehen (x_1, x_3 und x_4), nennen wir **Pivot-Variablen**, die anderen nennen wir **freie Variablen** (x_2 und x_5). Die Benennung wird in den folgenden Lösungsschritten klar. Wir lösen jetzt in parametrischer Form: Wir benennen die freien Variablen mit Parametern

$$x_2 = \mu, \quad x_5 = \nu.$$

Die restlichen Variablen bestimmen wir nun wie beim Einsetzen in Dreieckform, nur dass hier noch zusätzlich die Parameter μ und ν auftreten:

a) In der letzten Gleichung ergibt sich

$$3x_4 - 9\nu = 6 \quad \text{oder} \quad 3x_4 = 6 + 9\nu \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2 + 3\nu$$

b) Wir setzen $x_4 = 2 + 3\nu$ und $x_5 = \nu$ in die zweite Gleichung ein und lösen nach x_3 auf:

$$2x_3 + 2(2 + 3\nu) + 3\nu = 5 \quad \text{oder} \quad x_3 + 4 + 8\nu = 5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 - 8\nu$$

c) Wir setzen $x_3 = 1 - 8\nu$, $x_4 = 2 + 3\nu$ und $x_5 = \nu$ in die erste Gleichung ein und lösen nach x_1 auf:

$$2x_1 + 6\mu - (1 - 8\nu) + 4(2 + 3\nu) - 2\nu = 15 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 - 3\mu - 9\nu$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 - 3\mu - 9\nu \\ \mu \\ 1 - 8\nu \\ 2 + 3\nu \\ \nu \end{pmatrix}$. Dies kann auch geschrieben werden als

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

und μ und ν sind Zahlen aus \mathbb{R} .

Übrigens, ist Ihnen aufgefallen, dass die Lösung die Form einer Ebene in Parameterform hat? Es gibt einen Aufpunkt und zwei Richtungsvektoren. Da wir uns in fünf und nicht in drei Dimensionen bewegen, nennen wir die Lösungsmenge eine **Hyperebene**.

Das Lösen von linearen Gleichungen mit dem **Gauss-Eliminations-Verfahren** setzt sich nun aus den beiden Teil-Verfahren zusammen:

- Elimination: Durch elementare Zeilenoperationen wird das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform gebracht.
- Rücksubstitution: Durch Einsetzen von unten nach oben werden die Unbekannten bestimmt.

Infobox Zeilenstufenform vs. Trapezform

In [Papula, 2009, Bd. 2 I 4.4] werden die elementare Zeilenoperationen "äquivalente Umformungen" genannt. Ausserdem wird die Zeilenstufenform da "Trapezform" genannt.

Übrigens, beim Überführen eines Gleichungssystems in Zeilenstufenform verwendet man eine Kombination von zwei Schritten, nämlich man ersetzt die Gleichung L_i mit $L_i + kL_j$: $L_i \rightarrow L_i + L_j \cdot k$, d.h. man führt die Multiplikation einer Gleichung gleichzeitig mit der Addition von Gleichungen aus.

Beachte, dass das Verfahren vorzeitig abgebrochen werden kann, wenn ein Widerspruch erzeugt wird. Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung. Wie die elementaren Zeilenoperationen eingesetzt werden um auf Zeilenstufenform zu kommen, zeigt das nächste Beispiel

Beispiel 8.9 Zeilenstufenform durch elementare Zeilenoperationen 577593

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem mit dem Gaussverfahren

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & -3y & -2z & = & 6 \\ 2x & -4y & -3z & = & 8 \\ -3x & +6y & +8z & = & -5 \end{array} \right|.$$

Lösung:

Elimination:

$$\left| \begin{array}{l} L'_1 = L_1 : \\ L'_2 = L_2 - 2L_1 : \\ L'_3 = L_3 + 3L_1 : \end{array} \right| \begin{array}{ccc|c} x & -3y & -2z & = & 6 \\ 0 & 2y & z & = & -4 \\ 0 & -3y & +2z & = & 13 \end{array}$$

also

$$\left| \begin{array}{l} L''_1 = L'_1 : \\ L''_2 = \frac{1}{2} \cdot L'_2 : \\ L''_3 = L'_3 + 3L''_2 : \end{array} \right| \begin{array}{ccc|c} x & -3y & -2z & = & 6 \\ 0 & y & +\frac{1}{2}z & = & -2 \\ 0 & +\frac{1}{2}z & = & 7 \end{array}$$

Einsetzen:

- Aus der Gleichung L_3'' folgt, dass $z = 2$.
- Wir setzen das in Gleichung L_2'' ein und erhalten

$$1y + 1 = -2 \Rightarrow y = -3$$

- Wir setzen $z = 2$ und $y = -3$ in die erste Gleichung L_1'' ein

$$x + 9 - 4 = 6 \Rightarrow x = 1$$

Die Lösung ist also die Liste (oder der Vektor) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Beachte, dass beim Gaussverfahren zuerst von oben nach unten gearbeitet wird (Elimination) und dann strikt von unten nach oben (Einsetzen). Dies erlaubt die Übersicht zu behalten und wir vermeiden linear abhängige Linearkombinationen (siehe unten).

Infobox Elimination beim Gaussverfahren

Bei der Elimination wird *eine* Zeile bestimmt, mit der eliminiert wird (sie darf zu anderen Zeilen addiert werden).

Diese Zeile muss unverändert in das nächste Gleichungssystem übernommen werden. So werden linear abhängige Linearkombinationen der Gleichungen vermieden.

Die Probleme, die entstehen, wenn man sich nicht an diese Regel hält, zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 8.10 Linear abhängige Linearkombinationen von Gleichungen 942087

$$\left| \begin{array}{l} L_1: \quad -3y = 6 \\ L_2: \quad 2x - 4y = 10 \end{array} \right|.$$

Für das Gleichungssystem oben wird das folgende Vorgehen vorgeschlagen:

$$\left| \begin{array}{l} L'_1 = L_1 - \frac{1}{2}L_2: \quad 0 \quad -1y = 1 \\ L'_2 = L_2 - 2L_1: \quad 0 \quad +2y = -2 \end{array} \right|$$

also

$$\left| \begin{array}{l} L''_1 = L'_1: \quad 0 \quad -1y = 1 \\ L''_2 = L'_2 + 2L'_1: \quad 0 \quad +0 = 0 \end{array} \right|$$

x ist vermeintlich ein freier Parameter. Wir setzen $x = \mu$. Ausserdem folgt aus der ersten Zeile, dass $y = -1$ ist. Die Lösungen sind also $\vec{u} = \begin{pmatrix} \mu \\ -1 \end{pmatrix}$. Dies ist offensichtlich eine falsche Lösung, denn die richtige Lösung besteht aus einem

einzigem Schnittpunkt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Was wurde beim Lösen falsch gemacht?

Lösung:

Beim ersten Eliminationsschritt wurde nicht eingehalten, dass die Zeile mit der eliminiert wird, nicht verändert werden darf.

Wenn wir nun untersuchen, welche Gleichungen wir im zweiten Eliminationsschritt erhalten, sind dies:

$$\left| \begin{array}{l} L_1'' = L_1' = L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_2'' = L_2 + 2L_1' = \underbrace{(L_2 - 2L_1) + 2(L_1 - \frac{1}{2}L_2)}_{=0} \end{array} \right|.$$

Wir sehen also, dass die erste Gleichung eine Linearkombination von L_1 und L_2 ist. Das ist in Ordnung. Aber die zweite Gleichung wurde durch eine 0 ersetzt. Dies ist auf den ersten Blick nicht ersichtlich, sondern erscheint erst in der Analyse.

In der Fachsprache nennt man die Gleichungen L_1' und L_2' linear abhängige Linearkombinationen, weil die Vektoren gebildet aus den Koeffizienten

$$L_1' = 1L_1 - \frac{1}{2}L_2 \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$L_2' = -2L_1 + 1L_2 \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. Diese linear abhängige Linearkombinationen werden bei der Elimination vermieden, indem die Zeile mit der eliminiert wird, unverändert beibehalten wird.

8.3 Homogene und inhomogene Lösungen bestimmen

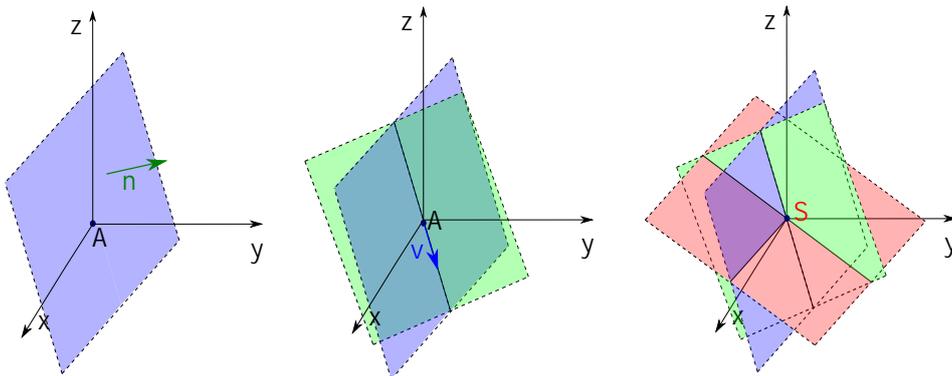
Homogene Lösungen und Nullraum

Beispiel 8.11 Alle Lösungen

U4IWCC

$$\left| \begin{array}{ccc} 1x & +2y & +3z & = & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1x & +2y & +3z & = & 0 \\ & 4y & +5z & = & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1x & +2y & +3z & = & 0 \\ & 4y & +5z & = & 0 \\ & & 6z & = & 0 \end{array} \right|$$

- Wie können Sie die Gleichungssysteme anschaulich (geometrisch) darstellen? Erstellen Sie zu allen drei Gleichungssystemen eine Skizze.
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Parameterform.
- Erkennen Sie ein allgemeines Lösungsverfahren, mit dem sie für alle 3 Fälle die Lösungsmenge bestimmen können?



Lösung:

a) Skizzen oben.

b) Lösungsmengen in Parameterform ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Verfahren unten in Infobox.

Infobox Homogene Lösungen (Richtungsvektoren)

Sie lassen sich am schnellsten bestimmen aus dem *homogenen* LGS. Für den ersten Richtungsvektor setzen wir die freien Variablen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, usw. und lösen dann das LGS durch Einsetzen von unten nach oben. Gibt es weitere Richtungsvektoren, dann wiederholen wir dies mit

2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$, usw.
3. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$, usw.

Infobox Richtungsvektoren alternativ

Sie lassen sich auch bestimmen durch

- das Vektorprodukt der Normalenvektoren bei zwei Ebenen in \mathbb{R}^3
- aus Lösung des LGS mit den freien Variablen λ_1, λ_2 , usw.

Beispiel 8.12 Homogene lineare Gleichungssysteme

801980

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der homogenen linearen Gleichungssysteme. Überprüfen Sie ihr Resultat mit Matlab (Befehl `null`).

a)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \begin{array}{l} 3x + 3y - 12z = 0 \\ x - 4z = 0 \\ 5x + 2y - 20z = 0 \end{array} \right|$$

c)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{array} \right|$$

b)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \begin{array}{l} 3x + 3y - 5z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 2y - 5z = 0 \end{array} \right|$$

Lösung:

a) Wir stellen um und eliminieren

$$\left| \begin{array}{l} E'_1 = E_2 : \\ E'_2 = E_3 : \\ E'_3 = E_1 : \end{array} \begin{array}{l} 1 \ 0 \ -4 \\ 5 \ 2 \ -20 \\ 3 \ 3 \ -12 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} E''_1 = E'_1 : \\ E''_2 = E'_2 - 5E'_1 : \\ E''_3 = E'_3 - 3E'_1 : \end{array} \begin{array}{l} 1 \ 0 \ -4 \\ 0 \ 2 \ 0 \\ 0 \ 3 \ 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} E'''_1 = E''_1 : \\ E'''_2 = E''_2 : \\ E'''_3 = E''_3 - 3/2E''_2 : \end{array} \begin{array}{l} 1 \ 0 \ -4 \\ 0 \ 2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \end{array} \right|$$

Wir stellen fest, dass z eine freie Variable ist. Die partikuläre Lösung ist (wie immer für homogene Probleme) $\vec{l}_p = \vec{0}$.

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.

Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} x \ y \ z \\ \hline E'''_1 : \\ E'''_2 : \\ E'''_3 : \end{array} \begin{array}{l} 1 \ 0 \ -4 \\ 0 \ 2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 4$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{h,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet schliesslich

$$\vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Wir stellen um und eliminieren

$$\left| \begin{array}{l} E'_1 = E_1 : \\ E'_2 = E_2 : \\ E'_3 = E_3 - 2E_2 : \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Ausser der trivialen Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt es keine weiteren Lösungen.

c) Wir stellen um und eliminieren

$$\left| \begin{array}{l} E'_1 = E_1 : \\ E'_2 = E_2 : \\ E'_3 = E_3 - 2E_2 : \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Wir stellen fest, dass z eine freie Variable ist. Die partikuläre Lösung ist (wie immer für homogene Probleme) $\vec{l}_p = \vec{0}$.

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.

Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left| \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ E''_1 : \\ E''_2 : \\ E''_3 : \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 2$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{h,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet schliesslich

$$\vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

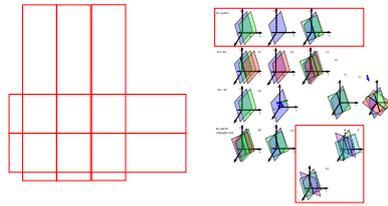
Beispiel 8.13 Richtungsvektoren und Nullraum

V5JXDD

$$|1x + 2y + 3z = 0|, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Wir haben oben die Lösungsmenge des LGS in Parameterform bestimmt. Erstellen Sie eine Skizze der Ebene, des Normalenvektors \vec{n} und der Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} . Sind wohl $3 \cdot \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ auch senkrecht zu \vec{n} ?

- b) Überprüfen Sie, ob algebraisch ob $3 \cdot \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ auch senkrecht zu \vec{n} sind. Wie können Sie ihr Resultat verallgemeinern?



Lösung:

- a) In der Skizze oben, sieht man, dass sowohl $3 \cdot \vec{v}$ als auch $\vec{u} + \vec{v}$ auch senkrecht zu \vec{n} steht.

- b) Algebraisch:

$$(3 \cdot \vec{v}) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0, (\vec{u} + \vec{v}) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

- c) Verallgemeinerung: Jede Linearkombination $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ steht senkrecht auf \vec{n} . D.h. Die Lösungsmenge des LGS bildet einen Vektorraum.

Falls es mehrere Richtungsvektoren in der Lösung eines LGS gibt (z.B. \vec{u} und \vec{v}) sind auch Summen und Vielfache der Richtungsvektoren wieder Richtungsvektoren, z.B.

$$3 \cdot \vec{u} \text{ und } 3 \cdot \vec{u} - 5\vec{v}$$

oder allgemein

$$\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \dots$$

Wir nennen diesen Raum **Nullraum** der Koeffizientenmatrix.

Beispiel 8.14 Nullraum

QWDLIG

Bestimmen Sie den Nullraum der Koeffizientenmatrizen in den folgenden LGSs.

- a)

$$\begin{vmatrix} 5x & +6y & +z & = & 0 \end{vmatrix}$$

- b)

$$\begin{vmatrix} 7x & +3y & -z & = & 19 \\ & 4y & +8z & = & -12 \end{vmatrix}$$

- c)

$$\begin{vmatrix} x & +6y & +5z & = & 0 \\ & 21y & +25z & = & 0 \end{vmatrix}$$

- d)

$$\begin{vmatrix} -3x & -10y & -z & = & 0 \end{vmatrix}$$

e)

$$\left| \begin{array}{cccccc} 5x & -2y & +z & +3v & +4w & = & -13 \\ & 3y & & & +w & = & 6 \end{array} \right|$$

f)

$$\left| \begin{array}{cccccc} -7x & -3y & +z & -10v & -w & = & 12 \\ & & -4z & -7v & +w & = & 41 \end{array} \right|$$

Lösung:

Die Parameter $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}$ sind frei wählbar.

a)

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Wir suchen alle Vektoren, die multipliziert mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

den Nullvektor ergeben. Wir stellen fest, dass die Variablen x und y Pivot-Variablen sind und also z eine freie Variable. Mit *einer* freien Variable, können wir *einen* Vektor im Nullraum bestimmen (Richtungsvektor).

Dafür wählen wir $z = 1$ und setzen von unten nach oben in das homogene LGS ein

$$\begin{array}{rclcl} 7x & +3 \cdot (-2) & -1 & = & 0 & \Rightarrow & x = 1 \\ & 4y & +8 \cdot 1 & = & 0 & \Rightarrow & y = -2 \end{array}$$

Als ist der Nullraum

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} 45 \\ -25 \\ 21 \end{bmatrix}$$

d)

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e)

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

f)

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 28 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -47 \\ 0 \\ -49 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Partikuläre Lösungen

Infobox Partikuläre Lösungen (Aufpunkt)

Sie lässt sich am schnellsten bestimmen, wenn im LGS alle freien Variablen 0 gesetzt werden und dann das LGS durch Einsetzen von unten nach oben gelöst wird.

Beispiel 8.15 Aufpunkt

96265K

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x & -z & = 3 \\ & 4y + z & = 0 \end{array} \right|$$

Bestimmen Sie die freien Variablen und die Pivot-Variablen. Bestimmen Sie dann einen Aufpunkt der Schnittmenge.

Lösung:

x und y sind Pivot-Variablen, also ist z eine freie Variable.

In Anlehnung an vorher (Punkte generieren) versuchen wir beim Aufpunkt möglichst viele Einträge gleich 0 zu setzen. Die strategisch schnellste Variante ist geht so:

Man setzt alle freien Variablen 0, hier also $z = 0$. Dann setzt man in das verbleibende Gleichungssystem von unten nach oben ein:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x & -0 & = 3 \\ & 4y + 0 & = 0 \end{array} \right|$$

Also ist $y = 0$ und $x = 3/2$. Der Aufpunkt ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 8.16 Allgemeine Lösung

9WQK7P

Bestimmen Sie die freien Variablen und die Pivot-Variablen. Bestimmen Sie dann die allgemeine Lösung der LGSs.

a)

$$\begin{vmatrix} x & +8y & -4z & = & 20 \\ 0 & +15y & -6z & = & 33 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2x & +y & -2z & = & 9 \\ 0 & +4y & -24z & = & 10 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2x & +0 & +8z & = & -30 \\ 0 & +9y & +8z & = & 40 \\ 0 & +0 & +34z & = & -136 \end{vmatrix}$$

d)

$$|7x + 3y - z = 2|$$

e)

$$\begin{vmatrix} 4x & +18y & -12z & = & 0 \\ 2x & +9y & -6z & = & 0 \end{vmatrix}$$

f)

$$\begin{vmatrix} 5x & -2y & +z & +3v & +4w & = & -13 \\ & +3y & & & +w & = & 6 \end{vmatrix}$$

g)

$$\begin{vmatrix} -7x & -3y & +z & -10v & -w & = & 12 \\ & & -4z & -7v & +w & = & 41 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Es werden die verschiedenen Verfahren vorgestellt. Mit wenigen Einschränkungen lassen sich alle Verfahren auf alle Probleme anwenden.

a) Wir lesen die Normalenvektoren aus

$$\vec{n}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{m}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Der Richtungsvektor steht senkrecht auf beiden Normalenvektoren also

$$\vec{v} = \vec{n}' \times \vec{m}' = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist also

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/5 \\ 11/5 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alternativ:

Wir stellen fest, dass x und y Pivot-Variablen sind und z eine Freie Variable. Für den ersten Richtungsvektor wählen wir $z = 1$ (falls es weitere freie Variablen gäbe, würden wir die gleich Null setzen). Wir lösen das verbleibende **homogene** LGS:

$$\begin{vmatrix} L_1: & x & +8y & -4 & = & 0 \\ L_2: & 0 & +15y & -6 & = & 0 \end{vmatrix}$$

aus L_2 folgt $y = 6/15 = 2/5$ und aus L_1 folgt $x = 4 - 8 \cdot 2/5 = 4/5$, also

$$\vec{v}'' = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{v}'' = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{l} L_1: \quad 2x + y - 2z = 9 \\ L_2: \quad 0 + 4y - 24z = 10 \end{array}$$

Hier ist nur z eine freie Variable. Alternativer Lösungsweg: Wir setzen $z = \lambda$ und setzen von unten nach oben ein. L_2 :

$$y = \frac{10 + 24\lambda}{4} = 2.5 + 6\lambda$$

und damit L_1 :

$$x = \frac{9 + 2\lambda - (2.5 + 6\lambda)}{2} = 3.25 - 2\lambda$$

Wir können die Lösung in zwei Formen schreiben

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 - 2\lambda \\ 2.5 + 6\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Es gibt keine freie Variable, also gibt es keinen Richtungsvektor der Schnittmenge. Allgemeine Lösung:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

d)

$$|7x + 3y - z = 2|$$

Die Pivot-Variable ist x und die freien Variablen y und z . Wir wählen also zuerst ($y = 1, z = 0$) und lösen das homogene LGS

$$|7x + 3 = 0| \Rightarrow x = -\frac{3}{7}$$

Nun wählen wir $y = 0, z = 1$ und lösen das homogene LGS

$$|7x - 1 = 0| \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

Die Richtungsvektoren sind

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

e) Die Richtungsvektoren sind

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

f) Die Pivot-Variablen sind x und y , die freien Variablen sind z , v und w .

- Wir wählen also zuerst ($z = 1, v = 0, w = 0$) und lösen das homogene LGS

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 5x & -2y & +1 & = 0 \\ & 3y & & = 0 \end{array} \right| \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

- Wir wählen ($z = 0, v = 1, w = 0$) und lösen das homogene LGS

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 5x & -2y & +3 & = 0 \\ & +3y & & = 0 \end{array} \right| \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

- Wir wählen ($z = 0, v = 0, w = 1$) und lösen das homogene LGS

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 5x & -2y & +4 & = 0 \\ & +3y & +1 & = 0 \end{array} \right| \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{-4 - 2 \cdot 1/3}{5} = \frac{-12 - 2}{15} = -\frac{14}{15}$$

Die Richtungsvektoren sind in dieser Reihenfolge also

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{bmatrix} -14/15 \\ -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} + \nu \cdot \vec{w}$$

mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

g) Die Pivot-Variablen sind x und z , die freien Variablen sind y , v und w .

- Wir wählen also zuerst ($y = 1, v = 0, w = 0$) und lösen das homogene LGS

$$\begin{vmatrix} -7x & -3 & +z & = & 0 \\ & & -4z & = & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{7}$$

- Wir wählen ($y = 0, v = 1, w = 0$) und lösen das homogene LGS

$$\begin{vmatrix} -7x & +z & -10 & = & 0 \\ & -4z & -7 & = & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow z = -\frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{10 + 7/4}{-7} = -\frac{47}{28}$$

- Wir wählen ($y = 0, v = 0, w = 1$) und lösen das homogene LGS

$$\begin{vmatrix} -7x & +z & -1 & = & 0 \\ & -4z & +1 & = & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow z = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1 - 1/4}{-7} = -\frac{3}{28}$$

Die Richtungsvektoren sind in dieser Reihenfolge also

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -47/28 \\ 0 \\ -7/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{bmatrix} -3/28 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -89/28 \\ 0 \\ -41/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} + \nu \cdot \vec{w}$$

mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Beispiel 8.17 Inhomogene LGS

970730

Bestimmen Sie die Lösungsmengen. Überprüfen Sie das Resultat mit Python (Befehle `mrrref` und `mnull`).

a)

$$\begin{vmatrix} E_1 : & 5x & +2y & -20z & = & 8 \\ E_2 : & x & & -4z & = & 2 \\ E_3 : & 5x & +2y & -20z & = & 9 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} E_1 : & 2x & +3y & & = & 15 \\ E_2 : & 2x & +3y & +z & = & 11 \\ E_3 : & x & +3y & & = & 12 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} E_1 : & 2x & +6y & -12z & = & 12 \\ E_2 : & & 2y & -4z & = & 2 \\ E_3 : & 2x & +6y & -12z & = & 12 \end{vmatrix}$$

Lösung:

a) Es fällt auf, dass die erste und die dritte Zeile einen Widerspruch ergeben:

$$\left| E_1 - E_3 : \quad 0 \quad +0 \quad +0 \quad = \quad -1 \quad \right|$$

Also hat das Gleichungssystem keine Lösung.

b) Das Gleichungssystem lautet in Zeilenstufenform

$$\left| \begin{array}{ccc} x & & = 3 \\ & y & -2z = 1 \\ & & 0 = 0 \end{array} \right|$$

Es gibt einen freien Parameter $z = \lambda$ und die Lösungen sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Das Gleichungssystem lautet in Zeilenstufenform

$$\left| \begin{array}{ccc} x & & = 3 \\ & y & = 3 \\ & & z = -4 \end{array} \right|$$

Dies sind die Koordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen.

Beispiel 8.18 Freie Variablen und Pivot-Variablen

863440

Bestimmen Sie freie Variablen und Pivot-Variablen und die Lösung des LGS. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Matlab (Befehle `null` und `rref`).

a)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \begin{array}{cccc} & & 2z & \\ x & +y & -4z & +u \\ 3x & +3y & -12z & +3u \end{array} \begin{array}{l} = 4 \\ = 2 \\ +v = 7 \end{array} \right|$$

b)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \begin{array}{cccc} 3x & +3y & -8z & +6u \\ x & +y & -4z & +2u \\ 5x & +5y & -20z & +10u \end{array} \begin{array}{l} = 14 \\ +v = 3 \\ +3v = 13 \end{array} \right|$$

Lösung:

a) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{l} E'_1 = E_2 : \\ E'_2 = E_3 : \\ E'_3 = E_1 : \end{array} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -12 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} E''_1 = E'_1 : \\ E''_2 = E'_2 - 3E'_1 : \\ E''_3 = E'_3 : \end{array} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} E'''_1 = E''_1 : \\ E'''_2 = E''_3 : \\ E'''_3 = E''_2 : \end{array} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & u & v & \\ \hline 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

x , z und v sind Pivot-Variablen und y und u sind freie Variablen. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($y = u = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{l} E'''_1 : \\ E'''_2 : \\ E'''_3 : \end{array} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & u & v & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow v = 1 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = 2 + 4 \cdot 2 = 10$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_p = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.

Für $y = 1$ und $u = 0$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{l} E'''_1 : \\ E'''_2 : \\ E'''_3 : \end{array} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & u & v & \\ \hline 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = -1$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{h,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $y = 0$ und $u = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1''' = E_1'' & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ E_2''' = E_3'' & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ E_3''' = E_2'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = -1$$

Die zweite homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{h,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet schliesslich

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{cccc|c} E_1' = E_2 & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ E_2' = E_1 & 3 & 3 & -8 & 6 & 0 & 14 \\ E_3' = E_3 & 5 & 5 & -20 & 10 & 3 & 13 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} E_1'' = E_1' & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ E_2'' = E_2' - 3E_1' & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 5 \\ E_3'' = E_3' - 5E_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

x , z und v sind Pivot-Variablen und y und u sind freie Variablen. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($y = u = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1'' & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ E_2'' & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 5 \\ E_3'' & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow v = 1 \Rightarrow z = 5 + 3 \cdot 14 = 2 \Rightarrow x = 3 + 4 \cdot 2 - 1 = 10$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_p = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.

Für $y = 1$ und $u = 0$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1'' : & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ E_2'' : & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ E_3'' : & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = -1$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{h,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $y = 0$ und $u = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} & x & y & z & u & v & \\ \hline E_1'' : & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ E_2'' : & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ E_3'' : & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = -2$$

Die zweite homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{h,2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet schliesslich

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.4 Geometrische Interpretation der Lösung

Beispiel 8.19 Struktur der Lösung eines LGS

181322

Gegeben sind verschiedene Lösungen der linearen Gleichungssysteme. Bestimmen Sie die Richtungsvektoren der homogenen Lösung.

1. Setzen Sie dafür in das LGS ein.
2. Überprüfen Sie ihr Resultat mit Matlab indem Sie die Lösung mit der Koeffizienten-Matrix multiplizieren.

a)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \quad -x \quad +2y \quad -3z \quad = \quad 0 \\ E_2 : \quad -2x \quad +5y \quad -6z \quad = \quad 0 \\ E_3 : \quad \quad x \quad +3y \quad +3z \quad = \quad 0 \end{array} \right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \quad 9x \quad -6y \quad -5z \quad = \quad -16 \\ E_2 : \quad 6x \quad -4y \quad 8z \quad = \quad 12 \\ E_3 : \quad -12x \quad +8y \quad +4z \quad = \quad 16 \end{array} \right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -14/3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 28/3 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- a) Der Richtungsvektor der Lösung ist

$$\vec{a} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in das LGS ergibt sich

$$\begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \left| \begin{array}{cccc} -21 & +0 & +21 & = 0 \\ -42 & +0 & +42 & = 0 \\ 21 & +0 & -21 & = 0 \end{array} \right|$$

D.h. \vec{a} ist eine homogene Lösung des LGS.

Übrigens, das Gleichungssystem in Zeilenstufenform lautet

$$\left| \begin{array}{ccc} x & +3z & = 0 \\ & y & = 0 \\ & & 0 = 0 \end{array} \right|$$

b) Der Richtungsvektor der Lösung ist

$$\vec{a} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -14 \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in das LGS ergibt sich

$$\begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 9 \cdot (-14) & -6 \cdot (-21) & +0 = 0 \\ 6 \cdot (-14) & -4 \cdot (-21) & +0 = 0 \\ -12 \cdot (-14) & +8 \cdot (-21) & +0 = 0 \end{array} \right|$$

Übrigens, das Gleichungssystem in Zeilenstufenform lautet

$$\left| \begin{array}{ccc} 3x & -2y & = -2 \\ & & z = 2 \\ & & 0 = 0 \end{array} \right|$$

Beispiel 8.20 Schnittgerade von Ebenen

042736

Die Ebenen E_1 und E_2 (und E_3) schneiden sich in einer Geraden g .

- Bestimme eine Parameterdarstellung von g
- Überprüfe das Resultat mit Matlab (Befehle `null` und `rref`).

a)

$$\begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \end{array} \left| \begin{array}{cccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 - 1 & = 0 \\ 6x_1 & +x_2 & -x_3 & = 5 \end{array} \right|$$

b)

$$\begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \\ E_3 : \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 4x & +4y & -16z = 4 \\ x & & -4z = 2 \\ 5x & +2y & -20z = 8 \end{array} \right|$$

c)

$$\begin{array}{l} E_1 : \\ E_2 : \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 3x_1 & +5x_2 & -x_3 = 7 \\ -x_1 & +5x_2 & -6x_3 = 0 \end{array} \right|$$

Lösung:

a) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{l} E'_1 = E_1 : \\ E'_2 = E_2 - 6E_1 : \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -13 & -1 \end{array} \right]$$

x und y sind Pivot-Variablen und z ist eine freie Variable. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($z = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline E'_1 : & 1 & -1 & 0 & 1 \\ E'_2 : & 0 & 7 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow y = -1/7 \Rightarrow x = 1 - 1/7 = 6/7$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_p = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.

Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline E'_1 : & 1 & -1 & 2 & 0 \\ E'_2 : & 0 & 7 & -13 & 0 \end{array} \right]$$
$$\Rightarrow y = \frac{13}{7} \Rightarrow x = \frac{13}{7} - 2 = -\frac{1}{7}$$

Eine homogene Lösung ist also (skalieren):

$$\vec{l}_{h,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung (Gleichung der Schnittgeraden) lautet schliesslich

$$\vec{u} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{l} E'_1 = E_2 : \\ E'_2 = E_3 : \\ E'_3 = E_1 : \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -20 & 8 \\ 4 & 4 & -16 & 4 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} E_1'' = E_1' : \\ E_2'' = E_2' - 5E_1' : \\ E_3'' = E_3' - 4E_1' : \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \hline \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ E_1''' = E_1'' : & 1 & 0 & -4 & 2 \\ E_2''' = E_2''/2 : & 0 & 1 & 0 & -1 \\ E_3''' = E_3'' - 2E_2'' : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

x und y sind Pivot-Variablen und z ist eine freie Variable. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($z = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \hline \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ E_1''' : & 1 & 0 & 0 & 2 \\ E_2''' : & 0 & 1 & 0 & -1 \\ E_3''' : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 2$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.

Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \hline \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ E_1''' : & 1 & 0 & -4 & 0 \\ E_2''' : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E_3''' : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 4$$

Eine homogene Lösung ist also

$$\vec{l}_{h,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung (Gleichung der Schnittgeraden) lautet schliesslich

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wir stellen um und eliminieren

$$\left[\begin{array}{l} E'_1 = -E_2 : \\ E'_2 = E_1 + 3E_2 : \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 20 & -19 & 7 \end{array} \right]$$

x und y sind Pivot-Variablen und z ist eine freie Variable. Wir berechnen *eine* partikuläre Lösung. Dafür setzen wir alle freien Variablen gleich 0 ($z = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline E'_1 : & 1 & -5 & 0 \\ E'_2 : & 0 & 20 & 7 \end{array} \right]$$
$$\Rightarrow y = \frac{7}{20} = \frac{7}{20} \Rightarrow x = 5 \cdot \frac{7}{20} = \frac{35}{20}$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$\vec{l}_p = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 35 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die homogenen Lösungen setzen wir nacheinander einen freien Parameter gleich 1 und die anderen gleich 0 und setzen in die homogene Gleichung ein.

Für $z = 1$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline E'_1 : & 1 & -5 & 6 \\ E'_2 : & 0 & 20 & -19 \end{array} \right]$$
$$\Rightarrow y = \frac{19}{20} \Rightarrow x = 5 \cdot \frac{19}{20} - 6 = -\frac{25}{20}$$

Eine homogene Lösung ist also (skalieren):

$$\vec{l}_{h,1} = \begin{pmatrix} -25 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung (Gleichung der Schnittgeraden) lautet schliesslich

$$\vec{u} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 35 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -25 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

8.5 Ebenen in \mathbb{R}^3

Die drei Fälle bei linearen Gleichungssystemen (inkonsistent, konsistent mit einer Lösung, konsistent mit unendlich vielen Lösungen) lassen sich in drei Dimensionen \mathbb{R}^3 veranschaulichen. Damit schlagen wir auch eine Brücke zur Vektorgeometrie. Wir stellen fest, dass die lineare Gleichung $a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z = b$ einer Ebene in \mathbb{R}^3 entspricht. Beim Aufstellen von linearen Gleichungssystemen suchen wir Punk-

te, die alle Gleichungen erfüllen, d.h. die Schnittmenge der Ebenen. Die folgenden Beispiele erläutern die möglichen Situationen.

Definition Homogene und inhomogene LGSs

Ein LGS, in dem alle Konstanten Null sind heisst **homogen**, sonst **inhomogen**.

Wir erkennen in \mathbb{R}^3 , dass ein homogenes LGS der Situation entspricht, bei der alle Ebenen durch $\vec{0}$ verlaufen.

Beispiel 8.21 Schnittmengen von Ebenen in \mathbb{R}^3 , die nicht durch $\vec{0}$ 331889

Berechne die Schnittmenge der Ebenen.

a)

$$\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 2x + z = -3 \\ 3x + 3y = -4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 2y + z = 2 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 2x + z = -3 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

Lösung:

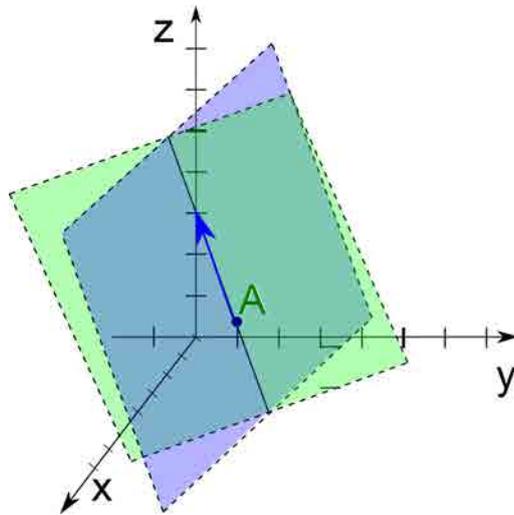
a) Die erweiterte Koeffizienten-Matrix lautet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

z erscheint als freie Variable. Allgemeine Lösung

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

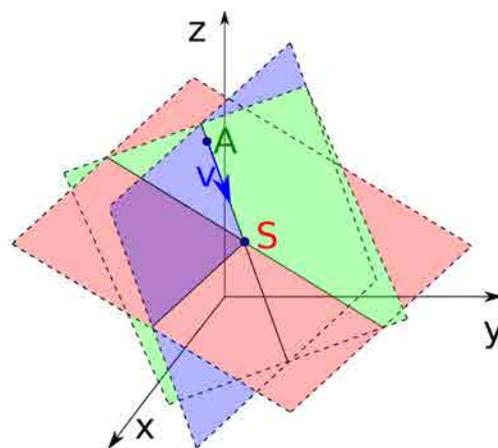
Es handelt sich hier um eine konsistentes lineares Gleichungssystem. Da wir aber weniger Gleichungen als Variablen haben, gibt es eine freie Variable.



b) Die erweiterte Koeffizienten-Matrix lautet

$$\left| \begin{array}{cccc|c} L_1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ L_2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ L_3 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} L'_1 = L_1 : \\ L'_2 = L_2 : \\ L'_3 = L_3 - L_1 : \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right| \Rightarrow \vec{S} := \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich bei \vec{S} um den Schnittpunkt von drei windschiefen Ebenen. Wenn also das lineare Gleichungssystem konsistent ist und genau eine Lösung besitzt, entspricht das dem Schneiden von windschiefen Ebenen. — Oder anders ausgedrückt: Zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Diese Gerade schneidet die dritte Ebene in einem Punkt, wie in der Grafik veranschaulicht. Die Schnittgerade hat einen Aufpunkt \vec{A} und den Richtungsvektor \vec{v} und schneidet die dritte Ebene im Punkt \vec{S} .



c) Die erweiterte Koeffizienten-Matrix lautet

$$\left| \begin{array}{ccc|c} L_1: & 1 & 3 & -1 \\ L_2: & 2 & 0 & 1 \\ L_3: & 3 & 3 & 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} L'_1 = L_1: & 1 & 3 & -1 \\ L'_2 = L_2 - 2L_1: & 0 & -6 & 3 \\ L'_3 = L_3 - 3L_1: & 0 & -6 & 3 \end{array} \right|$$

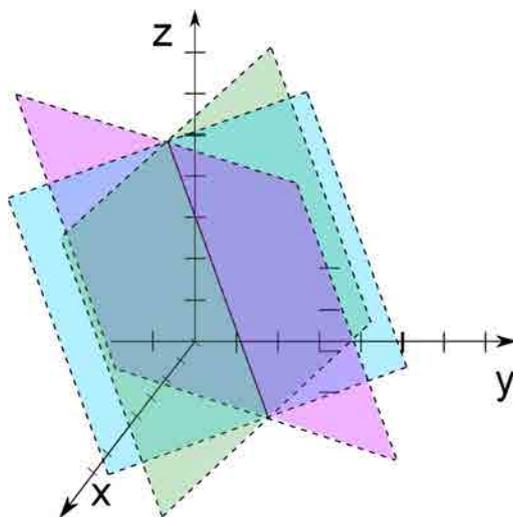
und weiter

$$\left| \begin{array}{ccc|c} L''_1 = L'_1: & 1 & 3 & -1 \\ L''_2 = L'_2: & 0 & -6 & 3 \\ L''_3 = L'_3 - L'_2: & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \text{ also } \vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\mu}{2} \\ \frac{1}{6} + \frac{\mu}{2} \\ \mu \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}$$

Es handelt sich bei \vec{u} um eine Schnittgerade. Sie liegt zufällig in der dritten Ebene. Dies wird noch besser ersichtlich, wenn wir den Aufpunkt und den Richtungsvektor separat schreiben. Ausserdem strecken wir den Richtungsvektor mit um den Faktor 2, so vermeiden wir Brüche

$$\vec{u} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Fall des konsistenten linearen Gleichungssystems mit unendlich vielen Lösungen entspricht also dem Fall, wo die Lösungsmenge ausgedehnt ist und nicht nur aus einem Punkt besteht.

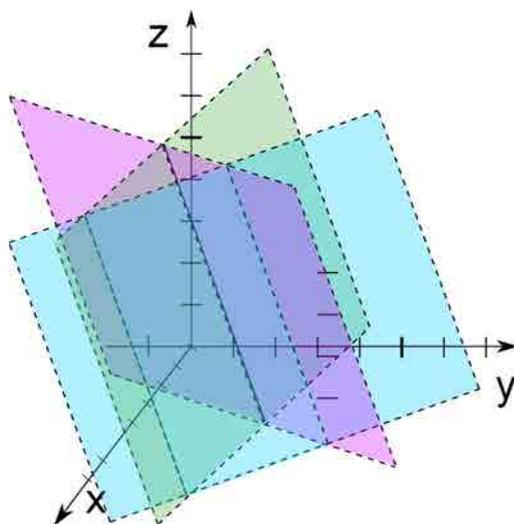


d) Die erweiterte Koeffizienten-Matrix lautet

$$\left| \begin{array}{ccc|c} L_1: & 1 & 3 & -1 \\ L_2: & 2 & 0 & 1 \\ L_3: & 3 & 3 & 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} L'_1 = L_1: & 1 & 3 & -1 \\ L'_2 = L_2 - 2L_1: & 0 & -6 & 3 \\ L'_3 = L_3 - 3L_1: & 0 & -6 & 3 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} L''_1 = L'_1: & 1 & 3 & -1 \\ L''_2 = L'_2: & 0 & -6 & 3 \\ L''_3 = L'_3 - L'_2: & 0 & 0 & 4 \end{array} \right|$$

Es handelt sich hier um ein inkonsistentes lineares Gleichungssystem. Geometrisch bedeutet dies, dass zwei Ebenen sich in einer Geraden schneiden, dass aber die dritte Ebene parallel zu dieser Geraden steht. So ergibt sich kein Schnittpunkt.



Homogene LGSs: Ebenen, die durch $\vec{0}$ gehen

Beispiel 8.22 Ebenen in \mathbb{R}^3

185060

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left| \begin{array}{l} L_1 : \quad -12y + 6z = 0 \\ L_2 : \quad 2x + 6y - 2z = 0 \\ L_3 : \quad 4x - 12y + 8z = 0 \end{array} \right|.$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

Lösung:

Es macht keinen Sinn in der Koeffizienten-Matrix die Nullen der Inhomogenität $\vec{b} = \vec{0}$ mitzunehmen. Bei den Zeilenumformungen werden dort stets Nullen stehen. Also schreiben wir die nur die Koeffizienten-Matrix auf:

$$\left| \begin{array}{l} L'_1 = L_2/2 : \quad 1 \quad 3 \quad -1 \\ L'_2 = L_3/4 : \quad 1 \quad -3 \quad 2 \\ L'_2 = L_1/6 : \quad 0 \quad -2 \quad 1 \end{array} \right| \text{ also } \left| \begin{array}{l} L''_1 = L'_1 : \quad 1 \quad 3 \quad -1 \\ L''_2 = L'_2 - L'_1 : \quad 0 \quad -6 \quad 3 \\ L''_3 = L'_3 : \quad 0 \quad -2 \quad 1 \end{array} \right|$$

und weiter

$$\left| \begin{array}{l} L'''_1 = L''_1 : \quad 1 \quad 3 \quad -1 \\ L'''_2 = L''_2 : \quad 0 \quad -6 \quad 3 \\ L'''_3 = 3L''_3 - L''_2 : \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right|$$

z ist eine freie Variable. Die Ebenen, die alle den Abstand 0 vom Ursprung haben — ihre Konstante ist 0 — schneiden sich im Ursprung, d.h. der Aufpunkt der

Schnittgeraden ist $\vec{0}$ und der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Infobox Die triviale Lösung eines homogenen LGS

Ein homogenes LGS hat stets die Lösung $\vec{0}$.

Aus der geometrischen Anschauung ist dies klar: Die Konstanten der Ebenen sind 0, d.h. alle Ebenen gehen durch den Ursprung und schneiden sich da also. In den Anwendungen interessiert uns aber diese Lösung oft nicht.

Beispiel 8.23 Ebenen in \mathbb{R}^3

807042

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left| \begin{array}{l} L_1 : \quad -2y + 4z = 0 \\ L_2 : 4x + 16y + 21z = 0 \\ L_3 : \quad 2x + 10y + 6z = 0 \end{array} \right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

Lösung:

Es macht keinen Sinn in der Koeffizienten-Matrix die Nullen der Inhomogenität $\vec{b} = \vec{0}$ mitzunehmen. Bei den Zeilenumformungen werden dort stets Nullen stehen. Also schreiben wir die nur die Koeffizienten-Matrix auf:

$$\left| \begin{array}{l} L'_1 = L_3/2 : \quad 1 \quad 5 \quad 3 \\ L'_2 = L_2 : \quad 4 \quad 16 \quad 21 \\ L'_3 = L_1/2 : \quad 0 \quad -1 \quad 2 \end{array} \right| \text{ also } \left| \begin{array}{l} L''_1 = L'_1 : \quad 1 \quad 5 \quad 3 \\ L''_2 = L'_2 - 4L'_1 : \quad 0 \quad -4 \quad 9 \\ L''_3 = L'_3 : \quad 0 \quad -1 \quad 2 \end{array} \right|$$

und weiter

$$\left| \begin{array}{l} L'''_1 = L''_1 : \quad 1 \quad 5 \quad 3 \\ L'''_2 = L''_2 : \quad 0 \quad -4 \quad 9 \\ L'''_3 = 4L''_3 - L''_2 : \quad 0 \quad 0 \quad -1 \end{array} \right|$$

Die unterste Gleichung $-x_3 = 0$ führt auf $\vec{u} = \vec{0}$, d.h. ohne spezielle Lage schneiden sich die Ebenen, die durch den Ursprung gehen nur im Ursprung.

Infobox Lösungsmenge eines homogenen LGS

Ein homogenes LGS hat nur dann nicht-triviale Lösungen, falls die Ebenen eine spezielle Lage haben.

In diesen Fällen sind die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig.

9.1	Zeilen und Spalten einer Matrix	207
9.2	Summen von Matrizen, Multiplikation mit einer Zahl	211
9.3	Matrix-Produkt mit dem Falk-Schema	214
9.4	Matrix-Produkt: assoziativ und distributiv, aber nicht kommutativ	216
9.5	Koeffizienten Matrix, Rang	221
9.6	Standardform von linearen Gleichungssystemen	223
9.7	Produkt einer Matrix mit einem Vektor	228
9.8	Spezielle Matrizen	232

Im vorherigen Kapitel haben wir die erweiterte Koeffizienten-Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

kennen gelernt. Wir haben schon festgestellt, dass die Darstellung von linearen Gleichungssystemen in dieser Form praktisch ist, weil sie uns viel Schreibarbeit erspart und andererseits, weil sie übersichtlich ist und damit Fehler bei den Umformungen verhindert. Deshalb werden wir erforschen welche weiteren Probleme wir mit Hilfe von Matrizen lösen können.

Um das Wichtigste vorwegzunehmen: Wir werden finden, dass alle Fragestellungen, die lineare Gleichungssysteme beinhalten mit Matrizen geschrieben werden sollen. Und wir werden deshalb zahlreiche davon so formulieren, dass wir darin lineare Gleichungssysteme erkennen.

9.1 Zeilen und Spalten einer Matrix

Definition Matrix

Eine Matrix ist ein rechteckige Tabelle mit Zahlen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Die **Zeilen** der Matrix sind die m horizontalen Listen

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

und die **Spalten** sind die n vertikalen Listen

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Oft werden wir die Matrix einfach mit einem Grossbuchstaben¹ schreiben $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Die Elemente a_{ij} stehen in der i -ten Zeile und in der j -ten Spalte.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennen wir eine m mal n Matrix und schreiben dafür entweder $m \times n$ oder $\mathbb{R}^{m \times n}$ um noch anzugeben, aus welchem Zahlenbereich die Einträge gewählt werden (hier aus der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}).

Definition Spaltenvektor und Zeilenvektor

n Spalten \rightarrow

$$\begin{matrix} \leftarrow m \text{ Zeilen} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Eine Matrix mit einer Spalte nennen wir **Spaltenvektor**, eine Matrix mit einer Zeile nennen wir **Zeilenvektor**. Für die m mal n Matrix \mathbf{A} schreiben wir die Spaltenvektoren auch als

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{:,1}, \mathbf{a}_{:,2}, \dots, \mathbf{a}_{:,n}]$$

und die Zeilenvektoren

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{1,:}, \mathbf{a}_{2,:}, \dots, \mathbf{a}_{m,:}] .$$

Wir übernehmen dabei die Notation aus Matlab: $,$ bedeutet nächstes Element, $;$ bedeutet nächste Zeile und $:$ bedeutet 'nimm alle Einträge'.

Um zu betonen, dass es sich um Vektoren handelt, schreiben wir manchmal auch

$$\mathbf{A} = [\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n]$$

¹in Fettschrift

für die Spaltenvektoren und für die Zeilenvektoren

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \dots; \mathbf{A}_n] .$$

Beispiel 9.1 Zeilen und Spalten

711244

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Für M bestimme

- a) die zweite Spalte,
- b) die dritte Zeile,
- c) die Dimension.

Lösung:

- a) die zweite Spalte,

$$\mathbf{a}_{:,2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- b) die dritte Zeile,

$$\mathbf{a}_{3,:} = (0 \quad 4 \quad 3)$$

- c) die Dimension: es ist eine 4×3 Matrix

Beispiel 9.2 Zeilen und Spalten

600133

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 9 & 5 & 9 \\ 6 & -3 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Für M bestimme

- a) die vierte Spalte,
- b) die zweite Zeile,
- c) die Dimension.

Lösung:

a) die vierte Spalte,

$$\mathbf{a}_{:,4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b) die zweite Zeile,

$$\mathbf{a}_{2,:} = (-3 \ 5 \ 9 \ 5 \ 9)$$

c) die Dimension: es ist eine 3×5 Matrix

Definition Transponierte Matrix

Die Transponierte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ist } \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Die Elemente der transponierten Matrix \mathbf{A}^\top sind

$$(\mathbf{a}^\top)_{ij} = a_{ji} ,$$

d.h. die Indices werden vertauscht.

Definition Symmetrisch und antisymmetrische Matrizen

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heiss **symmetrisch**, falls

$$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$$

oder **antisymmetrisch** falls

$$\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$$

Beispiel 9.3 Transponierte

869494

Bestimme die Transponierte der folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 7 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^T = [7 \quad 9 \quad 3], \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Beispiel 9.4 Transponierte

758383

Bestimme die Transponierte der folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [5 \quad -3 \quad 8 \quad 5], \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 7 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Beispiel 9.5 Symmetrische/Antisymmetrische Matrizen

340726

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Transponierten und entscheiden Sie anschliessend, ob die Matrizen symmetrisch oder antisymmetrisch sind.

Lösung:

C ist symmetrisch, denn es gilt

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C}.$$

B ist antisymmetrisch, denn es gilt

$$\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}.$$

Satz Gesetze für die Transponierte

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \odot \mathbf{A}^T$
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

9.2 Summen von Matrizen, Multiplikation mit einer Zahl

Infobox Summen von Matrizen, Multiplikation mit einer Zahl

Die Matrix $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kann mit der Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden

$$\mathbf{C} = \lambda \cdot \mathbf{A} \text{ mit } c_{i,j} = \lambda \cdot a_{i,j} .$$

Die Matrizen \mathbf{A} und $\mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{k \times l}$ können addiert und subtrahiert werden

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \text{ mit } s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \text{ und } \mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{ mit } d_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$$

falls sie in den Dimensionen übereinstimmen, d.h. $m = k$ und $n = l$.

Selten benutzen wir auch die elementweise Multiplikation von Matrizen, falls Sie in den Dimensionen übereinstimmen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ mit } e_{i,j} = a_{i,j} \cdot b_{i,j}$$

Auf dem Papier notieren wir die elementweise Multiplikation mit \cdot und in Matlab mit $.*$. Das Matrixprodukt hingegen ist auf dem Papier \odot und in Matlab $*$.

Leider unterscheiden viele Texte nicht zwischen den beiden Arten der Multiplikation. Häufig wird dort einfach \cdot oder nur ein Leerzeichen für die das Matrixprodukt geschrieben.

Beispiel 9.6 Summe Matrizen

Betrachten Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 7 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Überlegen Sie zuerst, welche der folgenden Ausdrücke existieren. Berechnen Sie dann die Resultate.

- a) $\mathbf{C} + \mathbf{D}$ c) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
b) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$ d) $2 \cdot \mathbf{A}$

Lösung:

$$\text{a) } \mathbf{C} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & -7 \\ 11 & 15 & 5 \\ -1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -16 & -15 & -9 \\ -20 & 48 & -3 \\ 8 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ keine Lösung

$$\text{d) } 2 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Beispiel 9.7 Summe von Matrizen, Multiplikation mit Skalar

WEWKTK

Betrachten Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 7 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = [0 \ 7 \ -6].$$

Überlegen Sie zuerst, welche der folgenden Ausdrücke existieren. Berechnen Sie dann die Resultate.

Befehle: + - .*

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$

e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}$

i) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$

b) $3 \cdot \mathbf{B}$

f) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}^T$

j) $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$

c) $\mathbf{E} + \mathbf{F}$

g) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$

d) $\mathbf{E} + \mathbf{F}^T$

h) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{E}$

k) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}$

Lösung:

$$\text{a) } \mathbf{A} + \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } 3 \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

c) $\mathbf{E} + \mathbf{F}$ nicht definiert

$$\text{d) } \mathbf{E} + \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}$ nicht definiert

f) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}^T$ nicht definiert

$$\text{a) } \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 49 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{E}$ nicht definiert

c) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ nicht definiert

$$\text{d) } \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -9 \\ 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}$ nicht definiert

9.3 Matrix-Produkt mit dem Falk-Schema

Definition Matrix-Produkt, Falk-Schema

Mit dem Falk-Schema lassen sich die Produkte von Matrizen berechnen.

$$C \odot D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 66 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

- 1) Dazu werden die Matrizen in ein Raster geschrieben. C links unten, D rechts oben
- 2) Jeder Kreuzungspunkt von einer Zeile und einer Spalte ergibt einen Eintrag in der resultierenden Matrix.
- 3) Die neuen Elemente berechnet man aus dem *Skalarprodukt* aus einer Zeile und einer Spalte.

Achtung: Das Matrix-Produkt existiert nur dann, wenn die Zeilen C und die Spalten D gleich viele Einträge haben.

Beispiel 9.8 Produkt von zwei Matrizen

AIX1U0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Berechne die Produkte

a) $A \odot B$

b) $C \odot D$

c) $E \odot F$

Lösung:

a) $A \odot B = \begin{pmatrix} 18 & -2 & 2 \\ 33 & 18 & 27 \\ 19 & 14 & 9 \end{pmatrix}$

b) $C \odot D = \begin{pmatrix} -26 & 66 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{E} \odot \mathbf{F}$ ist nicht definiert

Beispiel 9.9 Produkt von zwei Matrizen

CKZ2V1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 5 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechne die Produkte

a) $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$

b) $\mathbf{C} \odot \mathbf{D}$

c) $\mathbf{E} \odot \mathbf{F}$

d) $\mathbf{E} \odot \mathbf{C}$

Lösung:

$$\text{a) } \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 26 & 12 \\ -12 & 23 & 26 \\ 33 & -9 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{C} \odot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{E} \odot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4 & 79 \\ 6 & 25 \end{pmatrix}$$

d) $\mathbf{E} \odot \mathbf{C}$ nicht definiert

Beispiel 9.10 Matrixprodukt

SY7RC5

Wir haben \mathbf{A} mit m Spalten und \mathbf{B} mit p Zeilen. Das Matrix Produkt $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ existiert nur, falls $m = p$. Betrachten Sie nun die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 7 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = [0 \ 7 \ -6],$$

Überlegen Sie zuerst, welche der folgenden Ausdrücke existieren. Berechnen Sie dann die Resultate.

Befehle: + - .*

a) $\mathbf{D} \odot \mathbf{C}$

e) $\mathbf{F} \odot \mathbf{E}$

i) $(\mathbf{C} + \mathbf{D}) \odot \mathbf{E}$

b) $\mathbf{B} \odot \mathbf{F}$

f) $\mathbf{C} \odot \mathbf{E}$

j) $(\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}) \odot \mathbf{E}$

c) $\mathbf{B} \odot \mathbf{F}^\top$

g) $\mathbf{C}^\top \odot \mathbf{C}$

k) $(\mathbf{C}^\top + \mathbf{D}) \odot (\mathbf{B}^\top + \mathbf{A})$

d) $\mathbf{E} \odot \mathbf{E}$

h) $\mathbf{C} \odot \mathbf{F}$

Lösung:

a) $\mathbf{D} \odot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -16 & -15 & -9 \\ -20 & 48 & -3 \\ 8 & 15 & 9 \end{pmatrix}$

g) $\mathbf{C}^\top \odot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 80 & 24 & 44 \\ 24 & 45 & 21 \\ 44 & 21 & 26 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} \odot \mathbf{F}$

h) $\mathbf{C} \odot \mathbf{F}$

c) $\mathbf{B} \odot \mathbf{F}^\top = \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \end{pmatrix}$

i) $(\mathbf{C} + \mathbf{D}) \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 42 \\ -67 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{E} \odot \mathbf{E}$

j) $(\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}) \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{F} \odot \mathbf{E} = (-12)$

k) $(\mathbf{C}^\top + \mathbf{D}) \odot (\mathbf{B}^\top + \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -23 & -39 \\ 62 & 61 \\ -23 & -36 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{C} \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 48 \\ -22 \\ -2 \end{pmatrix}$

9.4 Matrix-Produkt: assoziativ und distributiv, aber nicht kommutativ

Definition Matrixprodukt

Die Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ können multipliziert werden

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} \text{ mit } c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

falls sie in den Dimensionen übereinstimmen, d.h. $m = p$.

Definition Drehungen in \mathbb{R}^2

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{R}(\varphi)$ stellt eine Rotation im Gegenuhrzeigersinn in der $x - y$ -Ebene dar.

$$\mathbf{a)} \quad A \odot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 24 & 12 \\ 55 & 62 & 52 \\ 75 & 54 & 41 \\ 66 & 21 & 38 \end{pmatrix} = C$$

$$\mathbf{b)} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 27 & 24 & 12 \\ 55 & 62 & 52 \\ 75 & 54 & 41 \\ 66 & 21 & 38 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{c)} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 2 \\ 4 & b_{22} & 3 \\ 6 & b_{32} & 4 \\ 4 & b_{42} & 2 \\ 5 & b_{52} & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 3 & 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 27 & 24 & 12 \\ 55 & 62 & 52 \\ 75 & c_{32} & 41 \\ 66 & 21 & 38 \end{pmatrix} \end{array}$$

Abbildung 9.1: **a)** Wir betrachten das Produkt der Matrizen A und B . Das Resultat nennen wir C . **b)** Wir wählen einen Eintrag in C aus, und verfolgen rückwärts welche Zeilen und Spalten zu diesem Element einen Beitrag geleistet haben: Es ist die 3. Zeile in A und die 2. Spalte in B . **c)** Nun betrachten wir die Indices aller relevanten Zeilen und Spalten. Wir sehen, dass dies $a_{3,:}$ und $b_{:,2}$ sind. Aus der Summe $\sum_{k=1}^5 a_{3,k} \cdot b_{k,2}$ ergibt sich $c_{3,2}$.

Infobox Verknüpfung von Abbildungen

Das Ausführen von Transformationen nacheinander entspricht dem **Multiplizieren von Matrizen**.

Achtung bei der Reihenfolge: Für die eine Spiegelung S und die Drehung R bedeutet $S \odot R \odot \vec{v}$, dass der Vektor \vec{v} **zuerst** gedreht und dann gespiegelt wird. Das ist etwas gewöhnungsbedürftig, weil wir sonst von links nach rechts lesen.

Beispiel 9.11 Eigenschaften der Matrixmultiplikation 2

9Y8SWL

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Berechne folgende Ausdrücke:

$$M \odot \vec{v}, M \odot \vec{w}, M \odot (2\vec{v})$$

$$M \odot (3\vec{w}), M \odot (\vec{v} + \vec{w}), M \odot (\vec{v} - \vec{w})$$

Berechne nun mit Hilfe der obigen Zwischenresultaten

$$M \odot (\vec{v} + \vec{w}) - (M \odot \vec{v} + M \odot \vec{w}), M \odot (\vec{v} - \vec{w}) - (M \odot \vec{v} - M \odot \vec{w})$$

$$M \odot (2\vec{v}) - 2M \odot \vec{v}, M \odot (3\vec{w}) - (3M \odot \vec{w})$$

Welche Rechenregeln lassen sich vermuten aufgrund der Resultate?

Lösung:

- $\mathbf{M} \odot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{M} \odot \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{M} \odot (2\vec{v}) = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} \odot (3\vec{w}) = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} \odot (\vec{v} - \vec{w}) = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

Die Differenzen anhand der Zwischenresultate ergeben immer null. Wir vermuten, dass folgende allgemeinen Regeln gelten:

- $\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}$
- $\mathbf{M} \odot (\lambda \vec{v}) = \lambda \mathbf{M} \odot \vec{v}$
- Abbildungen mit diesen Eigenschaften nennt man **lineare Abbildungen**.

Beispiel 9.12 Rechenregeln Matrix-Multiplikation 1

Y2ANUD

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = 3\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -24 & 0 & -12 \\ 12 & 18 & 9 \\ 0 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

Wir berechnen

$$\mathbf{C} \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 48 \\ -22 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{P} \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 144 \\ -66 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- Welchen Zusammenhang vermuten Sie?
- Welchen Namen hat das Gesetz, das Sie entdeckt haben?
- Können Sie Ihre Vermutung beweisen für allgemeine Matrizen?

Lösung:

a) Wir erkennen, dass

$$(3\mathbf{C}) \odot \mathbf{E} = 3 \cdot (\mathbf{C} \odot \mathbf{E})$$

- Das ist ein Assoziativgesetz. Die Multiplikation mit 3 kann an eine beliebige Matrix gekoppelt werden.
- Wir betrachten die Definitionen oben und schreiben die Elemente des Produkts als:

$$\mathbf{P} = (\lambda \cdot \mathbf{C}) \text{ mit } p_{i,j} = \lambda \cdot c_{i,j}$$

Jetzt rechnen wir das Matrixprodukt aus:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \odot \mathbf{E} \text{ mit } p_{i,j} = \sum_{k=1}^m p_{i,k} \cdot e_{k,j} = \sum_{k=1}^m (\lambda \cdot c_{i,k}) \cdot e_{k,j} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^m c_{i,k} \cdot e_{k,j}$$

Der letzte Ausdruck enthält das Matrix-Produkt $\mathbf{C} \odot \mathbf{E}$.

Beispiel 9.13 Rechenregeln Matrix-Multiplikation 2

95K4V9

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 7 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & -7 \\ 11 & 15 & 5 \\ -1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Wir berechnen

$$\mathbf{C} \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 48 \\ -22 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{D} \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -6 \\ -45 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \odot \mathbf{E} + \mathbf{D} \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 42 \\ -67 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{S} \odot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 42 \\ -67 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Welchen Zusammenhang vermuten Sie?
- Welchen Namen hat das Gesetz, das Sie entdeckt haben?
- Können Sie ihre Vermutung beweisen für allgemeine Matrizen?

Lösung:

- Wir erkennen, dass

$$\mathbf{C} \odot \mathbf{E} + \mathbf{D} \odot \mathbf{E} = (\mathbf{C} + \mathbf{D}) \odot \mathbf{E}$$

- Das ist ein Distributivgesetz. Die Multiplikation mit \mathbf{E} wird auf die Summanden verteilt.
- Wir betrachten die Definitionen oben und schreiben die Elemente der Summe als:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{C} + \mathbf{D}) \text{ mit } s_{i,j} = c_{i,j} + d_{i,j}$$

Jetzt rechnen wir das Matrixprodukt aus:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \odot \mathbf{E} \text{ mit } p_{i,j} = \sum_{k=1}^m s_{i,k} \cdot e_{k,j} = \sum_{k=1}^m (c_{i,k} + d_{i,k}) \cdot e_{k,j} = \sum_{k=1}^m c_{i,k} \cdot e_{k,j} + \sum_{k=1}^m d_{i,k} \cdot e_{k,j}$$

Die letzten beiden Ausdrücke sind die Matrix-Produkte $\mathbf{C} \odot \mathbf{E}$ und $\mathbf{D} \odot \mathbf{E}$.

Wir arbeiten mit folgenden Matrizen:

$$\mathbf{R}(90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

d.h. mit der Drehung \mathbf{R} um $\varphi = 90^\circ$ und der Spiegelung an der x -Achse. Es soll das Dreieck ABC abgebildet werden:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- i) Konstruieren Sie das Dreieck ABC gross auf ein Blatt Papier.
- ii) Berechnen Sie die Position der Ecken unter der Abbildung $\mathbf{S} \odot \mathbf{R}$ und zeichnen Sie $A'B'C'$ in die Grafik ein.
- iii) Berechnen Sie die Position der Ecken unter der Abbildung $\mathbf{R} \odot \mathbf{S}$ und zeichnen Sie $A''B''C''$ in die Grafik ein.

Lösung:

- i) Siehe Graphik.

$$\text{ii) } \vec{A}' = \mathbf{S} \odot \mathbf{R} \odot \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{B}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{C}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \vec{A}'' = \mathbf{R} \odot \mathbf{S} \odot \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B}'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hier sieht man, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, denn es ist $\vec{A}' \neq \vec{A}''$. Es kommt auf die Reihenfolge des Ausführens an!

Satz Gesetze für das Matrixprodukt

- Die Matrix-Multiplikation ist im Allgemeinen **nicht kommutativ**

$$\mathbf{M} \odot \mathbf{S} \neq \mathbf{S} \odot \mathbf{M} .$$

Es gibt aber spezielle Matrizen, trotzdem miteinander kommutieren.

- $(\mathbf{C} + \mathbf{D}) \odot \mathbf{E} = \mathbf{C} \odot \mathbf{E} + \mathbf{D} \odot \mathbf{E}$ (distributiv)
- Für $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda \cdot \mathbf{D}) \odot \mathbf{E} = \lambda \cdot (\mathbf{D} \odot \mathbf{E}) = \mathbf{D} \odot (\lambda \cdot \mathbf{E})$ (assoziativ und kommutativ mit einem Skalar)
- $(\mathbf{C} \odot \mathbf{D}) \odot \mathbf{E} = \mathbf{C} \odot (\mathbf{D} \odot \mathbf{E})$ (assoziativ)

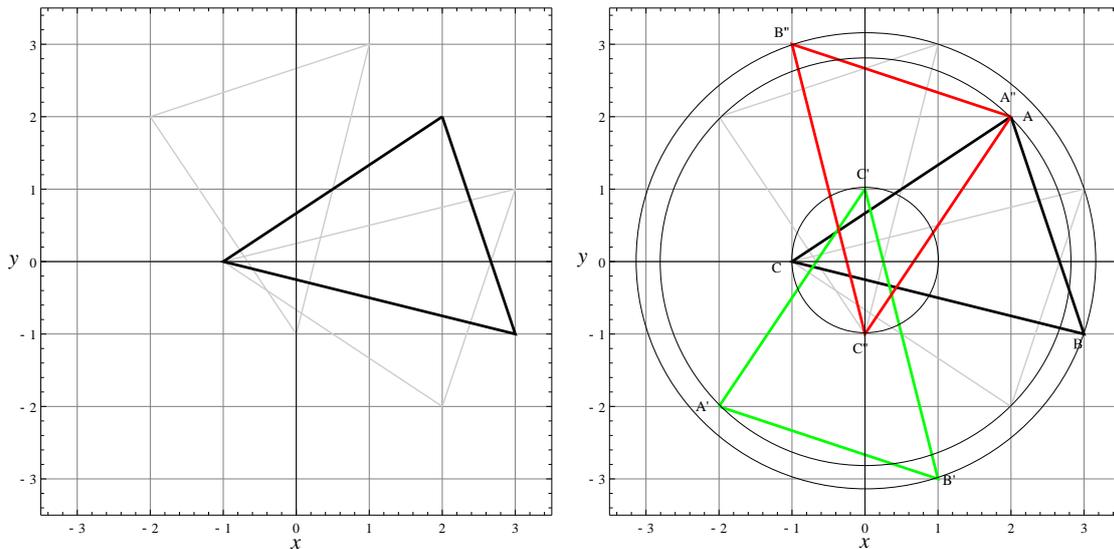


Abbildung 9.2: Zur Aufgabe 9.14

9.5 Koeffizienten Matrix, Rang

Um den Schreibaufwand zu verringern, können bei den Umformungen im Gauß-Verfahren die Unbekannten und die Gleichheitszeichen weggelassen werden. Wir schreiben dann das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} \cdot x_1 & +a_{12} \cdot x_2 & + \dots & +a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & +a_{22} \cdot x_2 & + \dots & +a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & \dots & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & +a_{m2} \cdot x_2 & + \dots & +a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array} \right| .$$

als

Definition Erweiterte Koeffizienten-Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] .$$

Beispiel 9.15 Erweiterte Koeffizienten-Matrix

958139

Schreibe das lineare Gleichungssystem als **erweiterte Koeffizienten-Matrix** und löse es mit dem Gauß-Verfahren:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & +y & +z & = & -6 \\ x & +2y & +3z & = & -10 \\ 2x & +3y & +6z & = & -18 \end{array} \right|$$

Lösung:

Die elementaren Zeilen-Operationen werden jetzt auf die Zeilen in der Matrix angewendet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -10 \\ 2 & 3 & 6 & -18 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right]$$

Durch Einsetzen erhalten wir $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 9.16 Rang Koeffizienten Matrix

UHXGXT

Beschreiben Sie die LGS aus dem Beispiel 8.4 mit folgenden Fachausdrücken

- Rang Koeffizientenmatrix
- Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix
- konsistentes/inkonsistentes LGS

Lösung:

- a) und e) Rang der Koeffizientenmatrix = Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix = Anzahl Unbekante. Konsistentes LGS
- b) c) und g) Rang der Koeffizientenmatrix = Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix < Anzahl Unbekante. Konsistentes LGS
- d), h) und f) Rang der Koeffizientenmatrix < Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix. Inkonsistentes LGS

Beispiel 9.17 Konsistentes LGS

OZDJ5L

Bestimme m , so dass das LGS konsistent ist. Bestimme dann für den gefundenen Wert die ganze Lösungsmenge (=allgemeine Lösung) des LGS.

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 3z = -5 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 5x + 7z = m - 5 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} -3x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - 5z = -5 \\ x - y - 2z = m - 3 \end{array} \right.$$

Lösung:

a) Wir eliminieren

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} L_1: 2x + y + 3z = -5 \\ L_2: 3x - y + 4z = 2 \\ L_3: 5x \quad + 7z = m - 5 \end{array} \right| \\ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} L_1: 2x + y + 3z = -5 \\ L'_2 = 2L_2 - 3L_1: 0 - 5y - z = 19 \\ L'_3 = 2L_3 - 5L_1: 0 - 5y - z = 2(m - 5) + 25 \end{array} \right| \end{array}$$

und schliesslich

$$\left| \begin{array}{l} L_1: 2x + y + 3z = -5 \\ L'_2: 0 - 5y - z = 19 \\ L''_3 = L'_3 - L'_2: 0 \quad 0 \quad 0 = 2(m - 5) + 6 \end{array} \right|$$

Das LGS ist konsistent, falls $m = 2$, sonst ist es inkonsistent, d.h. für $m = 2$ hat es unendlich viele Lösungen (Schnittgerade) und für $m \neq 2$ hat es keine Lösung. Geometrisch wird die dritte Ebene durch m im Raum verschoben. Für $m = 2$ fällt sich so, dass sie durch die Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2 verläuft.

b) Wir eliminieren

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} L_1: -3x \quad 2y \quad 3z = 1 \\ L_2: 4x \quad -y \quad -5z = -5 \\ L_3: x \quad -y \quad -2z = m - 3 \end{array} \right| \\ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} L_1: -3x \quad 2y \quad 3z = 1 \\ L'_2 = 3L_2 + 4L_1: 0 \quad 5y \quad -3z = -11 \\ L'_3 = 3L_3 + L_1: 0 \quad -y \quad -3z = 3(m - 3) + 1 \end{array} \right| \end{array}$$

und schliesslich

$$\left| \begin{array}{l} L_1: -3x \quad 2y \quad 3z = 1 \\ L'_2: 0 \quad 5y \quad -3z = -11 \\ L''_3 = 5L'_3 + L'_2: 0 \quad 0 \quad -18z = 15m - 51 \end{array} \right|$$

Das LGS ist konsistent unabhängig von der Wahl von m .

9.6 Standardform von linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme sind ein wichtiges Thema in der linearen Algebra. Wie wir sehen werden, können viele Aufgaben auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden.

Definition Lineare Gleichung

Eine **lineare Gleichung** in den Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n ist eine Gleichung, die sich in der Standard-Form

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

schreiben lässt, mit den Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n und der Konstanten b . Eine **Lösung der linearen Gleichung** ist die Liste

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

die eingesetzt in die lineare Gleichung die wahre Aussage

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n = b$$

ergibt.

Wir rechnen in \mathbb{R} , also $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$

In der Definition haben wir die Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n genannt. Wenn wir diese Indices vermeiden wollen schreiben wir stattdessen x, y, z und beschränken uns auf drei Dimensionen.

Beispiel 9.18 Lösung einer linearen Gleichung

T9XYMD

Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lösungen der folgenden linearen Gleichung?

$$5x + 2y - z = 3$$

Lösung:

Wir setzen die Liste (den Vektor) \vec{u} in die Gleichung ein und erhalten nacheinander

$$\begin{aligned} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 6 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist eine wahre Aussage, also ist \vec{u} eine Lösung.

Wir setzen danach die Liste \vec{v} in die Gleichung ein und erhalten nacheinander

$$\left| \begin{array}{rcl} 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 1 & = & 3 \\ 18 & = & 6 \end{array} \right|$$

Die letzte Zeile ist eine falsche Aussage, also ist \vec{v} keine Lösung.

Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Lösungen der folgenden linearen Gleichung?

$$x + 2y - 3z = 6$$

Lösung:

Wir setzen die Liste (den Vektor) \vec{u} in die Gleichung ein und erhalten nacheinander

$$\begin{aligned} 5 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 &= 6 \\ 5 + 4 - 3 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist eine wahre Aussage, also ist \vec{u} eine Lösung.

Wir setzen danach die Liste \vec{v} in die Gleichung ein und erhalten nacheinander

$$\left| \begin{array}{rcl} 1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 & = & 6 \\ 1 + 4 - 9 & = & 6 \\ -4 & = & 6 \end{array} \right|$$

Die letzte Zeile ist eine falsche Aussage, also ist \vec{v} keine Lösung.

Wir notieren die Lösungen von LGSs in diesem Kapitel zwar mit Kleinbuchstaben z.B. \vec{u} . Diese Lösung kann manchmal einen Aufpunkt (Schnittpunkt) beinhalten, den wir im vorherigen Kapitel mit \vec{A} notiert hätten. Wir bewegen uns am Schnittpunkt von Bereichen der Mathematik (darstellende Geometrie/ lineare Algebra), die verschiedene Notationen verwenden. Deshalb ist eine Notation, die in beiden Gebieten anwendbar ist, schwierig zu finden.

Definition Lineares Gleichungssystem, LGS

Ein **lineares Gleichungssystem** ist eine Liste von linearen Gleichung in den selben Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n .

Wir systematisieren die Schreibweise noch weiter:

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} \cdot x_1 & + a_{12} \cdot x_2 & + \dots & + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + a_{22} \cdot x_2 & + \dots & + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ & & \dots & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + a_{m2} \cdot x_2 & + \dots & + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right|$$

Dabei bezeichnet m die Anzahl der linearen Gleichungen. Die Koeffizienten a_{ij} haben jetzt zwei Indices. Der erste Index i bezeichnet die Nummer der Gleichung, der zweite bezeichnet die Unbekannte, zu der der Koeffizient gehört. Ebenfalls bezeichnet b_i , die Konstante in der i -ten Gleichung.

Ausserdem wird ein lineares Gleichungssystem **quadratisch** genannt, wenn es

gleich viele Gleichungen wie Unbekannte hat $m = n$.
 Ein lineares Gleichungssystem heisst **homogen**, falls

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Andernfalls heisst es **inhomogen**.

Beispiel 9.20 Lösung eines linearen Gleichungssystems

500997

Betrachte das System

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +4 \cdot x_3 & +3 \cdot x_4 = 5 \\ 2 \cdot x_1 & +3 \cdot x_2 & +x_3 & -2 \cdot x_4 = 1 \\ x_1 & +2 \cdot x_2 & -5 \cdot x_3 & +4 \cdot x_4 = 3 \end{array} \right|.$$

Sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems?

Lösung:

Wir setzen \vec{u} in das Gleichungssystem ein und erhalten nacheinander

$$\left| \begin{array}{l} -10 + 5 + 4 + 6 = 5 \\ -10 + 15 + 1 - 4 = 1 \\ -10 + 10 - 5 + 8 = 3 \end{array} \right| \text{ oder } \left| \begin{array}{l} 5 = 5 \\ -8 = 1 \\ 3 = 3 \end{array} \right|$$

Für die zweite Gleichung erhalten wir eine falsche Aussage, deshalb ist \vec{u} keine Lösung des linearen Gleichungssystems.

Ebenfalls setzen \vec{v} in das Gleichungssystem ein und erhalten nacheinander

$$\left| \begin{array}{l} -8 + 6 + 4 + 3 = 5 \\ -16 + 18 + 1 - 2 = 1 \\ -8 + 12 - 5 + 4 = 3 \end{array} \right| \text{ oder } \left| \begin{array}{l} 5 = 5 \\ 1 = 1 \\ 3 = 3 \end{array} \right|$$

Alle Zeilen enthalten wahre Aussagen, deshalb ist \vec{v} eine Lösung des linearen Gleichungssystems.

Beispiel 9.21 Lösung eines LGS

851082

Welcher der Vektoren erfüllt das lineare Gleichungssystem?

a) Setzen Sie dafür in das LGS ein.

b) Überprüfen Sie ihr Resultat mit Matlab indem Sie die Lösung mit der Koeffizientenmatrix multiplizieren.

a)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \quad -2y \quad = \quad 2 \\ E_2 : \quad 4x \quad -4y \quad +12z \quad = \quad 20 \\ E_3 : \quad 2x \quad \quad \quad +6z \quad = \quad 8 \end{array} \right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : \quad -2y \quad = \quad 0 \\ E_2 : \quad 8x \quad +4y \quad +12z \quad = \quad 16 \\ E_3 : \quad 4x \quad +4y \quad +6z \quad = \quad 8 \end{array} \right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 12 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in das LGS erhalten wir:

$$\mathbf{M} \odot \vec{u} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} \odot \vec{v} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} \odot \vec{w} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Also sind \vec{u} und \vec{v} Lösungen und \vec{w} ist keine Lösung.

b) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & 12 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in das LGS erhalten wir:

$$\mathbf{M} \odot \vec{u} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{M} \odot \vec{v} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} \odot \vec{w} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also sind \vec{v} und \vec{w} Lösungen und \vec{u} ist keine Lösung.

9.7 Produkt einer Matrix mit einem Vektor

Infobox Interpretation des Matrix-Produkts

Das Produkt einer Matrix mit einem Spaltenvektor kann interpretiert werden als

- als Linearkombination der Spaltenvektoren
- als 'Einsetzen einer Lösung in die Koeffizienten-Matrix'
- als Abbildung des Vektors (z.B. es wird ein Vektor gedreht oder gespiegelt).

Beispiel 9.22 Linearkombination

LQF58M

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{l} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Berechne folgende Ausdrücke

a) $-1 \cdot \vec{u} + 6 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w}$

b) $\mathbf{A} \odot \vec{l}$

Lösung:

Wir beobachten: \vec{l} enthält als Komponenten die Koeffizienten der Linearkombination. Wenn wir nun die Linearkombination

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ -10 \end{pmatrix}$$

berechnen, ergibt sich das Gleiche, wie wenn wir die Matrix \mathbf{A} mit dem Vektor \vec{l} multiplizieren

$$\mathbf{A} \odot \vec{l} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 7 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix} \odot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{l}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 9.23 Linearkombination

T46Q97

Stellen Sie folgende Linearkombinationen als Matrix-Produkt dar. Berechnen Sie dann den Vektor.

a)

$$-8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$-4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \odot \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{i}} = \begin{pmatrix} -11 \\ -38 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 15 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \odot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{i}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 9.24 Matrix mal Vektor = Einsetzen in Koeffizientenmatrix CNNZSU

Wir betrachten das LGS

$$\left| \begin{array}{l} E_1: \quad x_1 \quad -x_2 \quad +2x_3 \quad = \quad 1 \\ E_2: \quad 6x_1 \quad +x_2 \quad -x_3 \quad = \quad 5 \end{array} \right|$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

der *partikulären Lösung* (Aufpunkt)

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und der *homogenen Lösung* (Richtungsvektor)

$$\vec{x}_h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{A} \odot \vec{x}_p$ b) Setzen Sie \vec{x}_p in die linke Seite des Gleichungssystems einc) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{A} \odot \vec{x}_h$.

d) Geben Sie möglichst viele Lösungen des LGS an.

Lösung:

a) Produkt

$$\mathbf{A} \odot \vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir nennen die Liste der Koeffizienten $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} =: \vec{b}$ die Inhomogenität. Achtung: Wir bezeichnen dies als Vektor, obwohl es nicht in \mathbb{R}^3 liegt wie die Lösung, sondern in \mathbb{R}^2 .

b) Einsetzen linke Seite

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -(-2) & +2 \cdot (-1) & = 1 \\ 6 \cdot 1 & +(-2) & -(-1) & = 5 \end{array} \right|$$

Linke Seite und rechte Seite des Gleichungssystems stimmen überein, also ist \vec{x}_p tatsächlich eine partikuläre Lösung.

c) Einsetzen linke Seite

$$\mathbf{A} \odot \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist \vec{x}_h tatsächlich eine homogene Lösung, denn der Richtungsvektor \vec{x}_h steht tatsächlich senkrecht auf den Normalenvektoren der Ebenen.

d) Alle Lösungen des LGS können angegeben werden über den Ausdruck

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x}_p + \lambda \cdot \vec{x}_h \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Beispiel 9.25 Matrix mal Vektor = Einsetzen in Koeffizientenmatrix XGG-MA7

Handelt es sich bei den Lösungen unten um partikuläre Lösungen, homogene Lösungen oder gar keine Lösung?

Befehle: *

a)

$$\left| \begin{array}{ccc|c} E_1 : & 4x & +4y & -16z & = & 4 \\ E_2 : & x & & -4z & = & 2 \\ E_3 : & 5x & +2y & -20z & = & 8 \end{array} \right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left| \begin{array}{l} E_1 : 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ E_2 : -x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{array} \right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -25/20 \\ 19/20 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 35/20 \\ 7/20 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 26/20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Wir lesen die Koeffizientenmatrix aus

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -16 \\ 1 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & -20 \end{pmatrix}$$

und berechnen die Produkte

$$\mathbf{C} \odot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \odot \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \odot \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist \vec{u} eine inhomogene Lösung (Aufpunkt), \vec{v} keine Lösung und \vec{w} eine homogene Lösung (Richtungsvektor).

b) Wir lesen die Koeffizientenmatrix aus

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

und berechnen die Produkte

$$\mathbf{C} \odot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \odot \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \odot \vec{w} = \begin{pmatrix} 5.65 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

Also ist \vec{u} eine homogene Lösung (Richtungsvektor), \vec{v} eine partikuläre Lösung (Aufpunkt) und \vec{w} keine Lösung.

Wir betrachten das LGS

$$\mathbf{A} \odot \vec{x} = \vec{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, den Unbekannten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und der Inhomogenität $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Es sei \vec{x}_p eine partikuläre Lösung. Ausserdem sei $\text{Rang}(\mathbf{A}) < m$, d.h. es gibt eine homogene Lösung \vec{x}_h .

a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$\mathbf{A} \odot \vec{x}_p, \mathbf{A} \odot \vec{x}_h, \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p + \vec{x}_h), \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p - 3 \cdot \vec{x}_h), \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p - \lambda \cdot \vec{x}_h)$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die Lösung eines LGS stets die Form $\vec{x}_p + \lambda \cdot \vec{x}_h$ hat.

Lösung:

a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \odot \vec{x}_p &= \vec{b} \\ \mathbf{A} \odot \vec{x}_h &= \vec{0} \\ \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p + \vec{x}_h) &= \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} \\ \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p - 3 \cdot \vec{x}_h) &= \mathbf{A} \odot \vec{x}_p - 3 \cdot \mathbf{A} \odot \vec{x}_h = \vec{b} - 3 \cdot \vec{0} = \vec{b} \\ \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p - \lambda \cdot \vec{x}_h) &= \mathbf{A} \odot \vec{x}_p - \lambda \cdot (\mathbf{A} \odot \vec{x}_h) = \vec{b} - \lambda \cdot \vec{0} = \vec{b} \end{aligned}$$

b) Falls $\vec{x}_p + \lambda \cdot \vec{x}_h$ eine Lösung ist, dann können wir den Ausdruck ins LGS einsetzen und erhalten die Inhomogenität:

$$\mathbf{A} \odot (\vec{x}_p + \lambda \cdot \vec{x}_h) = \mathbf{A} \odot \vec{x}_p + \lambda \cdot (\mathbf{A} \odot \vec{x}_h) = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{0} = \vec{b}$$

9.8 Spezielle Matrizen

Matrizen stellen Abbildungen von Vektoren dar. Sie drehen, spiegeln, projizieren oder strecken Vektoren. Hier lernen Sie typische Matrizen kennen. Wir arbeiten mit dem Dreieck:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie es gross auf. Benennen Sie die jeweiligen Abbildungen mit Worten, z.B. Drehung, Spiegelung, Projektion usw. Beachte dazu die Innenwinkel des Dreiecks, die Kantenlängen und den Umlaufsinn des Dreiecks.

- a) Berechne und zeichne das Bild des Dreiecks unter der Abbildung $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- c) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- d) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

- a) $\{\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Die Längen und Innenwinkel bleiben erhalten. Der Umlaufsinn wechselt. \mathbf{M} ist eine Spiegelung an der y -Achse.
- b) $\{\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
Die Längen und Innenwinkel ändern. Der Umlaufsinn bleibt erhalten. \mathbf{S} ist eine Streckung mit dem Faktor 1.5 (nur in x -Richtung).
- c) $\{\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Die Längen und Innenwinkel ändern. Der Umlaufsinn verliert seine Bedeutung. \mathbf{P} ist eine Projektion auf die x -Achse.
- d) $\{\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Die Längen und Innenwinkel bleiben erhalten. Der Umlaufsinn bleibt erhalten. \mathbf{S}' ist eine Punktspiegelung am Ursprung.

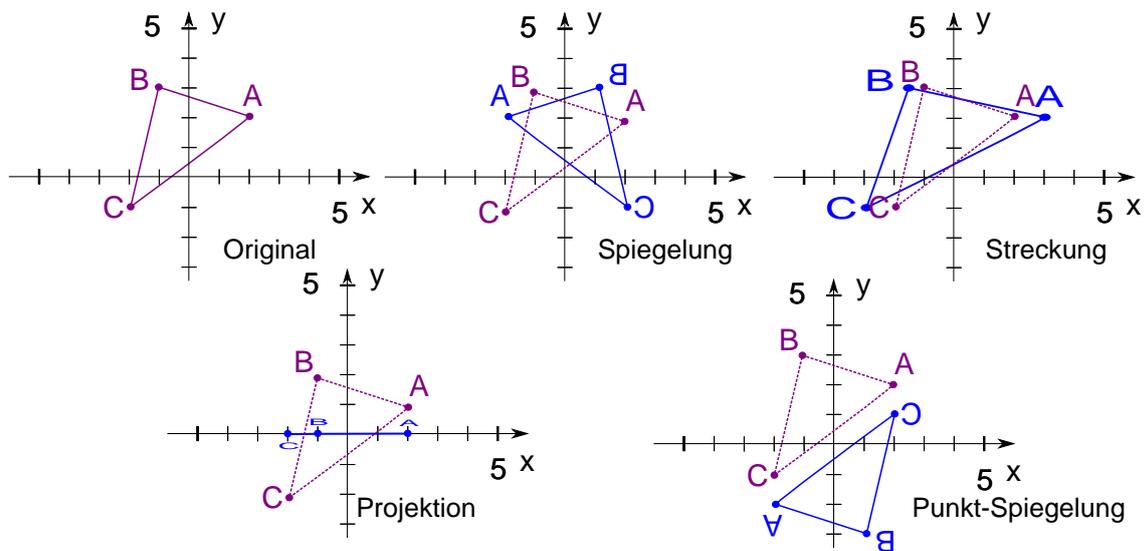


Abbildung 9.3: Zur Aufgabe 9.27. Das Original-Dreieck und die vier Bilder.

Definition Abbildungen in \mathbb{R}^2

Folgende Matrizen können als Abbildungen interpretiert werden ($s \in \mathbb{R}$):

- $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Spiegelung an der y -Achse
- $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Spiegelung an der x -Achse
- $M'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Punktspiegelung an $\vec{0}$.
- $S = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Streckung entlang der x -Achse
- $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$: Streckung entlang der y -Achse
- $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: Projektion auf die x -Achse

Definition Quadratische Matrizen

Eine quadratische Matrix A hat gleich viele Spalten wie Zeilen:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Definition Diagonalmatrix

Eine quadratische Matrix heisst Diagonalmatrix, falls alle Elemente ausserhalb der Diagonalen gleich 0 sind

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Wir schreiben auch $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, wobei a_{ii} , die Diagonalelemente sind.

Sind alle Diagonalelemente 1, so erhalten wir die Einheitsmatrix und kürzen sie mit I ab.

Sind alle Diagonalelemente 0, so erhalten wir die Nullmatrix und kürzen sie mit O ab.

Beispiel 9.28 Symmetrische und antisymmetrische Matrizen

TKB9RA

Wir betrachten jetzt nur quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir nennen eine Matrix symmetrisch, falls gilt $A^T = A$ und antisymmetrisch falls $A^T = -A$.

a) Ergänzen Sie die folgenden Matrizen zu symmetrischen und antisymmetrischen Matrizen.

Symmetrisch:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \square & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 8 \\ \square & 6 & 9 \\ \square & \square & -7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & \square & \square \\ -1 & 8 & 7 \\ 5 & \square & -2 \end{bmatrix}$$

Antisymmetrisch:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ \square & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \square & -1 & 8 \\ \square & \square & 9 \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \square & \square & 6 \\ -1 & \square & \square \\ \square & 7 & \square \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie $X = \frac{A^T + A}{2}$, $Y = \frac{A^T - A}{2}$ und $Z = X + Y$ für folgende Matrizen, wobei sie für A nacheinander die Matrizen G , H oder J einsetzen. Was stellen

Sie fest?

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -10 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -10 \\ 4 & -8 & -3 \\ 9 & 10 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

- c) Fassen Sie die Resultate von dieser Aufgabe zusammen. Beantworten Sie mindestens folgende Fragen: Wie sieht die Diagonale einer antisymmetrischen Matrix aus? Welche Symmetrie haben die Matrizen $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}}{2}$ und $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}}{2}$? Was ergibt $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$
- d) Überlegen Sie, wie Sie $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top$ aus den Transponierten \mathbf{A}^\top und \mathbf{B}^\top und berechnen können. Was bedeutet $(\mathbf{B}^\top)^\top$? Beweisen Sie damit Ihre Vermutungen aus der vorherigen Teilaufgabe.

Lösung:

- a) Ergänzen Sie die folgenden Matrizen zu symmetrischen und antisymmetrischen Matrizen.

Symmetrisch:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 8 \\ -1 & 6 & 9 \\ 8 & 9 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Antisymmetrisch:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 9 \\ -8 & -9 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{G}_x = \frac{\mathbf{G}^\top + \mathbf{G}}{2} = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_y = \frac{\mathbf{G}^\top - \mathbf{G}}{2} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} 3 & \frac{13}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} & -8 & \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -\frac{19}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{13}{2} \\ \frac{19}{2} & \frac{13}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} 3 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Wir stellen fest, dass $\frac{\mathbf{G}^\top + \mathbf{G}}{2}$ eine symmetrische Matrix ergibt und $\frac{\mathbf{G}^\top - \mathbf{G}}{2}$ immer eine antisymmetrische.

Ausserdem sind \mathbf{G}_z , \mathbf{H}_z , \mathbf{J}_z wieder die Ausgangsmatrizen, z.B. $\mathbf{G}_z = \mathbf{G}$

c) Die Diagonale einer antisymmetrischen Matrix besteht aus lauter Nullen. $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}}{2}$ ist symmetrisch, $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}}{2}$ ist antisymmetrisch.

d) Es gilt

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$$

und $(\mathbf{B}^\top)^\top = \mathbf{B}$. Daraus können wir die Symmetrie von \mathbf{X} und \mathbf{Y} berechnen:

$$\mathbf{X}^\top = \left[\frac{\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}}{2} \right]^\top = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{A}^\top + (\mathbf{A}^\top)^\top] = \frac{\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}}{2} = \mathbf{X}$$

und

$$\mathbf{Y}^\top = \left[\frac{\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}}{2} \right]^\top = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{A}^\top - (\mathbf{A}^\top)^\top] = \frac{\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}}{2} = -\mathbf{Y}$$

10.1 Linearität einer Abbildung \mathcal{L} überprüfen	238
10.2 Linearität	240
10.3 Matrix der Darstellung einer linearen Abbildung berechnen	248

10.1 Linearität einer Abbildung \mathcal{L} überprüfen

Abbildungen (Funktion)

Definition Abbildung/Funktion

Eine Abbildung (oder Funktion) \mathcal{L} ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu.

$$\mathcal{L} : D \rightarrow Z, \quad x \mapsto y$$

Wir nennen

- x das Argument der Abbildung
- $y = \mathcal{L}(x)$ das Bild von x (oder den Funktionswert).

Infobox Begriffe: Abbildungen (Funktionen)

- Wir stellen uns Abbildungen gerne als Maschinen $\mathcal{L}(x)$ vor. In die Klammer (x) schreiben wir das, was wir der Maschine zur Verarbeitung übergeben.
- Wir nennen x auch den Input oder – wie oben – das Argument von \mathcal{L}
- Wir nennen $y = \mathcal{L}(x)$ auch den Output oder – wie oben – das Bild von x
- Sie haben bisher Abbildungen sicherlich unter dem Begriff ‘Funktion’ kennengelernt, z.B. $f(x) = x^2$ oder $g(x) = \sin(x)$. In unserem aktuellen Kontext würden wir schreiben $\mathcal{L}(x) = x^2$ oder $\mathcal{G}(x) = \sin(x)$ und für diese beiden Funktionen angeben $\mathcal{L} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ und auch $\mathcal{G} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$
- Wird eine Abbildung allgemein angegeben $\mathcal{L}(\vec{x})$, dann nehmen wir an, dass die Definitionsmenge \mathbb{R}^m ist und die Zielmenge \mathbb{R}^n , mit $m, n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 10.1 Zwei Notationen für lineare Abbildungen

J2MVFF

Geben Sie die Abbildungen in beiden Notationen an. Geben Sie an, für welchen Input die Funktion definiert ist und welche Dimension der Output hat.

$$\mathcal{L}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -3y \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Benutze auch $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die andere Notation ist

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} (0, -3, 0) \odot \vec{v} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist jedes Mal die selbe Abbildung. Um präzise zu sein, geben wir die Dimensionen des Inputs und des Outputs an

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Beispiel 10.2 Zwei Notationen für lineare Abbildungen

AP4X4W

Geben Sie die folgenden Abbildungen in alle Notationen an. Geben Sie an, für welchen Input die Funktion definiert ist und welche Dimension der Output hat.

a) $\mathcal{L}(x, y, z) = 5x - y + 1$

b) $\mathcal{R}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{w}$ mit $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

c) $\mathcal{P}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix}$ und $x, y, \varphi \in \mathbb{R}$

d) $\mathcal{C}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{v}$ wobei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

Lösung:

a) $\mathcal{L}(x, y, z) = 5x - y + 1$, oder $\mathcal{L}(\vec{v}) = (5, -1, 0) \odot \vec{v}$

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

b) $\mathcal{R}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{w}$ mit $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, oder $\mathcal{R}(x, y, z) = x \cdot w_1 + y \cdot w_2 + z \cdot w_3$

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

c) $\mathcal{P}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, oder $\mathcal{P}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) \end{pmatrix} \odot \vec{v}$

$$\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

d) $\mathcal{C}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{v}$, oder $\mathcal{C}(x, y) = x^2 + y^2$

$$\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

10.2 Linearität

Definition Lineare Abbildung

Eine Abbildung $\mathcal{L} : V \rightarrow W, \vec{v} \mapsto \mathcal{L}(\vec{v})$ heisst **linear** genau dann, wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und λ gilt:

- **Homogenität:** $\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v})$
- **Additivität:** $\mathcal{L}(\vec{v} + \vec{w}) = \mathcal{L}(\vec{v}) + \mathcal{L}(\vec{w})$

Dabei sind V und W Vektorräume, z.B. \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Skalar.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.454]

Beispiel 10.3 Linearität

IMSW1Y

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear oder nicht linear sind.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

a) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{w}$ mit $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

b) $\mathcal{R}(x, y, z) = 5x - y + 1$

Lösung:

Die Untersuchung kann in einer beliebigen Notation gemacht werden. Hier übernehmen wir die Notation, die in der Aufgabenstellung gebraucht wurde.

a) Homogenität

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \odot \vec{w} = \lambda \cdot \underbrace{(\vec{v} \odot \vec{w})}_{=\mathcal{L}(\vec{v})} = \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v})$$

Additivität

$$\mathcal{L}(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \odot \vec{w} = \underbrace{\vec{u} \odot \vec{w}}_{=\mathcal{L}(\vec{u})} + \underbrace{\vec{v} \odot \vec{w}}_{=\mathcal{L}(\vec{v})} = \mathcal{L}(\vec{u}) + \mathcal{L}(\vec{v})$$

Die Funktion ist also linear

b) Homogenität:

$$\mathcal{R}(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) = 5 \cdot (\lambda \cdot x) - (\lambda \cdot y) + 1 \neq \lambda \cdot 5 \cdot x - \lambda \cdot y + \lambda = \lambda \cdot \mathcal{R}(x, y, z)$$

Wegen der 1, die addiert wird, ist es nicht möglich λ ganz auszuklammern. Also ist die Funktion nicht linear.

Beispiel 10.4 Bild des Nullvektors**RGK9W3**

Wir betrachten die lineare Abbildung $\mathcal{L} : V \rightarrow W$, die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

a) Berechnen Sie $\mathcal{L}(\vec{0})$

b) Stellen Sie $\mathcal{C}(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2)$ mit Hilfe von $\mathcal{C}(\vec{x}_1)$ und $\mathcal{C}(\vec{x}_2)$ dar.

Lösung:

a) Wir wissen, dass die Abbildung linear ist. Deshalb gilt

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v}) \Rightarrow \mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{0}) = \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{0})$$

Wir setzen nun $\lambda = 0$

$$\mathcal{L}(\underbrace{0 \cdot \vec{0}}_{=\vec{0}}) = \underbrace{0 \cdot \mathcal{L}(\vec{0})}_{=\vec{0}}$$

Links ändert die Multiplikation mit 0 nichts am Nullvektor, rechts erhalten wir ebenfalls den Nullvektor, denn jeder Vektor wird zum Nullvektor, falls er mit 0 multipliziert wird. Also

$$\mathcal{L}(\vec{0}) = \vec{0}$$

b) Wir benutzen Additivität und Homogenität:

$$\mathcal{C}(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2) = \mathcal{C}(\lambda_1 \cdot \vec{x}_1) + \mathcal{C}(\lambda_2 \cdot \vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot \mathcal{C}(\vec{x}_1) + \lambda_2 \cdot \mathcal{C}(\vec{x}_2)$$

Satz Eigenschaften linearer Abbildungen

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\mathcal{L} : V \rightarrow W$, die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

- Der Nullvektor $\vec{0}$ in V wird auf den Nullvektor $\vec{0}$ in W abgebildet:

$$\mathcal{L}(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Es kann aber weitere Vektoren $\vec{x} \neq 0$ mit $\mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{0}$ geben.

- Das Bild einer Linearkombination von Vektoren ist gleich der Linearkombination der Bildvektoren, oder

$$\mathcal{L}(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot \mathcal{L}(\vec{x}_1) + \lambda_2 \cdot \mathcal{L}(\vec{x}_2)$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.454]

Finden wir $L(\vec{0}) \neq \vec{0}$, dann ist die Abbildung sicher nicht linear.

Beispiel 10.5 Linearität

SAVYCE

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

- $\mathcal{L}(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}^1$.
- $\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos(v_1) \\ \sin(v_2) \end{pmatrix}$ mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.
- $\mathcal{L}(x, y, z) = 5x - y + 1$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Lösung:

- a) Vortest

$$\mathcal{L}(\vec{0}) = 0^2 = 0$$

Dies könnte eine lineare Abbildung sein. Wir überprüfen die Homogenität:

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot x) = (\lambda \cdot x)^2 = \lambda^2 \cdot (x)^2 \neq \lambda \cdot (x)^2$$

Wir sehen jetzt, dass es dennoch keine lineare Abbildung ist.

- b) Vortest

$$\mathcal{L}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Dies ist also keine lineare Abbildung.

c) Vortest

$$\mathcal{L}(0, 0, 0) = 5 \cdot 0 - 0 + 1 \neq 0$$

Dies ist also keine lineare Abbildung.

Infobox Beweis der Linearität

Beim Beweis der **Homogenität** macht man typischerweise folgende Schritte (hier gezeigt an der Funktion $\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{w}$, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ mit $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$):

i) Funktion auswerten

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \odot \vec{w}$$

ii) λ ausklammern $\lambda(\vec{v} \odot \vec{w})$

iii) für einen Ausdruck wieder $\mathcal{L}(\vec{v})$ schreiben

$$\lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v})$$

Für die **Additivität** sind dies ähnliche Schritte:

i) Funktion auswerten

$$\mathcal{L}(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \odot \vec{w}$$

ii) Ausdruck aufteilen (ausmultiplizieren): $\vec{u} \odot \vec{w} + \vec{v} \odot \vec{w}$

iii) Ausdrücke mit Hilfe von L schreiben

$$\mathcal{L}(\vec{u}) + \mathcal{L}(\vec{v})$$

Beispiel 10.6 Lineare Funktion

QKBUT2

a) Wir betrachten die Funktion $f(x) = -3x$ also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Funktionswerte für

$$a = 3, b = 2, c = 3 + 2, b = 5 \cdot 3$$

b) Betrachten Sie ihre Resultate und formulieren Sie eine Hypothese, wie man die Funktionswerte für $u = v + w$ und $p = \lambda \cdot v$ berechnen kann, wenn man die Bilder $f(v)$ und $f(w)$ kennt.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = m \cdot x$ linear ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = m \cdot x + c$ linear ist.

Lösung:

a) Die Funktionswerte sind

$$\begin{aligned}f(3) &= -3 \cdot 3 = -9 \\f(2) &= -3 \cdot 2 = -6 \\f(3+2) &= -3 \cdot (3+2) = -15 \\f(5 \cdot 3) &= -3 \cdot (5 \cdot 3) = -45\end{aligned}$$

b) Wir beobachten, dass man mit dem Distributiv-Gesetz rechnen könnte

$$f(3+2) = -3 \cdot (3+2) = -3 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = -9 - 6 = f(3) + f(2)$$

und mit dem Assoziativgesetz

$$f(5 \cdot 3) = -3 \cdot (5 \cdot 3) = 5 \cdot (-3) \cdot 3 = 5 \cdot (-9) = 5 \cdot f(3)$$

Allgemein könnte man vermuten, dass

$$\begin{aligned}f(\lambda \cdot x_1) &= \lambda \cdot f(x_1) \\f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2)\end{aligned}$$

c) Homogenität:

$$f(\lambda \cdot x) = m \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (m \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

Additivität:

$$f(x_1 + x_2) = m \cdot (x_1 + x_2) = m \cdot x_1 + m \cdot x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Die Funktion ist also linear.

d) Homogenität:

$$f(\lambda \cdot x) = m \cdot (\lambda \cdot x) + c = \lambda \cdot (m \cdot x) + c$$

Es gibt keine Möglichkeit λ ganz auszuklammern, also ist diese Funktion *nicht linear*. Dies obwohl sie wegen der Form (eine Linie) "lineare Funktion" genannt wird.

Beispiel 10.7 Matrix \odot Vektor linear?

591417

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathcal{L}(\vec{v}) := \mathbf{M} \odot \vec{a} =: \vec{b}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch die Multiplikation der Matrix mit einem Vektor haben wir also eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, denn $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob diese Abbildung linear ist, d.h. ob gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) &= \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v}) \\ \mathcal{L}(\vec{v} + \vec{w}) &= \mathcal{L}(\vec{v}) + \mathcal{L}(\vec{w})\end{aligned}$$

also

$$\mathbf{M} \odot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}).$$

und

$$\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}$$

Betrachten Sie in diesem Beispiel vorläufig nur die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda = 3$$

Lösung:

Wir berechnen die vier Vektoren auf jeder Seite der Gleichungen

$$\mathbf{M} \odot (3 \cdot \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir finden also, dass in diesem Beispiel gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{M} \odot (\lambda \cdot \vec{v}) &= \lambda \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}) \\ \mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) &= \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}\end{aligned}$$

Wir vermuten deshalb, dass dies wahrscheinlich für alle Vektoren \vec{v} und \vec{w} gilt.

Wir werden später sehen, dass es viele Beispiele gibt für lineare Abbildungen — auch bei Themen, wo wir es nicht vermutet hätten. Der nachfolgende Satz besagt, dass die Matrix-Multiplikation ein Beispiel für eine lineare Abbildung ist.

Satz Matrix-Vektor-Multiplikation als lineare Abbildung

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Die Abbildung

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit $\mathcal{L}(\vec{v}) := \mathbf{A} \odot \vec{v}$ ist linear.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.456]

Wir hätten die Abbildung im Satz 10.2 auch mit dem Ausdruck

$$\vec{v} \mapsto \mathcal{L}(\vec{v}) := \mathbf{A} \odot \vec{v}$$

definieren können.

Beispiel 10.8 Linearität

YHRNUS

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix in der Standard-Basis an.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

a) $\mathcal{L}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$

g) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{v}$.

h) $\mathcal{L}(\vec{v}) = v_1$

c) $\mathcal{L}(x, y) = (5y + 2x)$

i) $\mathcal{L}(\vec{v}) = (v_1)^2$

d) $\mathcal{L}(\vec{v}) = -\vec{v}$

j) $\mathcal{L}(\vec{v}) = v_1 + 1$

e) $\mathcal{L}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

k) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3v_1 - 4v_2 \\ v_1 + 5v_2 \end{pmatrix}$

f) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Untersuchung kann in einer beliebigen Notation gemacht werden. Hier übernehmen wir die Notation, die in der Aufgabenstellung gebraucht wurde.

a) Homogenität

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot (\lambda \cdot x) \\ \sin(\varphi) \cdot (\lambda \cdot y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \mathcal{L}(x, y)$$

Additivität

$$\mathcal{L}(x + p, y + q) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot (x + p) \\ \sin(\varphi) \cdot (y + q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot p \\ \sin(\varphi) \cdot q \end{pmatrix} = \mathcal{L}(x, y) + \mathcal{L}(p, q)$$

Die Abbildung ist linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

b) Homogenität:

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \odot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda^2 \cdot \vec{v} \odot \vec{v}$$

Der Ausdruck ist quadratisch in λ , also ist die Funktion nicht linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$

c) Homogenität:

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = (5\lambda \cdot y + 2\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (5y + 2x) = \lambda \cdot \mathcal{L}(x, y)$$

Additivität:

$$\mathcal{L}(x + a, y + b) = (5(y + b) + 2(x + a)) = (5y + 2x) + (5b + 2a) = \mathcal{L}(x, y) + \mathcal{L}(a, b)$$

Die Abbildung ist linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$. Matrix:

$$M = [\mathcal{L}(1, 0), \mathcal{L}(0, 1)] = [(5 \cdot 0 + 2 \cdot 1), (5 \cdot 1 + 2 \cdot 0)] = [2 \ 5]$$

d) Homogenität:

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = -(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (-\vec{v}) = \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v})$$

Additivität:

$$\mathcal{L}(\vec{v} + \vec{w}) = -(\vec{v} + \vec{w}) = -\vec{v} - \vec{w} = \mathcal{L}(\vec{v}) + \mathcal{L}(\vec{w})$$

Die Abbildung ist linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Matrix:

$$M = [\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)] = \left[-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = -\mathbf{1}$$

e) Vortest

$$\mathcal{L}(0, 0) = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test nicht bestanden, also ist \mathcal{L} nicht linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

f) Homogenität:

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda \cdot v_1) \cdot (\lambda \cdot v_2) \end{pmatrix} = \lambda^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \cdot v_2 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v})$$

Die Abbildung ist nicht homogen also auch nicht linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

g) homogen und additiv \Rightarrow linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$.

h) homogen und additiv \Rightarrow linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$.

i) nicht homogen und nicht additiv \Rightarrow nicht linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$.

j) nicht homogen und nicht additiv \Rightarrow nicht linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$.

k) homogen und additiv \Rightarrow linear. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$.

Übrigens hätte man bei einigen Abbildungen schon durch Einsetzen von $\vec{0}$ herausfinden können, dass sie nicht linear sind.

Beispiel 10.9 Überprüfe, ob die Abbildung L linear ist.

410717

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix}$$

und $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Bestimme danach die Matrix M , für die gilt

$$L(\vec{v}) = M \odot \vec{v}.$$

Lösung:

Homogenität:

$$L(\lambda \cdot \vec{v}) = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 - 10\lambda \cdot v_2 \\ -10\lambda \cdot v_1 + 100\lambda \cdot v_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underbrace{\frac{1}{101} \begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix}}_{=L(\vec{v})}$$

Die Homogenität ist also erfüllt.

Additivität:

$$\begin{aligned} L(\vec{v} + \vec{w}) &= \frac{1}{101} \begin{pmatrix} (v_1 + w_1) - 10(v_2 + w_2) \\ -10(v_1 + w_1) + 100(v_2 + w_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{101} \left\{ \begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 - 10w_2 \\ -10w_1 + 100w_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \underbrace{\frac{1}{101} \begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{101} \begin{pmatrix} w_1 - 10w_2 \\ -10w_1 + 100w_2 \end{pmatrix}}_{=L(\vec{v})+L(\vec{w})} \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix lässt sich mit den Bildern der Basisvektoren bestimmen.

$$L(\vec{e}_1) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$L(\vec{e}_2) = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Abbildung L ist also

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{101} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}, \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 100 \end{pmatrix}$$

10.3 Matrix der Darstellung einer linearen Abbildung berechnen

Satz Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix

Zu jeder linearen Abbildung

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gibt es genau eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \mathbf{A} \odot \vec{x}.$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.457]

Der Satz bedeutet, dass es zu jeder linearen Abbildung eine Matrix gibt, die erlaubt das Bild zu berechnen mit Hilfe der Matrix \mathbf{A} und der Matrixmultiplikation

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \mathbf{A} \odot \vec{x}.$$

Infobox Matrix der Darstellung

Zur linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_m$ gehört die Matrix

$$\mathbf{A} = [\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2), \dots] .$$

Sie enthält in den Spalten die Bilder der Basisvektoren. $\mathcal{L}(\vec{e}_j) \in \mathbb{R}^n$, also ist \mathbf{A} eine $n \times m$ -Matrix.

Beispiel 10.10 Matrix der Spiegelung

GNJDG3

Bestimme die Matrix der Spiegelung an der y -Achse. Vorgehen:

- Spiegle den Punkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ an der y -Achse
- Spiegle die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an der y -Achse.
- Bestimme die Matrix \mathbf{S} der Spiegelung an der y -Achse
- Überprüfe das Resultat indem du $\mathbf{S} \odot \vec{A}$ berechnest.

Lösung:

a) Spiegelung $\vec{A}' = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Matrix

$$\mathbf{S} = [\vec{e}'_1, \vec{e}'_2] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Test

$$\mathbf{S} \odot \vec{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 10.11 Bestimme die Matrix der Abbildung, falls sie linear ist. 155513

a) $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $\mathcal{L}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $\mathcal{L}(x, y) = 1$

c) $\mathcal{D} : \mathbb{P}(n) \mapsto \mathbb{P}(n)$ definiert durch $\mathcal{D}(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$. \mathbb{P} sind alle Polynome von Grad n

- d) $\mathcal{D} : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}$ definiert durch $\mathcal{D}(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$. \mathbb{T} ist zweidimensional mit der Basis $\vec{e}_1 = \cos(x)$ und $\vec{e}_2 = \sin(x)$

Lösung:

a) homogen und additiv (linear), $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) nicht linear, denn $L(0,0) = 1$.

c) Homogenität:

$$\mathcal{D}(\lambda \cdot p(x)) = \frac{d}{dx}\lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot \frac{d}{dx}p(x) = \lambda \cdot \mathcal{D}(p(x))$$

Additivität:

$$\mathcal{D}(p(x) + q(x)) = \frac{d}{dx}(p(x) + q(x)) = \frac{d}{dx}p(x) + \frac{d}{dx}q(x) = \mathcal{D}(p(x)) + \mathcal{D}(q(x))$$

Die Abbildung erfüllt beide Kriterien, also ist sie linear. Wir bestimmen die Matrix für $\mathbb{P}(2)$, d.h. alle Polynome bis zweiten Grades. Eine mögliche Basis ist $\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = x, \vec{e}_3 = x^2$. In dieser Basis ist

$$\mathcal{D}(\vec{e}_1) = \frac{d}{dx}1 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}(\vec{e}_2) = \frac{d}{dx}x = 1 = 1 \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}(\vec{e}_3) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x = 2 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Bilder schreiben wir in die Spalten der Matrix \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Die Ableitung ist linear (vorherige Aufgabe). Also

$$\mathcal{D}(\vec{e}_1) = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) = -1 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}(\vec{e}_2) = \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) = 1 \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Bilder schreiben wir in die Spalten der Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 10.12 Projektionen

EPVI4M

Wir betrachten die Projektion auf die Gerade $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} (\lambda \in \mathbb{R})$.

a) Projizieren Sie folgende Punkte auf die Gerade.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix}$$

b) Betrachten Sie Ihre Resultate und formulieren Sie eine Hypothese, wie man die Projektionen der Vektoren $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ und $\vec{y} = \lambda \cdot \vec{v}$ berechnen kann, wenn man die Bilder $P(\vec{v})$ und $P(\vec{w})$ kennt. Hier bedeutet $P(\vec{w})$, dass \vec{w} auf den Punkt $P(\vec{w}) \in \mathbb{R}^2$ fällt durch die Projektion.

c) Geben Sie die Projektion auf die Gerade $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \vec{a} (\lambda \in \mathbb{R})$ an. Untersuchen Sie, ob diese Projektion linear ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Projektion auf die Gerade $j : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{R} + \lambda \vec{a} (\lambda \in \mathbb{R}, \text{ und } \vec{R} \neq \vec{0})$ linear ist

Lösung:

a) Die Projektion bewerkstelligt die Funktion $P(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Bildpunkte sind also

$$P(\vec{A}) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{24}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$P(\vec{B}) = \frac{51}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P(\vec{C}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad P(\vec{D}) = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}$$

b) Wir vermuten, dass

$$\begin{aligned} P(\lambda \cdot \vec{v}) &= \lambda \cdot P(\vec{v}) \\ P(\vec{v} + \vec{w}) &= P(\vec{v}) + P(\vec{w}) \end{aligned}$$

c)

$$P(\lambda \cdot \vec{v}) = \frac{(\lambda \cdot \vec{v}) \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \frac{\vec{v} \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \lambda \cdot P(\vec{v})$$
$$P(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{(\vec{v} + \vec{w}) \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{v} \odot \vec{a} + \vec{w} \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{v} \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} + \frac{\vec{w} \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = P(\vec{v}) + P(\vec{w})$$

d) Die Projektion auf die Gerade j kann geschrieben werden als

$$P(\vec{v}) = \vec{R} + \frac{(\vec{v} - \vec{R}) \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

Homogenität:

$$P(\lambda \cdot \vec{v}) = \vec{R} + \frac{(\lambda \vec{v} - \vec{R}) \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

Es gibt keine Möglichkeit λ aus dem zweiten Ausdruck auszuklammern. Diese Projektion ist deshalb nicht homogen und also auch nicht linear.

Beispiel 10.13 Bestimme die Matrix der Projektion auf die Gerade $g : y = -10x$. **051137**

Lösung:

Die Gerade lautet in Parameterform

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}'}$$

Wir bestimmen dazu die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für die Projektion brauchen wir den normierten Richtungsvektor der Geraden g

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{101}} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Wir führen die Projektionen durch

$$P(\vec{e}_1) = (\vec{e}_1 \odot \vec{v}) \vec{v} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

und

$$P(\vec{e}_2) = (\vec{e}_2 \odot \vec{v}) \vec{v} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der Projektion ist also

$$\mathbf{P} = \left[\frac{1}{101} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}, \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{101} \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 100 \end{bmatrix}$$

Wir betrachten

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \text{ und } M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} \end{bmatrix}$$

und eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$.

a) Drücken Sie den Vektor $L(\vec{a})$ mit Hilfe von $L(\vec{e}_1)$ und $L(\vec{e}_2)$ aus.

b) Benutzen Sie die Spalten-Vektoren von M um das Produkt

$$M \odot \vec{a}$$

auszudrücken.

c) Zeigen Sie damit, dass die Darstellung von L die Matrix $M = [L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2)]$ ist.

Lösung:

a) Aus der Linearität ergibt sich

$$L(\vec{a}) = L(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) = a_1 \cdot L(\vec{e}_1) + a_2 \cdot L(\vec{e}_2)$$

b)

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{bmatrix} \cdot a_1 + \begin{bmatrix} m_{1,2} \\ m_{2,2} \\ \vdots \\ m_{n,2} \end{bmatrix} \cdot a_2$$

c) Wir vergleichen die Resultate von oben

$$a_1 \cdot \begin{bmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} m_{1,2} \\ m_{2,2} \\ \vdots \\ m_{n,2} \end{bmatrix} = a_1 \cdot L(\vec{e}_1) + a_2 \cdot L(\vec{e}_2)$$

Damit das für alle a_1 und a_2 stimmt, müssen die Vektoren, mit denen die Koeffizienten multipliziert werden, separat übereinstimmen:

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{bmatrix} = L(\vec{e}_1) \text{ und } \begin{bmatrix} m_{1,2} \\ m_{2,2} \\ \vdots \\ m_{n,2} \end{bmatrix} = L(\vec{e}_2)$$

Damit haben wir gezeigt, dass in den Spalten von M die Bilder der Basisvektoren stehen.

Beispiel 10.15 Verkettung linearer Abbildungen

370598

- Konstruieren Sie das Dreieck ABC
- Spiegeln Sie es an der x -Achse $A'B'C'$.
- Strecken Sie dann das Bild um den Faktor 2 in x -Richtung.
- Berechnen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung $S \circ M$

$$\vec{A}'' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B}'' = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{C}'' = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

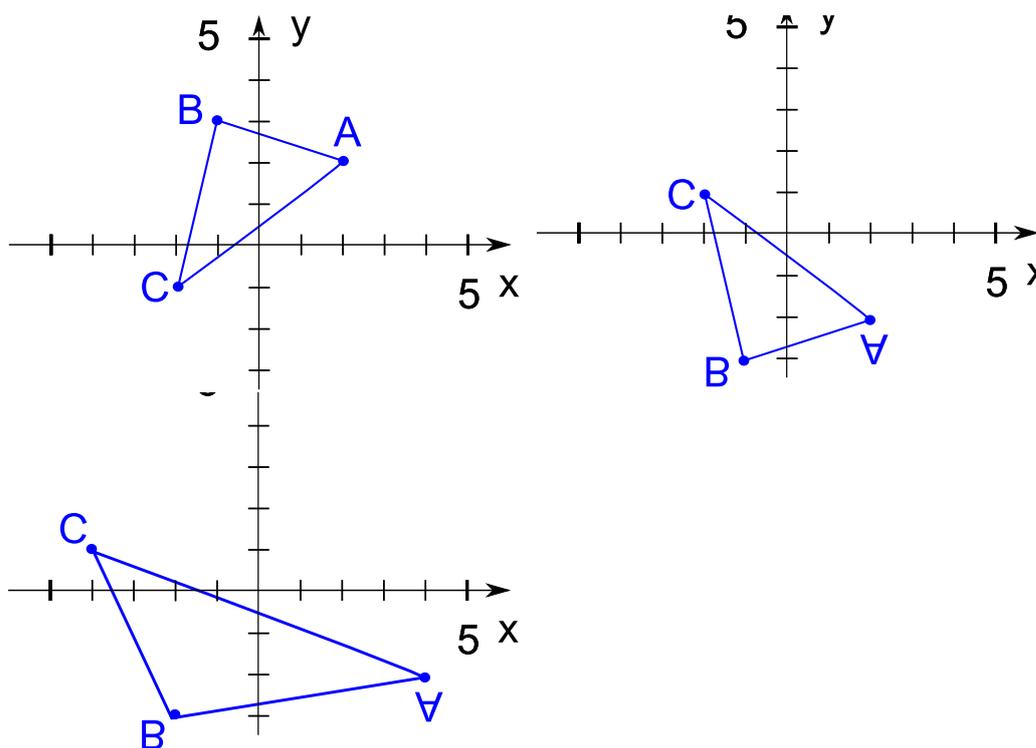
Transformationen: Spiegelung x -Achse: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Streckung um Faktor 2 in x -Richtung: $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Punkte:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

**Beispiel 10.16 Verkettung linearer Abbildungen**

844538

Zeichnen Sie, dass die Operatoren $L(p(x)) = x \cdot p(x)$ und $D(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x) = p(x)'$ linear sind.

Zeigen Sie anhand des Polynoms $p(x) = 4 + 3x + 2x^2 + x^3$, dass

$$L(D(p(x))) = D(L(p(x)))$$

nicht gilt.

Lösung:

Linearität der Operatoren:

$$\begin{aligned}L(\lambda \cdot p(x)) &= x \cdot \lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot x \cdot p(x) = \lambda \cdot L(p(x)) \\L(p(x) + q(x)) &= x \cdot (p(x) + q(x)) = x \cdot p(x) + x \cdot q(x) = L(p(x)) + L(q(x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(\lambda \cdot p(x)) &= \frac{d}{dx} \lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot \frac{d}{dx} p(x) = \lambda \cdot D(p(x)) \\D(p(x) + q(x)) &= \frac{d}{dx} (p(x) + q(x)) = \frac{d}{dx} p(x) + \frac{d}{dx} q(x) = D(p(x)) + D(q(x))\end{aligned}$$

Vertauschbarkeit:

$$\begin{aligned}L(D(p(x))) &= 3x + 4x^2 + 3x^3 \\D(L(p(x))) &= 4 + 6x + 6x^2 + 4x^3\end{aligned}$$

Die Ausdrücke sind verschieden also gilt

$$L(D(p(x))) \neq D(L(p(x)))$$

Beispiel 10.17 Darstellung einer lineare Abbildung als Matrix

738430

Es sei $\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ferner bilden

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

das Dreieck ABC .

- Berechnen Sie die Produkte $\vec{A}' = \mathbf{P} \odot \vec{A}$, $\vec{B}' = \mathbf{P} \odot \vec{B}$ und $\vec{C}' = \mathbf{P} \odot \vec{C}$. Zeichnen Sie die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in ein Koordinatensystem ein. Was ist der "Effekt der Matrix \mathbf{P} " auf das Dreieck?
- Bestimmen Sie die Matrix \mathbf{M} die das Dreieck an der y -Achse spiegelt und bestimmen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung \mathbf{M} .

- c) Bestimmen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung $M \circ P$.
- d) Bestimmen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung $P \circ M$.
- e) Vergleichen Sie die Resultate aus den beiden letzten Teilaufgaben. Was schließen Sie daraus? Wie erklären Sie sich das Resultat?

Lösung

- a) Abbildung unter P : $A', B', C' = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Alle Punkte liegen auf der Geraden $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. P beinhaltet also eine Projektion auf diese Gerade.
- b) Die Matrix der Spiegelung ist $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Abbildung unter M : $A'B'C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- c) Abbildung unter $M \circ P$: $A'', B'', C'' = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- d) Abbildung unter $P \circ M$: $A^*B^*C^* = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- e) Die Bildpunkte fallen verschieden aus, abhängig davon ob $P \circ M$ oder $M \circ P$ auf sie angewendet wird. Beim Dreieck (und auch allgemein) kommt es darauf an, in welcher Reihenfolge die Abbildungen ausgeführt werden. Im Allgemeinen gilt für beliebige lineare Abbildungen A und B :

$$A \circ B \neq B \circ A .$$

Lineare Abbildungen sind im Allgemeinen **nicht kommutativ**.

11.1 Grundoperationen	257
11.2 Vektoren und Matrizen	258
11.3 Symbolisches Rechnen	259

11.1 Grundoperationen

Infobox Grundoperationen und Konstanten π , e

Wir benutzen die numpy-Bibliothek und nennen sie `np`, deshalb werden Funktionen aus dieser Bibliothek z.B. mit `np.sqrt(9)` aufgerufen.

<code>+</code>	Plus
<code>-</code>	Minus
<code>*</code>	Skalare-Multiplikation und elementweise Multiplikation von Matrizen
<code>/</code>	Skalare-Division und elementweise Division von Matrizen
<code>sqrt(x)</code>	Quadratwurzel \sqrt{x}
<code>pi</code>	π
<code>exp(1)</code>	Eulersche Konstante e

Infobox Betrag, Logarithmen und trigonometrische Funktionen

Wir benutzen die numpy-Bibliothek und nennen sie `np`, deshalb werden Funktionen aus dieser Bibliothek z.B. mit `np.sign(-3)` aufgerufen.

<code>abs(x)</code>	Betrag einer Zahl $ x $
<code>sign(x)</code>	Vorzeichen einer Zahl $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
<code>log(x)</code>	Logarithmus zur Basis e
<code>log10(x)</code>	Logarithmus zur Basis 10
<code>log(x)/log(3)</code>	Logarithmus zur Basis 3

Trigonometrische Funktionen mit Bogenmass

<code>cos(x)</code>	Cosinus, x ist z.B. $\pi/2$
<code>sin(x)</code>	Sinus
<code>tan(x)</code>	Tangens
<code>arccos(x)</code>	Arkuskosinus = $\cos^{-1}(x)$
<code>arcsin(x)</code>	Arkussinus = $\sin^{-1}(x)$
<code>arctan(x)</code>	Arkustangens = $\tan^{-1}(x)$

11.2 Vektoren und Matrizen

Python wurde ursprünglich für die Matrizen-Rechnung entworfen. Deshalb ist vieles für die Matrizen-Rechnung optimiert und ausgelegt. Eine Liste (Vektor) ist z.B.

```
vv=np.array([1,3,5])
```

Mehrere Listen definieren die *Zeilen* einer Matrix:

```
A=np.array([[1,3],[1,0],[-1,7]])
```

```
B=np.array([[-1,1,-1],[-1,-1,1],[1,-1,-1]])
```

Infobox Grundoperationen für Vektoren

MXG6YS

<code>vv.shape</code>	Dimensionen des Vektors \vec{v}
<code>len(vv)</code>	Anzahl Elemente, d.h. Anzahl der Einträge
<code>np.linalg.norm(vv)</code>	Norm des Vektors $\ \vec{v}\ $,
<code>np.dot(vv,ww)</code>	Skalarprodukt der Vektoren \vec{v} und \vec{w}
<code>np.cross(vv,ww)</code>	Vektorprodukt der Vektoren \vec{v} und \vec{w}

Infobox Slicing

MT5TM5

```
A=np. array ([[1 ,3]],[1 ,0],[-1 ,7]])
```

A[0,1]	Auf einzelne Elemente zugreifen
A[0,1] =111	Einzelne Elemente neu definieren
A[1, :]	2. Zeile
A[:,1]	2. Spalte
A[2,-1]	letzte Spalte, 3. Zeile
A[-1,1]	2. Spalte, letzte Zeile

Infobox Spezielle Matrizen

MXG6YS

eye(3)	Einheitsmatrix, Matrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen
ones([3,2])	Matrix mit lauter Einsen, 3 Zeilen, 2 Spalte
zeros([3,2])	Nullmatrix, 3 Zeile, 2 Spalten
Dd=diag([3,1,2])	Diagonalmatrix mit den Elementen 3, 1 und 2 auf der Diagonalen
diag(Dd)	Ist das Argument eine Matrix, wird die Diagonale extrahiert

Infobox Operationen mit Arrays

QWJPJR

Hier wird die Bibliothek `np` angegeben, da die Funktionen `mrref` und `mnull` dort nicht enthalten sind.

A.T	Matrix transponieren
np.dot(B, A)	Matrixprodukt
bb/aa	Elementweise Multiplikation
aa* bb	Elementweise Division
np.power(aa, 2)	Elementweise Potenz
np.linalg.det(B)	Determinante einer Matrix
np.linalg.inv(B)	inverse Matrix
mnull(C)	Nullraum. Nimmt an, dass in den Zeilen von C die Normalenvektoren der Ebenen stehen. Sucht alle Vektoren, die senkrecht stehen auf allen Normalenvektoren. ^a
mrref(B)	Gauss-Jordan Elimination
np.linalg.matrix_rank(C)	Rang der Matrix A

11.3 Symbolisches Rechnen

Die Matrix-Funktionen wendet man an um lineare Probleme zu lösen. Es können aber auch nicht lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Dazu benutzt man die Bibliothek für symbolisches Rechnen `sympy`. Bisher haben wir zwar Variablen benutzt, aber wir haben darin nur Zahlen gespeichert. Beim symbolischen Rechnen,

können wir den Wert einer Variablen vorerst offen lassen.

Zuerst sagt man Python, dass man ein Variable als symbolische Variable benutzen will. Hier wollen wir x symbolisch benutzen

```
x = sym.Symbol('x', real=True)
```

Dann geben wir die Gleichung ein, hier $-90 + 15x + 15x^2 = 0$

```
sym.solve(-90 + 15*x + 15*x**2 , x, dict=True)
[{x: -3}, {x: 2}]
```

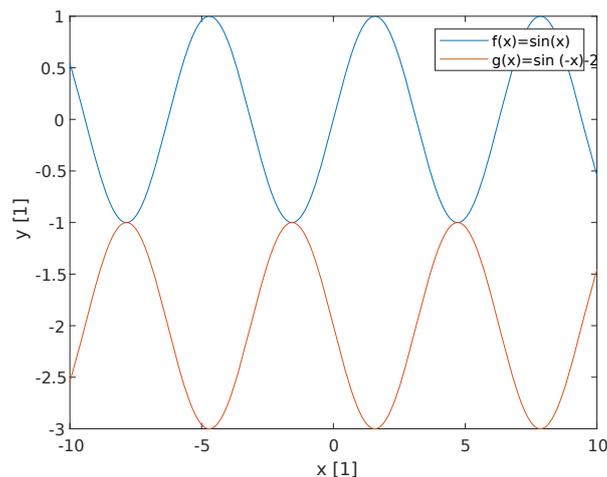
Beispiel 11.1 Graphen von Funktionen zeichnen

76BOUY

Plotten Sie die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(-x) - 2$ im Bereich $x \in [-10, 10]$

Befehle aus `np`: `sin`, `map`

Befehle der `matplotlib.pyplot (plt)` Bibliothek: `plot`, `xlabel`, `ylabel`, `show`



Python-Code Bereich und Funktionen definieren:

```
xlist = np.arange(-10., 10., 0.2)
def fun(x):
    return np.sin(x)
```

```
def gun(x):
    return np.sin(-x)-2
```

Funktionen auswerten und Plotten:

```
ylist=list(map(fun, xlist))
ylist=list(map(gun, xlist))
# red dashes 'r--', yellow squares 'bs', green triangles 'g^', blue
line 'b-'
plt.plot( xlist, ylist, 'b-', xlist, ylist, 'g^')
```

```
plt.ylabel('y [1]')
plt.show()
```

Beispiel 11.2 Hessesche Normalenform

GPNI6N

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, g: y(x) = -\frac{4}{3} \cdot x + 2$$

- a) Erstelle eine Funktion $h(x,y)$, die den Abstand eines Punktes $[x,y]$ zu g berechnet
- b) Berechne damit den Abstand der Punkte P, Q zu g

Befehle: `abs`, `norm`, `dot`

Python-Code

```
# a)
Pp=[ 10,4] ; Qq= [ 11, 0]
def HesseNormal(x,y,coeff=[4,3,-6]):
    # Bestimmt Abstand zu Geraden
    # in:
    #     x,y: Koordinaten des Punktes
    #     coef: Koeffizienten der Gerade; default 4x+3y-6=0
    return np.dot( [x,y,1],coeff)/np.linalg.norm( coeff[0:2])
# b)
print(HesseNormal(10,4) )
# 9.2
print(HesseNormal(11,0) )
# 7.6
```

Beispiel 11.3 Inhomogene LGS

SLTNEO

Bestimmen Sie die Schnittmengen der Ebenen E_1, E_2 und E_3

$$\left| \begin{array}{l} E_1: \quad 0 \quad +3y \quad -2z \quad = \quad 3 \\ E_2: \quad 3x \quad +0 \quad -1 \quad = \quad 6 \\ E_3: \quad -2x \quad +y \quad +0 \quad = \quad -3 \end{array} \right|$$

Befehle: `mrref`, `mnull`

Python-Code

```
#           x   y   z   = const
Ae=np.array([ [ 0, 3, -2, 3 ]
              ,[ 3, 0, -1, 6],
              [-2, 1, 0, -3] ])
Aes=mrref( Ae) # Elimination
```

```

print(Aes) # d.h. Aufpunkt ist [ 2,1,0]
#[[ 1.  0. -0.333 2. ]
# [ 0.  1. -0.667 1. ]
# [ 0.  0.  0.  0. ]]
print(Aes[:,0:-1]) # Koeffizientenmatrix
#[[ 1.  0. -0.333 ]
# [ 0.  1. -0.667 ]
# [ 0.  0.  0.    ]]
riv=mnull( Aes[:,0:-1])
# d.h. der Richtungsvektor ist [ 1,2,3]
# Lösung Schnittgerade [2;1;0]+la*[ 1,2,3]
# mit la eine reelle Zahl

```

Beispiel 11.4 Summen

Y4AR4U

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{i=5}^{10} \frac{3 \cdot i}{(i+1)^{1/2}}$$

Befehle: sum, arange, power

Python-Code

```

tac=np.arange(5,10+1)
print(tac)
# 5 6 7 8 9 10
suc=(3*tac)/np.power(tac+1,1/2)
# 6.1237 6.8034 7.4246 8.0000 8.5381 9.0453
suc=sum(suc)
print(suc)
# 45.9352

```

Beispiel 11.5 Linearität einer Funktion

M27J2Z

- a) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind.
b) Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung (falls L linear ist)

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5x \\ -y \end{pmatrix} \text{ und } L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Befehle aus der **sympy** Bibliothek: symbols, simplify, Array,

Python-Code

```

# a)
u, v, w, x, y, z, lam = sym.symbols('u v w x y z lam')
sym.init_printing(use_unicode=True)

```

```

def lf(x,y,z):
    return sym.Array([ 5*x,-y])
# Homogenität;
print(sym.simplify(lf(lam*x,lam*y,lam*z)-lam*lf(x,y,z)))
# Resultat [0,0] bedeutet, dass beide Ausdrücke gleich sind
# Additivität;
print( sym.simplify(lf(x,y,z)+lf(u,v,w)-lf( x+u, y+v,z+w)))
# Resultat [0,0] bedeutet, dass beide Ausdrücke gleich sind
# b)
Ma=np.array([ lf(1,0),lf(0,1) ])
#[[5 0]
# [0 -1]
# [0 0]]

```

KAPITEL 12

Determinanten

12.1 Linearität der Determinante	265
12.2 Determinante von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	271
12.3 Determinante einer Dreiecksmatrix	273
12.4 Folgen der Linearität	278
12.5 Übungen	281
12.6 Regel von Cramer	284
12.7 Effiziente Berechnung der Determinante	287
12.8 Multiplikationssatz und weitere Themen	292

Satz Gesetze für Determinanten von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$

Im Folgenden können die Vektoren $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots$ als Spalten oder als Zeilen aufgefasst werden.

- $\det(\lambda \vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots) = \lambda \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots)$
- $\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{d}, \dots) = \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots) + \det(\vec{A}_1, \vec{d}, \dots)$
- $\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{A}_1, \dots) = \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots)$
- $\det(\vec{A}_2, \vec{A}_1, \dots) = -\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots)$
- $\det(\vec{A}_1, \vec{0}, \dots) = 0$
- $\det(\vec{A}_1, \vec{A}_1, \dots) = 0$
- $\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^N \det(\mathbf{A})$
- Dreiecksmatrizen: $\det(\mathbf{A}) = a_{11} a_{22} \dots a_{NN}$
- $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

12.1 Linearität der Determinante

Wir verwenden die Definition der Determinante in zwei Dimensionen und leiten allgemeine Gesetzmässigkeiten der Determinante her. Wir machen das in zwei Dimensionen, weil wir das noch leicht aufzeichnen und uns gut vorstellen können. Die Gesetzmässigkeiten wie die Linearität und der Vorzeichenwechsel beim Vertauschen von Spalten einer Matrix sind aber für alle Matrizen in $\mathbb{R}^{N \times N}$ gültig, d.h. auch in mehr als zwei Dimensionen.

Infobox Determinante: Zeilen und Spalten

Wir beschränken uns darauf, das Vertauschen, Multiplizieren etc. von *Spalten* zu betrachten. Genau die selben Betrachtungen könnten aber ebenfalls für die *Zeilen* gemacht werden.

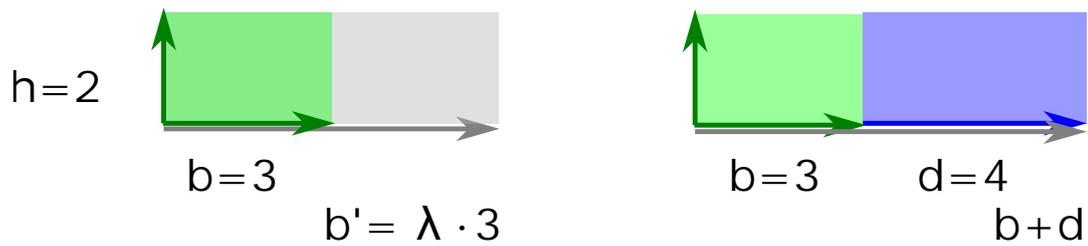
Beispiel 12.1 Aufkleber

Q86D9C

Wir bezeichnen mit $F(\vec{b}, \vec{h})$ die Fläche des Rechtecks oder des Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren \vec{b} und \vec{h} . Der Grüne Aufkleber hat also die Fläche $F(\vec{b}, \vec{h}) = 6$.

a) Berechnen Sie alle Flächen

$$F(2 \cdot \vec{b}, \vec{h}), F(\vec{d}, \vec{h}), F(\vec{b} + \vec{d}, \vec{h})$$



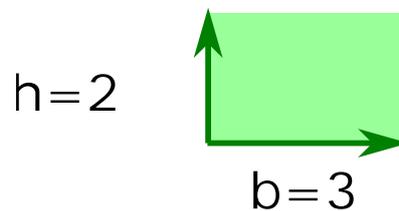
b) Vervollständigen Sie die Relationen

$$\begin{array}{ccc}
 F(\lambda \cdot \vec{b}, \vec{h}) & F(\vec{b}, \vec{h}) & \\
 F(\vec{b} + \vec{d}, \vec{h}) & F(\lambda \cdot \vec{b}, \vec{h}) & F(\vec{d}, \vec{h}),
 \end{array}$$

c) Stimmen die Relationen allgemein. Was ist, wenn die Vektoren nicht senkrecht zueinander stehen? Argumentieren Sie anhand der Zeichnungen.



d) Wieder im ursprünglichen Rechteck, betrachten Sie den Ausdruck $F(\vec{b}, \vec{h} + \lambda \cdot \vec{b})$



- Erstellen Sie eine Zeichnung für $\lambda = 1$ und für $\lambda = -1/2$. Bestimmen Sie die Flächen grafisch.
- Bestimmen Sie die Fläche allgemein für $F(\vec{b}, \vec{h} + \lambda \cdot \vec{b})$ mit Hilfe der Relationen, die sie oben hergeleitet haben.

Lösung:

a) Flächen $F(2 \cdot \vec{b}, \vec{h}) = 12$, $F(\vec{d}, \vec{h}) = 8$, $F(\vec{b} + \vec{d}, \vec{h}) = 14$

b) Relationen

$$\begin{array}{l}
 F(\lambda \cdot \vec{b}, \vec{h}) = \lambda F(\vec{b}, \vec{h}) \\
 F(\vec{b} + \vec{d}, \vec{h}) = F(\lambda \cdot \vec{b}, \vec{h}) + F(\vec{d}, \vec{h})
 \end{array}$$

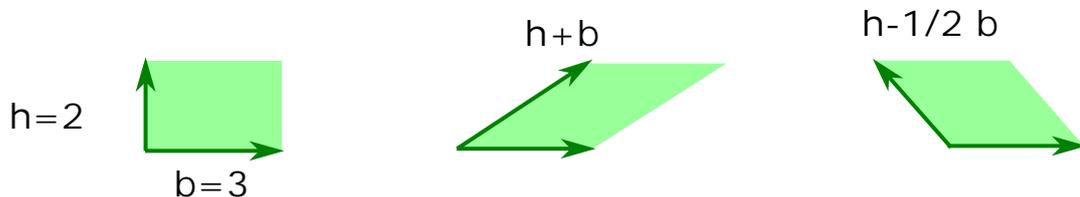
c) Die Relationen stimmen in jedem Fall.

$F(\lambda \cdot \vec{b}, \vec{h}) = \lambda F(\vec{b}, \vec{h})$ stimmt, weil die Streckung von \vec{b} auch Breite des Parallelogramms um λ streckt.

Die Relation $F(\vec{b} + \vec{d}, \vec{h}) = F(\lambda \cdot \vec{b}, \vec{h}) + F(\vec{d}, \vec{h})$ wird allgemein mit folgender Graphik gezeigt: Die beiden roten Flächen ergänzen das graue Parallelogramm.



d) Wir erhalten folgende Flächen.



Da sich die Höhe nicht ändert, gilt

$$F(\vec{b}, \vec{h} + \lambda \cdot \vec{b}) = F(\vec{b}, \vec{h})$$

Beispiel 12.2 Fläche eines Parallelogramms 2

N1ERF3

a) Berechne die Fläche eines Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Benutze dazu das Vektorprodukt.

b) Welches Resultat erhältst du allgemein für die Fläche

$$F(\vec{a}, \vec{b}) = F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)$$

c) Erfüllt der Ausdruck die Relationen

$$F(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}) = \lambda F(\vec{a}, \vec{b})$$

d) Erfüllt der Ausdruck die Relationen

$$F(\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}) = F(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}) + F(\vec{d}, \vec{b})$$

Lösung:

a) $F = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$

b) Um das Vektorprodukt berechnen zu können, ergänzen wir die Vektoren

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein erhalten wir

$$\vec{a}' \times \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag in der z -Komponente ist die Fläche also $F = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

c) Wir benutzen entweder, dass das Vektorprodukt assoziativ ist mit einer Zahl oder rechnen nach und erhalten

$$F(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}) = \lambda \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) = \lambda F(\vec{a}, \vec{b})$$

d) Wir benutzen, dass das Vektorprodukt distributiv ist und erhalten

$$F'' = \vec{a}' \times \vec{b}' + \vec{c}' \times \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

oder wir rechnen nach und sehen, dass

$$F(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 + c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 = F(\vec{a}, \vec{b}) + F(\vec{c}, \vec{b})$$

Definition Determinante für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist die *Determinante*

$$\det(\mathbf{A}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 .$$

[Papula, 2009, Bd. 2 I 3.2]

Die Determinante berechnet den Flächeninhalt eines Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, siehe Fig. 12.1 a). Wenn wir eine Kante um den Faktor λ länger machen, dann muss auch die Fläche des Parallelogramms um diesen Faktor anwachsen. Wir nennen das die **Homogenität der Determinante**, siehe Fig. 12.1 b). Wenn eine Fläche aufgespannt wird durch \vec{a} und $\vec{b} + \vec{c}$, dann muss sich aus geometrischen Gründen die Gesamtfläche zusammensetzen aus dem kleinen Flächen aufgespannt durch \vec{a} und \vec{b} bzw. \vec{a} und \vec{c} . Wir nennen das die **Additivität der Determinante**, siehe Fig. 12.1 c).

Diese beiden Eigenschaften fassen wir zusammen als die **Linearität der Determinante**.

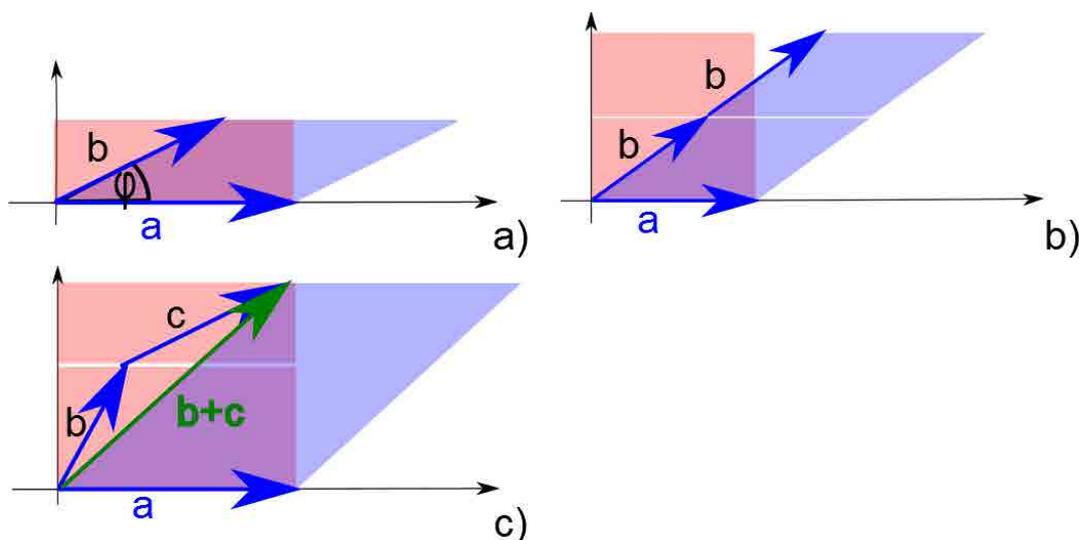


Abbildung 12.1: a) Die Determinante berechnet die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch \vec{a} und \vec{b} . b) Homogenität der Determinante: Die Fläche muss sich verdoppeln, wenn wir \vec{b} verdoppeln in der Länge. c) Additivität der Determinante: Wenn wir uns für die Fläche aufgespannt durch \vec{a} und $\vec{b} + \vec{c}$ interessieren, dann kann die grosse blaue Fläche berechnet werden aus der Summe der kleineren roten Flächen, die aufgespannt werden durch \vec{a} und \vec{b} bzw. \vec{a} und \vec{c} .

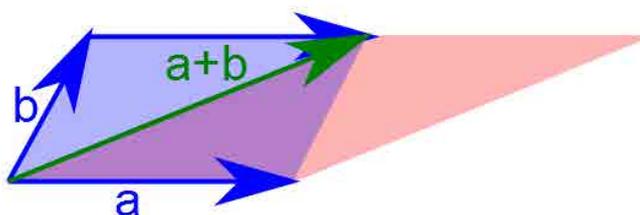


Abbildung 12.2: Die Fläche verändert sich nicht, wenn anstatt der Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch \vec{a} und \vec{b} (blau), die Fläche aufgespannt durch \vec{a} und $\vec{b} + \vec{a}$ (rot) berechnet wird.

Infobox Linearität der Determinante

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 & b_1 \\ \lambda \cdot a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}\right)$$

d.h. die Determinante ist linear, wenn wir ganze Spalten (oder ganze Zeilen) als Argumente auffassen.

Beachte, dass die Determinante aufgrund der Linearität auch negative Werte annehmen kann, d.h. die Determinante berechnet die Fläche plus ein Vorzeichen.

Infobox Additon von Spalten (oder Zeilen)

- Die Determinante ändert sich nicht, wenn eine Spalte zur anderen addiert wird. Siehe auch Fig. 12.2.
- Achtung: Die Multiplikation einer Spalte mit einer Zahl *verändert* die Determinante!
- $\det(\vec{a}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$

Beispiel 12.3 Determinante $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

UKQDY6

Berechnen Sie die Determinant

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 37 & 35 \\ 57 & 55 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir machen die Einträge kleiner, indem wir von der ersten Spalte die zweite abziehen:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 35 \\ 2 & 55 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir aus der ersten Spalte die 2 ausklammern und berechnen die Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 1 & 55 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot (55 - 35) = 40$$

Übrigens: Man könnte die Multiplikationen noch weiter vermeiden, indem man in einem weiteren Schritt die erste Zeile von der zweiten abziehen würde:

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 1 & 55 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot (20 - 0) = 40$$

Beispiel 12.4 Determinante $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

SE7NDL

Berechnen Sie die Determinananten

a) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 232 & 447 \\ 242 & 457 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 382 & 44 \\ 362 & 24 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 261 & 291 \\ 101 & 131 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 13247 & 13347 \\ 28469 & 28569 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\det(\mathbf{B}) = -2150$

c) $\det(\mathbf{D}) = -6760$

b) $\det(\mathbf{C}) = 4800$

d) $\det(\mathbf{E}) = -1522200$

12.2 Determinante von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Definition Determinante in 3D

Sei \mathbf{A} eine 3×3 -Matrix, und \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} die Spalten von \mathbf{A} . Die Determinante ist dann definiert als

$$\det(\mathbf{A}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \text{ (Spatprodukt).}$$

Infobox Linearität des Spatprodukts

Das Spatprodukt ist linear in allen Argumenten, d.h.

$$[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

und

$$[\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Diese Gleichungen gelten auch für die Addition und Multiplikation im zweiten Argument \vec{b} und im dritten \vec{c} .

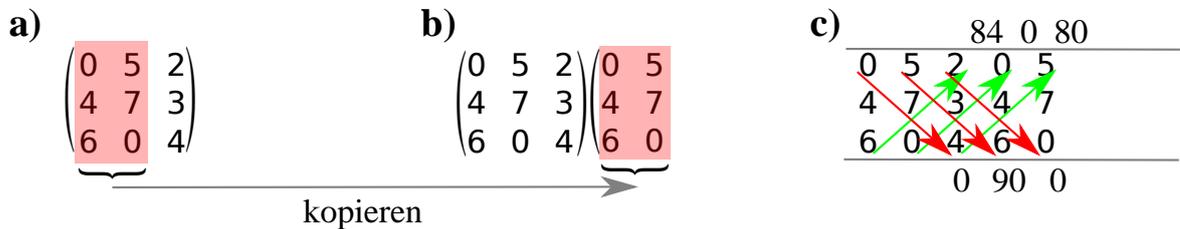


Abbildung 12.3: **a)** Die Regel von Sarrus ist ein graphisches Schema zur Berechnung der Determinante für $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$. **b)** Dabei werden die ersten beiden Spalten noch einmal als 4. und 5. Spalte kopiert. **c)** Entlang der 3 Diagonalen von oben nach unten (rot), werden die Produkte berechnet (0, 90 und 0). Davon werden die Produkte der 3 Diagonalen von unten nach oben (grün) abgezogen (84, 0 und 80). Wir erhalten also $0 + 90 + 0 - 84 - 0 - 80 = -74$

Satz Regel von Sarrus

Sei \mathbf{A} die Matrix mit den Einträgen $a_{i,j}$, dann ist

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}_{\text{Pfeile rot}} - \underbrace{a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}}_{\text{Pfeile grün}}$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.174], [Papula, 2009, Bd. 2 I 3.1]

Beispiel 12.5 Spatprodukt und Regel von Sarrus

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Determinanten mit dem Spatprodukt
b) Berechnen Sie die Determinanten mit der Regel von Sarrus.

Lösung:

- a) Spatprodukt: Wir benennen die Spalten

$$\mathbf{A} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{c}} \right]$$

$$\underbrace{\vec{b} \times \vec{c}}_{=: \vec{d}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a} \odot \vec{d} = 10$$

- b) Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 2 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - 0 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Beispiel 12.6 Berechnen Sie die Determinanten mit dem Spatprodukt IDV7PK

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 10 \\ 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\det(\mathbf{A}) = 0$

c) $\det(\mathbf{C}) = -613$

b) $\det(\mathbf{B}) = -12$

d) $\det(\mathbf{D}) = 758$

Beispiel 12.7 Determinanten 3D, Regel von Sarrus

T8SRHO

Berechnen Sie die Determinanten aus der vorherigen Aufgabe mit der Regel von Sarrus.

Lösung:

a) $\det(\mathbf{A}) = 120 + 168 + 180 - 192 - 126 - 150 = 0$

b) $\det(\mathbf{B}) = 6 + 4 + 9 - 12 - 1 - 18 = -12$

c) $\det(\mathbf{C}) = 90 + 50 - 210 - 70 - 500 + 27 = -613$

d) $\det(\mathbf{D}) = 8 + 630 - 9 - 30 - 9 + 168 = 758$

12.3 Determinante einer Dreiecksmatrix**Satz Determinante einer Dreiecksmatrix**

Für Dreiecksmatrizen (Diagonale von $a_{1,1}$ bis $a_{n,n}$) ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine Dreiecksmatrix, dann gilt

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{N,N} = \prod_{i=1}^N a_{i,i}$$

Für Matrizen mit der Diagonalen $a_{1,N}$ bis $a_{N,1}$ gilt

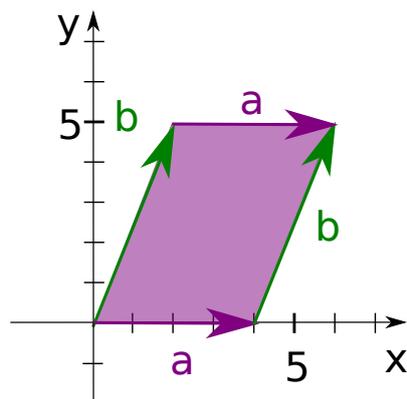
$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \cdot a_{1,N} \cdot a_{2,N-1} \cdot \dots \cdot a_{N,1}$$

$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ bedeutet abrunden. Wir erhalten z.B.

N	$\frac{N}{2}$	$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$	$(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$
1	0.5	0	1
2	1.	1	-1
3	1.5	1	-1
4	2.	2	1
5	2.5	2	1

Beispiel 12.8 Determinante einer Dreiecksmatrix

VDJ9NX



$$\mathbf{A} = (\vec{a}^T; \vec{b}^T) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante. Benutze die geometrische Interpretation, dass nämlich die Determinante die Fläche des Parallelogramms berechnet.

In der Matrix \mathbf{A} sind die Vektoren \vec{a} und \vec{b} als Zeilen angeordnet.

Lösung:

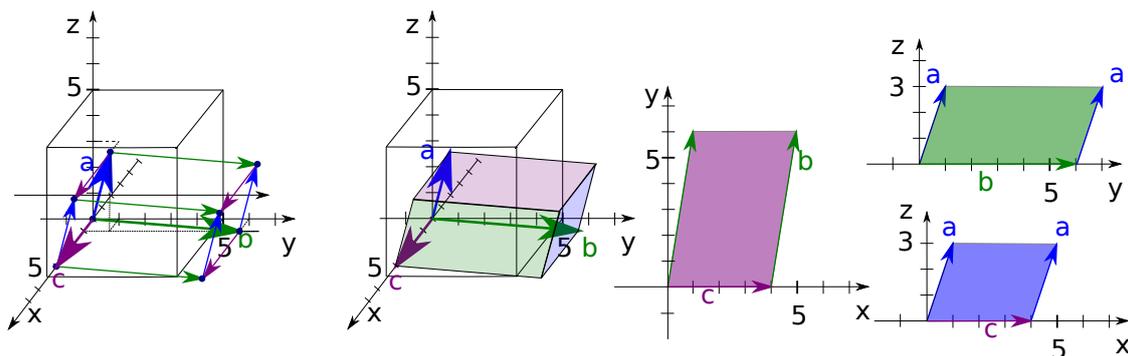
Die Grundkante berechnen wir aus der Länge von \vec{a} in Richtung $a_1 = 4$. Die Höhe des Parallelogramms ist $b_2 = 5$.

$$\det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 5 = 20$$

Beachte: Wenn wir das Parallelogramm kippen, d.h. durch die Variation von $b_1 = 2$, ändert sich die Fläche nicht. Nur die Diagonal-Elemente der Matrix \mathbf{A} haben einen Einfluss auf die Fläche.

Beispiel 12.9 Determinante einer Dreiecksmatrix

805275



Berechnen Sie die Determinante. Benutze die geometrische Interpretation, dass nämlich die Determinante das Volumen des Spats berechnet.

In der Matrix \mathbf{A} sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} als Zeilen angeordnet.

$$\mathbf{A} = (\vec{a}^T; \vec{b}^T; \vec{c}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Grundfläche berechnen aus der Länge in Richtung $x = 4$ und der Höhe des roten Parallelogramms in Richtung $y = 6$. Schliesslich lesen wir noch die Höhe des Spats aus $z = 3$. Dies sind die drei Diagonalelemente der Matrix A .

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{(-1)}_{=f} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 = -72$$

Der Faktor f ergibt sich aus der Konvention, dass bei Matrizen mit einer Diagonalen, die links unten beginnt ein Faktor $f = (-1)$ multipliziert wird. Sieh auch Satz 12.1.

Beispiel 12.10 Dreiecksmatrizen**1F6GZM**

Berechnen Sie wenn möglich die Determinanten mit der Regel von Sarrus und dann mit den Regeln für Dreiecksmatrizen. Vergleichen Sie die Resultate.

a) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 7 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

h) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 & 8 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\det(\mathbf{E}) = 24$

d) $\det(\mathbf{H}) = 280$

g) $\det(\mathbf{L}) = -50$

b) $\det(\mathbf{F}) = -72$

e) $\det(\mathbf{J}) = 24$

c) $\det(\mathbf{G}) = -50$

f) $\det(\mathbf{K}) = -72$

h) $\det(\mathbf{M}) = 280$

Beispiel 12.11 Dreiecksmatrizen und Elimination**PSGF67**

Eliminieren Sie. Berechnen Sie dann die Determinanten den Regeln für Dreiecksmatrizen.

$$\text{a) } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 2 \\ 25 & 4 & 37 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -9 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 7 \\ -5 & -9 & -5 & -14 \\ 13 & 26 & 9 & 21 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Durch die Elimination erhalten wir

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und $\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{E}') = 24$

b) Durch die Elimination erhalten wir

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}') = -72$

c) Durch die Elimination erhalten wir

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und $\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{G}') = -50$

d) Durch die Elimination erhalten wir

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 7 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\det(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{H}') = 280$

Beispiel 12.12 Determinanten von Dreiecksmatrizen

341887

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Benutzen Sie Eliminationen und den Satz über die Determinante von Dreiecksmatrizen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & b & -1 \\ -b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ -1 & x & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & x & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & x & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x + b_5 \end{pmatrix}$$

Lösung

a) Wir eliminieren

$$\begin{pmatrix} 0 & b & -1 \\ -b & 2 & 0 \\ 1 & -2b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & -1 \\ -b & 2 & 0 \\ 1 - b^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

So erhalten wir $\det(\mathbf{A}) = -(-1) \cdot 2 \cdot (1 - b^2) = 2 - 2b^2$

b) Wir eliminieren

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & a - x & a^2 - x^2 \\ 0 & b - x & b^2 - x^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & a - x & a^2 - x^2 \\ 0 & 0 & b^2 - x^2 - \frac{(b-x)(a^2-x^2)}{a-x} \end{pmatrix}$$

So erhalten wir $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (a - x) \cdot (b^2 - x^2 - \frac{(b-x)(a^2-x^2)}{a-x}) = (b - a) \cdot (a - x) \cdot (b - x)$

c) Die Matrix wird auf obere Dreiecksform gebracht. Dazu wird zur zweiten Zeile $1/x$ mal die zweite Zeile dazugerechnet. Durch mehrfaches Anwenden dieses Verfahrens auf die Zeilen 3, 4 und 5 erhält man die obere Dreiecksform. Dann kann die Determinante durch Multiplikation der Diagonalelemente berechnet werden.

$$\det(\mathbf{A}) \stackrel{\text{II} = \text{II} + \text{I} \cdot \frac{1}{x}}{=} \det \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 & 0 & b_2 + b_1/x \\ 0 & -1 & x & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & x & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x + b_5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & = \det \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 & 0 & b_2 + b_1/x \\ 0 & 0 & x & 0 & b_3 + \frac{b_2 + b_1/x}{x} \\ 0 & 0 & 0 & x & b_4 + b_3 + \frac{b_2 + b_1/x}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x + b_5 + \frac{b_4 + \frac{b_3 + \frac{b_2 + b_1/x}{x}}{x}}{x} \end{pmatrix} \right) \\ & = x^4 \cdot \left(x + b_5 + \frac{b_4 + \frac{b_3 + \frac{b_2 + b_1/x}{x}}{x}}{x} \right) \\ & = x^5 + b_5 \cdot x^4 + b_4 \cdot x^3 + b_3 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + b_1 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist auch gültig für den Fall $x = 0$.

12.4 Folgen der Linearität

Infobox Linearität Determinanten

Die Determinante ist linear in allen Argumenten, wenn wir Zeilen (oder Spalten) als Argument auffassen.

Infobox Vertauschen von Spalten (oder Zeilen)

Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn Spalten vertauscht werden.

Beispiel 12.13 Spalten vertauschen

X9E92Z

Wir kennen die Determinante $\det(\mathbf{N}) = \det([\vec{x}, \vec{y}]) = 2$. Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{M} = [\vec{y}, \vec{x}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Bringen Sie dazu die Spalten von \mathbf{M} in alphabetische Reihenfolge.

Lösung:

Mit der Linearität erhalten wir

$$\det([\vec{y}, \vec{x}]) = \det([\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}]) = \det([\vec{y} - (\vec{x} + \vec{y}), \vec{x} + \vec{y}]) = \det([-\vec{x}, \vec{x} + \vec{y} - \vec{x}]) = -\det([\vec{x}, \vec{y}])$$

Es werden hier immer ganze Spalten von einander abgezogen. Im letzten Schritt benutzen wir die Homogenität. Also $\det(\mathbf{M}) = -2$

Beispiel 12.14 Spalten vertauschen

NDW7G3

$$\mathbf{M} = [\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

Wir wollen die Determinante von \mathbf{M} berechnen, indem wir die Spalten in alphabetische Reihenfolge bringen — denn von $\mathbf{P} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ kennen wir die Determinante. Arbeiten sie z.B. mit $\det(\mathbf{P}) = 5$

- Bringen Sie die Spalten von \mathbf{M} in alphabetische Reihenfolge. Benutzen Sie dazu ausschliesslich die Linearität der Determinante.
- Verallgemeinern Sie: Wie ändert sich die Determinante, wenn wir Spalten (oder Zeilen) vertauschen?

Lösung:

$$\begin{aligned}
[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] &= [\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] \\
&= [\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}), \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [-\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] \\
&= [-\vec{a}, \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{a}), \vec{c}] \\
&= [-\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]
\end{aligned}$$

Wir werden ab jetzt die Umformungen oben wie folgt vermeiden: Wir vertauschen Zeilen (oder Spalten) und bei jeder Vertauschung ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Oder kurz:

$$\det([\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]) = -\det([\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}])$$

Beispiel 12.15 Determinante der Transponierten

Berechne die Determinante von \mathbb{A}^\top mit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir finden

$$\det(\mathbb{A}^\top) = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 = \det(\mathbb{A})$$

Infobox Determinante der Transponierten

- $\det\left(\vec{a}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}\right) = 0$

- $\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^\top\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right)$

Dies gilt übrigens auch in mehr als 3 Dimensionen

Infobox Geometrische Bedeutung der Determinante

- Für 1D definiert man $\det(a_{11}) = a_{11}$
- 1D Länge + Vorzeichen
- 2D Fläche + Vorzeichen
- 3D Volumen + Vorzeichen
- 4D und ND: Die Determinante ist das Hypervolumen des Hyper-Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren in den Spalten der Matrix + Vorzeichen

Beispiel 12.16 Lineare Abhängigkeit

468897

Bestimme x , so dass die Spaltenvektoren der Matrix \mathbf{A} linear unabhängig sind.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & x & 2 \\ 6 & 5 & x \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Lösung

Wir berechnen die Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = 60 + 30x$$

Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig, falls die Determinante nicht verschwindet, also für alle $x \in \mathbb{R}$ ausser

$$x = -2$$

Beispiel 12.17 Lineare Abhängigkeit

0GB96D

Bestimme x , so dass die Spaltenvektoren der Matrizen linear unabhängig sind.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 3 & -x \end{pmatrix}$

Lösung

a) Wir berechnen die Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = -2x + x^3$$

Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig, falls die Determinante nicht verschwindet, also für alle $x \in \mathbb{R}$ ausser

$$x_1 = 0 \text{ und } x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$$

b) Wir berechnen die Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = 3x - x^3$$

Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig, falls die Determinante nicht verschwindet, also für alle $x \in \mathbb{R}$ ausser

$$x_1 = 0 \text{ und } x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

Beispiel 12.18 Äquivalenzumformungen für die Determinante, 670545

Es soll die Determinante von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ bestimmt werden. Anton formt folgendermassen um:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \text{ also } \det(\mathbf{A}) = 0 \cdot (-6) + 9 = 9$$

mit den Zeilenumformungen:^a $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$.

Berta formt folgendermassen um:

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ also } \det(\mathbf{A}) = 0 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-9) = -9$$

mit den Zeilenumformungen: $\mathbf{B}' = (\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_2)$.

Die Resultate für die Determinante unterscheiden sich durch das Vorzeichen. Anton und Berta sollten aber das gleiche Resultat erhalten. Wer hat den Fehler gemacht? Untersuchen Sie, ob wirklich beide zulässige Zeilenumformungen vorgenommen haben.

Lösung

In diesem Fall hat Berta Recht. Die Zeilenumformungen von Anton sind nicht zulässig. Benützen wir die Äquivalenzumformungen für die Determinante^b

- Zeilen addieren
- Zeilen vertauschen (ändert das Vorzeichen)
- Faktor vor einer Zeile vor die Determinante schreiben

um aus der Matrix \mathbf{A}' wieder die Matrix \mathbf{A} zu erhalten, dann sieht man, dass das Vorzeichen wechselt^c

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \det(\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; -\mathbf{A}_2) = \det(\mathbf{A}_1; -\mathbf{A}_2) = -\det(\mathbf{A}) .$$

^a \mathbf{A}_1 ist z.B. die erste Zeile von \mathbf{A}

^bEs sind nicht die selben wie beim Gaußalgorithmus, wo man a) Zeilen addieren, b) Zeilen vertauschen und c) Zeilen mit einer Zahl multiplizieren kann

^cBei jedem Schritt darf nur *eine* Äquivalenzumformung angewandt werden.

12.5 Übungen

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Verwenden Sie den Satz von Sarrus und den Satz über Determinante von Diagonalmatrizen. Nützen Sie ausserdem aus, dass die Addition von Zeilen (oder Spalten) die Determinante nicht verändert, dass aber die Vertauschung von Zeilen, das Vorzeichen der Determinante ändert. Überprüfen Sie Ihre Resultate mit Matlab (Befehl $\det(A)$).

a) $\begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$

Lösung

a) $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

b) Regel von Sarrus: $1 \cdot 5 \cdot 9 + 26 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0$

c) Zeilen vertauschen

$$C' = (C_4, C_3, C_2, C_1).$$

Dafür sind zwei Vertauschungen nötig $4 \leftrightarrow 1$ und $3 \leftrightarrow 2$. Bei jeder Vertauschung ändert die Determinante das Vorzeichen: $(-1) \cdot (-1) = 1$, d.h. durch zwei Vertauschungen ändert sich die Determinante nicht. So entsteht eine Diagonalmatrix. Die Determinante kann aus den Diagonalelementen berechnet werden: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

d) Bringe die Matrix in Diagonalform $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6 - 3\mathbf{A}_5)$. Dann ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente: $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2$.

e) Wir verwenden die Notation \mathbf{A}_i für die i -te Zeile der Matrix \mathbf{A} . Die Umformungen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_5 - \mathbf{A}_1) \\ \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 - 2\mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_4 - 3\mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_5 - 4\mathbf{A}'_2) \\ \mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1, \mathbf{A}''_2, \mathbf{A}''_3 - 2\mathbf{A}''_2, \mathbf{A}''_4 - 3\mathbf{A}''_2, \mathbf{A}''_5 - 4\mathbf{A}''_2) \\ \mathbf{A}'''' &= (\mathbf{A}'''_1, \mathbf{A}'''_2, \mathbf{A}'''_3, \mathbf{A}'''_4 - 3\mathbf{A}'''_3, \mathbf{A}'''_5 - 6\mathbf{A}'''_3) \\ \mathbf{A}''''' &= (\mathbf{A}''''_1, \mathbf{A}''''_2, \mathbf{A}''''_3, \mathbf{A}''''_4, \mathbf{A}''''_5 - 4\mathbf{A}''''_4)\end{aligned}$$

führen nacheinander auf die Matrizen:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 34 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 69 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 53 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}'''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Jetzt kann die Determinante als Produkt der Diagonalelemente berechnet werden: } \det(\mathbf{A}) = 1$$

f)

$$\begin{aligned}\mathbf{D}' &= (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3 - \mathbf{D}_1) \\ \mathbf{D}'' &= (\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2, \mathbf{D}'_3 - \mathbf{D}'_2)\end{aligned}$$

führen nacheinander auf die Matrizen: $\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & (b-a) & (b-a) \\ 0 & (b-a) & (c-a) \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D}'' =$

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & (b-a) & (b-a) \\ 0 & 0 & (c-b) \end{pmatrix}. \quad \text{Jetzt kann die Determinante als Produkt der Diagonalelemente berechnet werden: } \det(\mathbf{A}) = a \cdot (b-a) \cdot (c-b) = a^2b - a^2c - ab^2 + abc$$

g) Regel von Sarrus: $\det(\mathbf{A}) = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) - (1-\lambda) - (3-\lambda) = 2 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$

h) Regel von Sarrus: $\det(\mathbf{A}) = 16 - 12 = 4$

i) Regel von Sarrus: $\det(\mathbf{A}) = 10$

j) Regel von Sarrus: $\det(\mathbf{A}) = yz^2 + xy^2 + zx^2 - yx^2 - zy^2 - xz^2$. Übrigens lässt sich das umformen zu $(y-x) \cdot (x-z) \cdot (y-z)$

12.6 Regel von Cramer

Satz Regel von Cramer

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung \vec{x} des Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

ist gegeben durch

$$x_k = \frac{\det(\vec{A}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{A}_n)}{\det(\mathbf{A})}$$

wobei \vec{b} die k -te Spalte ersetzt.

[Papula, 2009, Bd. 2 I 5.4, p. 92], [Goebbels and Ritter, 2011, p.181]

Beispiel 12.20 Regel von Cramer

725615

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit der Regel von Cramer.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_2 + 1x_3 = 4 \end{cases}$$

Lösung:

Wir nennen die Koeffizienten Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und die Inhomogenität } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich die Lösung des Gleichungssystems schreiben als

$$x_1 = \frac{\det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_2 = \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_3 = \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b})}{\det(\mathbf{A})}.$$

Die Determinanten sind

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 10 + 0 + -9 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ \det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3) &= 4 + 27 + 0 + -24 + 0 + 0 = 7 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) &= 15 - 12 + 0 + 0 + 0 + 2 = 5 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b}) &= 40 + -6 + 0 + 0 - 45 + 0 = -11 \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung

$$x_1 = \frac{7}{1} = 7, \quad x_2 = \frac{5}{1} = 5, \quad x_3 = \frac{-11}{1} = -11.$$

Leiten Sie den Satz von Cramer in drei Dimensionen her. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3) \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Dabei fassen wir die erste Spalten von \vec{A} im Spaltenvektor \vec{A}_1 zusammen usw. Betrachten Sie vorerst nur die zweite Variable y .

Der Beweis ist nicht sehr intuitiv. Deshalb sind hier die Schritte angegeben:

- Nehmen Sie an, dass Sie die Lösung (x, y, z) des Gleichungssystems schon kennen würden und drücken Sie \vec{b} mit dieser Lösung aus
- Ersetzen Sie die zweite Spalte von \mathbf{A} mit diesem Ausdruck für \vec{b}
- Berechnen Sie die Determinante dieser Matrix
- Lösen Sie nach y auf

Lösung:

Würden wir die Lösung des Gleichungssystems schon kennen, dann könnten wir \vec{b} schreiben mit Hilfe der Koeffizientenmatrix und der Lösung

$$\vec{b} = x\vec{A}_1 + y\vec{A}_2 + z\vec{A}_3 .$$

In der Matrix \mathbf{A} ersetzen wir nun \vec{A}_2 mit \vec{b} und berechnen die Determinante der 3×3 -Matrix

$$(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)$$

Wir setzen dies zusammen und vereinfachen:

$$\begin{aligned} \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) &= \det(\vec{A}_1, x\vec{A}_1 + y\vec{A}_2 + z\vec{A}_3, \vec{A}_3) \\ &= 0 + \det(\vec{A}_1, y \cdot \vec{A}_2, \vec{A}_3) + 0 = y \cdot \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck haben wir also die Determinante von \mathbf{A} . Diese Gleichung können wir nach y auflösen:

$$y = \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} .$$

Für die weiteren Unbekannten x und z beweist man dies genau gleich.

Lösen Sie die folgenden *inhomogenen quadratischen* linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Regel von Cramer:

a)

$$\begin{cases} -x + 10y + 5z = 3 \\ 3x - 6y - 2z = -2 \\ -8x + 14y + 4z = 6 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3y + 2x = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{cases}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung

a) Die Matrix-Darstellung lautet

$$\begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wir benützen die Schreibweise $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ und \vec{A}_j ist die j -te Spalte von \mathbf{A} . Dann sind die Lösungen

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} \\ y &= \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} \\ z &= \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b})}{\det(\mathbf{A})}. \end{aligned}$$

Die Determinanten sind nacheinander

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 24 + 160 + 210 - 240 - 28 - 120 = 6 \\ \det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3) &= -72 - 120 - 140 + 180 + 84 + 80 = 12 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) &= 8 + 28 + 90 - 80 - 12 - 36 = 18 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b}) &= 36 + 160 + 126 - 144 - 28 - 180 = -30. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung

$$x = \frac{12}{6} = 2, \quad y = \frac{18}{6} = 3, \quad z = \frac{-30}{6} = -5, .$$

b) Mit der selben Schreibweise wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= -50 - 6 - 12 + 5 + 16 + 45 = -2 \\ \det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3) &= -25 - 72 - 12 + 60 + 8 + 45 = 4 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) &= 30 + 2 + 36 - 3 - 48 - 15 = 2 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b}) &= -120 - 9 - 12 + 5 + 24 + 108 = -4. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung

$$x_1 = \frac{4}{-2} = -2, \quad x_2 = \frac{2}{-2} = -1, \quad x_3 = \frac{-4}{-2} = 2, \quad .$$

c)

$$x = \frac{66}{22} = 3, \quad y = \frac{-22}{22} = -1, \quad z = \frac{44}{22} = 2$$

Beispiel 12.23 Gleichung der Parabel

044328

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel ($f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$) durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \end{pmatrix}$. Stellen Sie dazu ein Gleichungssystem auf und benützen Sie dann die Regel von Cramer.

Lösung

Die Parabel soll durch die drei Punkte gehen, d.h. für den ersten Punkt soll

$$a + b + c = -8$$

erfüllt sein. Für die weiteren Punkte ergibt sich $4a + 2b + c = -12$ und $a - b + c = -18$. Das lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix} .$$

Aus der Koeffizienten-Matrix \mathbf{A} und der Inhomogenität $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= -6 \\ \det(\vec{b}, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) &= 18 \\ \det(\mathbf{A}_1, \vec{b}, \mathbf{A}_3) &= -30 \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \vec{b}) &= 60 . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind demnach:

$$a = \frac{18}{-6} = -3, \quad b = \frac{-30}{-6} = 5, \quad c = \frac{60}{-6} = -10, \quad .$$

Und die Parabel ist also $f(x) = -3 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 10$.

12.7 Effiziente Berechnung der Determinante

Infobox Effiziente Berechnung der Determinante

In $N \geq 3$ wird die Determinante effizient berechnet, indem die Matrix mit dem Gauss-Verfahren auf Dreiecks-Form gebracht wird.

- Die Determinante verändert sich durch die Elimination $\mathbf{A}'_i = 1 \cdot \mathbf{A}_i + \nu \cdot \mathbf{A}_j$ ($i \neq j$) nicht. Wichtig ist, dass der Koeffizient vor $1 \cdot \mathbf{A}_i$ nur eine 1 sein darf, während $\nu \in \mathbb{R}$.
- Berechnen wir die Determinante aus der Dreiecksmatrix und multiplizieren mit der Hilfszahl f .
- Der Vorfaktor (Hilfszahl) ist am Anfang der Elimination $f = 1$.

Er

- ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen vertauscht werden $f' = f \cdot (-1)$.
- er wird mit $1/\lambda$ multipliziert, falls eine Zeile mit λ multipliziert wird $f' = f \cdot \frac{1}{\lambda}$.

Beispiel 12.24 Effiziente Berechnung der Determinante

721944

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

mit den Umformungen $\mathbf{R}' = (\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1; \mathbf{R}_3 - 2\mathbf{R}_1)$. Damit wir besser eliminieren können, multiplizieren wir die 2. Zeile mit $1/3$. Das ändert den Vorfaktor $f' = \frac{1}{1/3} \cdot f = 3$.

$$\mathbf{R}'' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

Schliesslich eliminieren wir wieder: $\mathbf{R}'' = (\mathbf{R}'_1; \mathbf{R}'_2; \mathbf{R}'_3 + 4\mathbf{R}'_2)$ und erhalten

$$\mathbf{R}''' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot f' = -12 \cdot 3 = -36$$

Beispiel 12.25 Effiziente Berechnung der Determinante

BL18CK

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 20 & 0 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

mit den Umformungen $\mathbf{R}' = (\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_2 - 4\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1; \mathbf{R}_4 - 2\mathbf{R}_1)$. Die Zeilen sollten jetzt geordnet werden. Bei jedem Vertauschen der Zeilen ändert das Vorzeichen von f .

$$\mathbf{R}' \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} = \mathbf{R}''$$

Der Vorfaktor ist also $f' = f \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$ und die Determinante ist

$$\det(\mathbf{R}) = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-28) \cdot f' = -280$$

Beispiel 12.26 Effiziente Berechnung der Determinante

519361

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -11 & -17 \\ 2 & 6 & 13 & 39 & 55 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

Lösung: Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Wir teilen die erste Zeile durch 3

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{l} Z'_1 = Z_1 \cdot \frac{1}{3} : \\ Z'_2 = Z_2 : \\ Z'_3 = Z_3 : \\ Z'_4 = Z_4 : \\ Z'_5 = Z_5 : \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -11 & -17 \\ 2 & 6 & 13 & 39 & 55 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 28 \end{array} \right].$$

Dadurch ändert sich der Vorfaktor $f' = f \cdot \frac{1}{1/3} = 3$. Jetzt eliminieren wir

$$\mathbf{R}'' = \begin{bmatrix} Z_1'' = Z_1' : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2'' = Z_2' - 2 \cdot Z_1' : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z_3'' = Z_3' - 2 \cdot Z_1' : & 0 & 0 & -15 & -25 & -35 \\ Z_4'' = Z_4' - 2Z_1' : & 0 & 0 & 3 & 25 & 37 \\ Z_5'' = Z_5' - 2Z_1' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Um weiter eliminieren zu können teilen wir die dritte Zeile durch 5:

$$\mathbf{R}''' = \begin{bmatrix} Z_1''' = Z_1'' : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2''' = Z_2'' : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z_3''' = Z_3'' \cdot \frac{1}{5} : & 0 & 0 & -3 & -5 & -7 \\ Z_4''' = Z_4'' : & 0 & 0 & 3 & 25 & 37 \\ Z_5''' = Z_5'' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Der Vorfaktor ändert sich dadurch $f'' = f \cdot \frac{1}{1/5} = 15$. Elimination:

$$\mathbf{R}'''' = \begin{bmatrix} Z_1'''' = Z_1''' : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2'''' = Z_2''' - 2 \cdot Z_1''' : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z_3'''' = Z_3''' : & 0 & 0 & -3 & -5 & -7 \\ Z_4'''' = Z_4''' + Z_3''' : & 0 & 0 & 0 & 20 & 30 \\ Z_5'''' = Z_5''' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform und die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}''''') = 1 \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot 20 \cdot 10 \cdot \underbrace{15}_{f''} = 36000$$

Beispiel 12.27 Effiziente Berechnung der Determinante

X4BOZP

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Start $f = 1$. Elimination:

$$\left[\begin{array}{l|ll} L_1 & 1 & 6 & 12 \\ L_2' = L_2 + L_1 & 0 & 9 & 12 \\ L_3' = L_3 - 2L_1 & 0 & -12 & -20 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l|ll} L_1 & 1 & 6 & 12 \\ L_2'' = L_2' \cdot \frac{1}{3} & 0 & 3 & 4 \\ L_3' & 0 & -12 & -20 \end{array} \right]$$

L_2'' wird skaliert also $f' = f \cdot \frac{1}{1/3} = 3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} L_1 & & & 1 & 6 & 12 \\ L_2'' & & & 0 & 3 & 4 \\ L_3'' = L_3 + 4L_2 & & & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot f' = 36$$

Beispiel 12.28 Effiziente Berechnung der Determinante

245158

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 25 & 33 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 44 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 14 \\ 1 & 3 & 5 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Start, Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{l} Z_1' = Z_1 : \\ Z_2' = Z_2 - 3 \cdot Z_1 : \\ Z_3' = Z_3 - 4 \cdot Z_1 : \\ Z_4' = Z_4 - Z_1 : \\ Z_5' = Z_5 - Z_1 : \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{array} \right]$$

Wir ordnen die Zeilen:

$$\mathbf{R}'' = \left[\begin{array}{l} Z_1'' = Z_1' : \\ Z_2'' = Z_3' : \\ Z_3'' = Z_2' : \\ Z_4'' = Z_5' : \\ Z_5'' = Z_4' : \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

Das sind zwei Vertauschungen: $f' = f \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$. Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform und die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}'') = 1 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 4 \cdot 5 \cdot f' = 0$$

Beispiel 12.29 Effiziente Berechnung der Determinante

519361

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Drei-

ecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -11 & -17 \\ 2 & 6 & 13 & 39 & 55 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Wir teilen die erste Zeile durch 3

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} Z'_1 = Z_1 \cdot \frac{1}{3} : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z'_2 = Z_2 : & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ Z'_3 = Z_3 : & 2 & 6 & -5 & -11 & -17 \\ Z'_4 = Z_4 : & 2 & 6 & 13 & 39 & 55 \\ Z'_5 = Z_5 : & 2 & 6 & 10 & 14 & 28 \end{bmatrix}.$$

Dadurch ändert sich der Vorfaktor $f' = f \cdot \frac{1}{1/3} = 3$ Jetzt eliminieren wir

$$\mathbf{R}'' = \begin{bmatrix} Z''_1 = Z'_1 : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z''_2 = Z'_2 - 2 \cdot Z'_1 : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z''_3 = Z'_3 - 2 \cdot Z'_1 : & 0 & 0 & -15 & -25 & -35 \\ Z''_4 = Z'_4 - 2Z'_1 : & 0 & 0 & 3 & 25 & 37 \\ Z''_5 = Z'_5 - 2Z'_1 : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Um weiter eliminieren zu können teilen wir die dritte Zeile durch 5:

$$\mathbf{R}''' = \begin{bmatrix} Z'''_1 = Z''_1 : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z'''_2 = Z''_2 : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z'''_3 = Z''_3 \cdot \frac{1}{5} : & 0 & 0 & -3 & -5 & -7 \\ Z'''_4 = Z''_4 : & 0 & 0 & 3 & 25 & 37 \\ Z'''_5 = Z''_5 : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Der Vorfaktor ändert sich dadurch $f'' = f \cdot \frac{1}{1/5} = 15$. Elimination:

$$\mathbf{R}'''' = \begin{bmatrix} Z''''_1 = Z'''_1 : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z''''_2 = Z'''_2 - 2 \cdot Z'''_1 : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z''''_3 = Z'''_3 : & 0 & 0 & -3 & -5 & -7 \\ Z''''_4 = Z'''_4 + Z'''_3 : & 0 & 0 & 0 & 20 & 30 \\ Z''''_5 = Z'''_5 : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform und die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}'''') = 1 \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot 20 \cdot 10 \cdot \underbrace{15}_{f''} = 36000$$

12.8 Multiplikationssatz und weitere Themen

Satz Multiplikationssatz

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so gilt

$$\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

Satz Determinante der Inversen Matrix

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Beispiel 12.30 Determinante eines Matrix-Produkts

801837

Berechne die Determinante der Matrix \mathbf{P} .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{9} & \frac{19}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

Lösung

Wir berechnen das Matrix-Produkt

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ also } \det(\mathbf{P})$$

mit dem Satz über Dreiecksmatrizen oder evtl. der Regel von Sarrus.

Beispiel 12.31 Determinanten eines Matrix-Produkts

799761

Berechnen Sie die Determinante der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{T} . Benutze den Multiplikationssatz für Matrizen.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{T}$$

Lösung

Wir nennen die Diagonalmatrix in der Aufgabenstellung \mathbf{D} und stellen fest:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{T}) = \frac{1}{\det(\mathbf{T})} \cdot \det(\mathbf{T}) \cdot \det(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}).$$

Die Determinante der Diagonalmatrix lässt sich nun einfach berechnen:

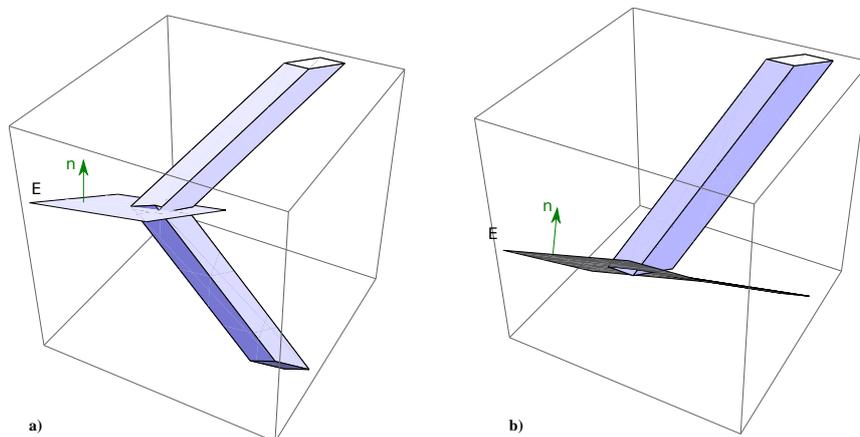
$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{D}) = (-5) \cdot 4 \cdot (-3) = 60$$

und

$$\det(\mathbf{T}) = 1 \cdot 3 \cdot 7 = 21$$

Beispiel 12.32 Erhaltung der Struktur

J7DCU5



$$\mathbf{P} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 34 & 3 & 5 \\ 3 & 26 & -15 \\ 5 & -15 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 33 & 6 & 10 \\ 6 & 17 & -30 \\ 10 & -30 & -15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{P} stellt eine Projektion auf die Ebene $E: -x + 3y + 5z = 0$ dar und \mathbf{S} eine Spiegelung an E .

- a) Berechnen Sie die Determinanten von $\mathbf{P} \odot \mathbf{1}$, $\mathbf{S} \odot \mathbf{1}$ und \mathbf{R} .
- b) Weshalb fallen die Werte so aus? Argumentieren Sie u.a. mit der Form und dem Volumen des Quaders aufgespannt durch die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) Wir interpretieren die Spalten von \mathbf{R} als Seiten eines Parallelepipeds. Berechnen Sie das Volumen.
- d) Überlegen Sie — ohne zu rechnen — welche Werte wir für die folgenden Determinanten erhalten sollten.

$$\det(\mathbf{P} \odot \mathbf{R}), \quad \det(\mathbf{S} \odot \mathbf{R}), \quad \det(\mathbf{S} \odot \mathbf{S} \odot \mathbf{R}), \quad \det(\mathbf{P} \odot \mathbf{S} \odot \mathbf{R}), \quad \det(\mathbf{R} \odot \mathbf{R}),$$

- e) Verallgemeinern Sie: Welche Werte haben die Determinanten

$$\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}), \quad \det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1}) \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{A}^{-1})$$

Lösung:

a)

$$\det(\mathbf{P}) = 0 \quad \det(\mathbf{S}) = -1 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{R}) = 4$$

b) Wir wissen dass für alle Matrizen \mathbf{A} gilt, $\mathbf{A} \odot \mathbf{1} = \mathbf{A}$. Wir betrachten nun die Spalten von $\mathbf{1}$ als die Einheitsvektoren des Koordinatensystems. Das Volumen, das sie aufspannen, ist $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ Volumeneinheit.

Somit können wir uns also folgendes überlegen: Wie wird dieser Quader verformt unter den jeweiligen Transformationen ($\mathbf{A} \odot \mathbf{1}$)? Die Spiegelung \mathbf{S} erhält das Volumen, ändert aber die Händigkeit. Das gespiegelte Koordinatensystem wird linkshändig, das drückt sich im negativen Vorzeichen aus.

Die Projektion bringt das Volumen auf 0, also ist die Determinante von $\mathbf{P} = 0$. Bei der Dreiecksmatrix wissen wir, dass die Determinante (= Volumen) nur von den Ausdehnung entlang der jeweiligen Dimensionen ist, also $\det(\mathbf{R}) = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$. Eine Neigung der Seitenkanten ändert das Volumen nicht, solange die resultierende Matrix eine Dreiecksmatrix bleibt.

c) Das Volumen ist $\det(\mathbf{R}) = 4$ Volumeneinheiten.

d) Wie oben interpretieren wir zuerst die Matrix links als Transformation, die rechts als Behälter mit dem Volumen 4. So erhalten wir

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{P} \odot \mathbf{R}) &= 0 \\ \det(\mathbf{S} \odot \mathbf{R}) &= -4 \\ \det(\mathbf{S} \odot \mathbf{S} \odot \mathbf{R}) &= \det(\mathbf{1} \odot \mathbf{R}) = 4 \\ \det(\mathbf{P} \odot \mathbf{S} \odot \mathbf{R}) &= 0\end{aligned}$$

Bei der letzten Determinante überlegen wir uns folgendes: Eine der Transformationen ist eine Projektion, deshalb wird das Volumen schliesslich auf 0 gebracht. Es ist egal, wie sich das Volumen davor verändert hat.

Aus diesen Aufgaben ziehen wir die Vermutung

$$\det(\mathbf{R} \odot \mathbf{R}) = 4 \cdot 4 = 16$$

denn $\det(\mathbf{R})$ an linker Stelle kann auch als Transformation betrachtet werden, die Volumina vervierfacht.

e) Die Determinanten sind

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) &= \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \\ \det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1}) &= \det(\mathbf{1}) = 1 \\ \det(\mathbf{A}^{-1}) &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt aus den beiden oberen: Wir wenden zuerst die erste Zeile an und schreiben die zweite Zeile ab:

$$\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$$

Teilen wir die letzten beiden Ausdrücke durch $\det(\mathbf{A})$, erhalten wir

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Beispiel 12.33 Determinanten der Transponierten

325124

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Benutzen Sie dazu den Satz von Sarrus und den Multiplikationssatz für Matrizen. Nutzen Sie zudem die Ähnlichkeit der Matrizen aus.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ 5 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 4 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

a) Für \mathbf{E} gilt

$$\mathbf{E}^T = -\mathbf{E}$$

b) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1+\sqrt{2}) & 1 & 0 \\ \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1+\sqrt{2}) & \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}) & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung

a) $\det(\mathbf{A}) = 0 + 0 + 40 - 16 + 0 + 45 = 69$

b)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \det \left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -4 \\ 5 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 4 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & -3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}) = \frac{69}{2} \end{aligned}$$

c) Allgemein gilt

$$\det(\mathbf{E}^T) = \det(\mathbf{E})$$

Hier finden wir

$$\det(\mathbf{E}^T) = \det(-\mathbf{E}) = -\det(\mathbf{E})$$

d.h. $\det(\mathbf{E}) = -\det(\mathbf{E})$. Nur die Zahl 0 kann, dies erfüllen, nämlich dass $0 = -0$. Also $\det(\mathbf{E}) = 0$.

d) Feststellung: $\mathbf{C} = \mathbf{D} \odot \mathbf{D}^T$. Also können wir die Determinante durch $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{D}^T) = \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{D})$ berechnen.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D}) &= \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1+\sqrt{2}) & 1 & 0 \\ \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1+\sqrt{2}) & 1 \\ \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Also ist die Determinante

$$\det(\mathbf{C}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{8}$$

Beispiel 12.34 Determinanten von linearen Abbildungen

F9X8FP

Bestimme die Determinante der folgenden linearen Abbildungen. Hinweis: Bestimme zuerst die Matrix M der Darstellung in einer Orthonormalbasis. Bestimme dann $\det(M)$.

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 9x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$

b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 9y \\ 3x - 5y \end{pmatrix}$

c) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_3 \\ 5x_2 + 7x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

d) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + 7y - 4z \\ 4x - 6y + 2z \end{pmatrix}$

Lösung

a) Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren:

$$\vec{e}'_1 = T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}'_2 = T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Abbildung besteht aus den Bildern der Basisvektoren, die in die Spalten geschrieben werden: $M = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, also $\det(M) = 17$

b) Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren:

$$\vec{e}'_1 = T(\vec{e}_1) = T(1, 0) = (2, 3) \quad \text{und} \quad \vec{e}'_2 = T(\vec{e}_2) = T(0, 1) = (-9, -5)$$

Die Matrix der Abbildung besteht aus den Bildern der Basisvektoren, die in die Spalten geschrieben werden: $M = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, also $\det(M) = 17$ (wie in der vorherigen Teilaufgabe, es ist nur die Schreibweise geändert).

c) $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, also $\det(M) = 4$

d) $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. Für Matrizen, die nicht quadratisch sind, ist die Determinante nicht definiert.

Beispiel 12.35 Determinanten von linearen Abbildungen

366248

Bestimme die Determinante der Abbildung $D(f(t)) = \frac{df}{dt}$ für die gegebene Basis. Hinweis: Bestimme zuerst die Matrix D , die der linearen Abbildung entspricht. Bestimme dann $\det(D)$

a) $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$

c) $\{\sin(t), \cos(t)\}$

b) $\{1, t, \dots, t^5\}$

Lösung

a) Wir ordnen jeder Funktion einen Basisvektor zu

$$e^t \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2t} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3t} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir leiten alle Funktionen ab und stellen die Ableitung als Linearkombination der drei Funktionen dar:

$$e^t \xrightarrow{\frac{df}{dt}} e^t \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die weiteren Funktionen gilt

$$e^{2t} \xrightarrow{\frac{df}{dt}} 2e^{2t} \hat{=} 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{3t} \xrightarrow{\frac{df}{dt}} 3e^{3t} \hat{=} 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben die Bilder der Basisvektoren in eine Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

also $\det(\mathbf{D}) = 6$

b) Wir ordnen jeder Funktion einen Basisvektor zu

$$t^0 = 1 \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, t^5 \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir leiten alle Funktionen ab und stellen Sie als Linearkombination der Funktionen dar, z.B.

$$t^5 \xrightarrow{\frac{df}{dt}} 5t^4 \hat{=} 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist die letzte Spalte der Matrix der Ableitung in dieser Basis. Zusammengefasst ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$$

$$\xrightarrow{\frac{df}{dt}} \{0, 1, 2t, 3t^2, 4t^3, 5t^4\} \hat{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{D}}$$

Die Determinante ist also $\det(\mathbf{D}) = 0$

c) Wir leiten alle Basisvektoren ab

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \{\sin(t), \cos(t)\} \xrightarrow{\frac{df}{dt}} \{\cos(t), -\sin(t)\} \hat{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{D}}$$

Die Determinante ist also $\det(\mathbf{D}) = 1$

Beispiel 12.36 Überblick

7TJ6SK

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt

- a) $\det(2\mathbf{A}) = 2 \cdot \det(\mathbf{A})$
- b) $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^5$
- c) $\det(\mathbf{A}) = a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot \dots \cdot a_{1,n}$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Einträgen $a_{i,j} = 0$ falls $i + j > n + 1$.
- d) $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$
- e) $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B} \odot \mathbf{A})$
- f) $\det(\mathbf{B} \odot \mathbf{B}^\top \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})^3$

Lösung:

- a) Korrekt wäre $\det(2\mathbf{A}) = 2^n \cdot \det(\mathbf{A})$, falls $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
- b) Korrekt
- c) Korrekt wäre

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot \dots \cdot a_{n,1}$$
- d) Nicht korrekt
- e) Korrekt
- f) Korrekt, denn

$$\det(\mathbf{B} \odot \mathbf{B}^\top \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B} \odot \mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{B}^\top) = \det(\mathbf{B})^2 \cdot \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})^3$$

Umkehrabbildung und inverse Matrix

13.1 Definitionen	301
13.2 Die inverse Matrix bestimmen	302
13.3 Ein reguläres LGS lösen mit A^{-1}	308
13.4 Kriterien für die Existenz der Inversen	313
13.5 Injektiv, surjektiv und bijektiv Abbildungen	317
13.6 Weitere Sätze über die Inverse	323

13.1 Definitionen

Definition Matrix-Inverse

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Existiert eine Matrix B so, dass gilt

$$A \odot B = \mathbf{1}$$

so nennt man A invertierbar und die Matrix B die Matrix-Inverse von A .

Im Weiteren schreiben wir A^{-1} für die Matrix-Inverse von A und nicht wie oben B , d.h. wir schreiben

$$A \odot A^{-1} = \mathbf{1}$$

Die Matrix A^{-1} nennt man auch die inverse Matrix von A .

Definition Reguläre Matrizen und LGS

Eine Matrix A heisst **regulär**, falls A^{-1} existiert.

Eine Matrix A heisst **singulär**, falls die Inverse nicht existiert.

Eine LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ heisst **regulär**, falls A^{-1} existiert.

13.2 Die inverse Matrix bestimmen

Beispiel 13.1 LGS lösen mit Gauss-Jordan

443930

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}$$

Schreibe das Gleichungssystem zuerst als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Wende dann das Gauss-Jordan Verfahren an.

Lösung:

Zuerst das Gauss Verfahren:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & -10 & 41 & 103 \end{array} \right] \rightarrow \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Mit der Zeilen-Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 + 10\mathbf{A}_2)$$

Dann zusätzliche Schritte für Gauss-Jordan:

$$\mathbf{A}'' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \mathbf{A}''' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

mit den Zeilen-Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2; \mathbf{A}'_2; \mathbf{A}'_3) \\ \mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 + 3\mathbf{A}''_3; \mathbf{A}''_2 + 4\mathbf{A}''_3; \mathbf{A}''_3) \end{aligned}$$

Die Lösung kann jetzt direkt abgelesen werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das Gauss-Jordan Verfahren wird in Matlab mit `rref` aufgerufen. Wird es benutzt um LGSs in erweiterter Koeffizienten-Form zu lösen — wie hier in diesem Beispiel — ist es das flexibelste Instrument um LGSs zu lösen. Also: Immer `rref` verwenden, wenn ein LGS mit Matlab gelöst werden soll.

Beispiel 13.2 Die Inverse bestimmen.

332829

Bestimme die Matrix-Inverse von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix}$ mit dem Gauss-Jordan

Verfahren. Überprüfe das Resultat.

Lösung:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right) = \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 30 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right) = \mathbf{A}^{-1}$$

Die Zeilen-Umformungen sind:

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2)$$

$$\mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1 + 6\mathbf{A}'_3; \mathbf{A}'_2 - 2\mathbf{A}'_3; \mathbf{A}'_3)$$

$$\mathbf{A}''' = (\mathbf{A}''_1 + 2\mathbf{A}''_2; \mathbf{A}''_2; \mathbf{A}''_3)$$

Kontrolle: Die Matrix-Inverse wurde richtig berechnet, denn es gilt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Beispiel 13.3 LGS lösen mit Gauss-Jordan

VTDGZN

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}} \odot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=: \vec{b}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}}_{=: \vec{b}}$$

a) Wende das Gauss-Jordan-Verfahren an um die Inverse \mathbf{B}^{-1} zu berechnen.
Kontrolle:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 31 & 3 \\ 0 & 41 & 4 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Überprüfe, ob \mathbf{B}^{-1} die Inverse von \mathbf{B} ist, indem du $\mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{B}$ berechnest.

c) Berechne $\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b}$. Was stellst du fest, wenn du mit der Lösung von Beispiel 13.1 vergleichst?

Lösung:

a) Gauss-Jordan-Verfahren:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 41 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 41 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 31 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 41 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 1 \end{array} \right) = \mathbf{B}^{-1}$$

Vorgehen:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^i &= (\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_2; \mathbf{B}_3 + 10\mathbf{B}_2) \\ \mathbf{B}^{ii} &= (\mathbf{B}_1^i - \mathbf{B}_3^i; \mathbf{B}_2^i + 4\mathbf{B}_3^i; \mathbf{B}_3^i) \\ \mathbf{B}^{iii} &= (\mathbf{B}_1^{ii} + \mathbf{B}_2^{ii}; \mathbf{B}_2^{ii}; \mathbf{B}_3^{ii}) \end{aligned}$$

b) Test:

$$\mathbf{B} \odot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{1}.$$

c) Wir berechnen

$$\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten auch so die Lösung des LGS.

Beispiel 13.4 LGS lösen mit Gauss-Jordan

WSCFYM

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}} \odot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=: \vec{b}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \vec{b}}$$

a) Schreibe das LGS als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Löse das LGS mit dem Gauss-Verfahren.

b) Wende dann das Gauss-Jordan-Verfahren an um die Inverse \mathbf{B}^{-1} zu berechnen. Kontrolle:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -13 & -15 \\ -3 & -8 & -9 \\ -3 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

c) Überprüfe, ob \mathbf{B}^{-1} die Inverse von \mathbf{B} ist, indem du $\mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{B}$ berechnest.

d) Berechne $\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b}$. Was stellst du fest?

Lösung:

a) Das Gauss Verfahren:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \mathbf{B}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & -7 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \mathbf{B}'' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{array} \right]$$

Mit den *Zeilen*-Umformungen

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_2 - 3\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_3 + 3\mathbf{B}_1)$$

$$\mathbf{B}'' = (\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_2; \mathbf{B}_3 + \frac{7}{8} \cdot \mathbf{B}_1)$$

Einsetzen von unten nach oben ergibt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Gauss-Jordan-Verfahren:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
 3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) = \mathbf{1} \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -8 & 9 & -3 & 1 & 0 \\
 0 & 7 & -8 & 3 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -8 & 9 & -3 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{7}{8} & 1
 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -8 & 9 & -3 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & -7 & -8
 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & 0 & -8 & -21 & -24 \\
 0 & -8 & 0 & 24 & 64 & 72 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & -7 & -8
 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & -5 & -13 & -15 \\
 0 & -8 & 0 & 24 & 64 & 72 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & -7 & -8
 \end{array} \right) \\
 \mathbf{1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & -5 & -13 & -15 \\
 0 & 1 & 0 & -3 & -8 & -9 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & -7 & -8
 \end{array} \right) = \mathbf{B}^{-1}
 \end{array}$$

Schritte des Gauss-Verfahrens wie oben. Danach:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}''' &= (\mathbf{B}'_1; \mathbf{B}'_2; \mathbf{B}''_3 \cdot \frac{1}{8}) \\
 \mathbf{B}^{\text{iv}} &= (\mathbf{B}'''_1 + 3\mathbf{B}'''_3; \mathbf{B}'''_2 - 9\mathbf{B}'''_3; \mathbf{B}'''_3) \\
 \mathbf{B}^{\text{v}} &= (\mathbf{B}^{\text{iv}}_1 + \frac{1}{8} \cdot \mathbf{B}^{\text{iv}}_2; \mathbf{B}^{\text{iv}}_2; \mathbf{B}^{\text{iv}}_3) \\
 \mathbf{B}^{\text{vi}} &= (\mathbf{B}^{\text{v}}_1; \mathbf{B}^{\text{v}}_2 \cdot \frac{(-1)}{8}; \mathbf{B}^{\text{v}}_3)
 \end{aligned}$$

c) Test:

$$\mathbf{B} \odot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{1} .$$

d) Wir berechnen

$$\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten auch so die Lösung des LGS.

Beim Invertieren einer Matrix mit dem Gauss-Jordan Verfahren, werden die Umformungen auf die Einheitsmatrix angewendet. So werden die Zeilenumformungen auf der rechten Seite in der Einheitsmatrix "zwischengespeichert".

Betrachten wir dazu eine Umformungen aus den vorherigen Beispiels: Beim ersten Schritt

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2)$$

Entsteht auf der rechten Seite die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie speichert die Umformung "3. Zeile plus 5 mal die 2. Zeile".

Beispiel 13.5 Berechne das Produkt $\mathbf{P} \odot \mathbf{M}$.

657484

$$\mathbf{P} \odot \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 1 & 2 & 3 \\ 100 & 200 & 300 \end{pmatrix}$$

Beschreibe den Effekt von \mathbf{P} auf \mathbf{M} in Worten.

Lösung:

$$\mathbf{P} \odot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 1 & 2 & 3 \\ 105 & 210 & 315 \end{pmatrix}.$$

In Worten: Zur dritten Zeile wir 5 mal die zweite Zeile addiert.

Diese Überlegungen können wir für alle Äquivalenzumformungen machen: Welche Umformungen angewendet wurden auf der linken Seite, das wird auf der rechten Seite gespeichert. Deshalb "enthält" am Schluss die Matrix auf der rechten Seite (\mathbf{A}^{-1}) alle Umformungen um die ursprüngliche Matrix in die Einheitsmatrix umzuformen, deshalb gilt dann

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

Infobox Zulässige Umformungen Gauss-Jordan-Verfahren

- das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren
- eine Zeile mit einer Zahl multiplizieren
- Zeilen vertauschen

Es sind die selben Umformungen wie beim Gauss-Verfahren (Definition 8.2 und Infobox 8.2), nur werden diese Schritte noch weiter ausgeführt, bis die Eins-Matrix $\mathbf{1}$ erzeugt wird.

Beispiel 13.6 Elementare Zeilenumformungen

CEPCBK

Forme das System $[\mathbf{A}|\mathbf{1}]$ mit elementaren Zeilenumformungen in das System $[\mathbf{1}|\mathbf{B}]$ um. Wie verhalten sich \mathbf{A} und \mathbf{B} zueinander?

a) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

Lösung:

$$\text{a) } \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \right]$$

$$\text{b) } \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{16}{13} & -\frac{19}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{11}{13} & -\frac{9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{12}{13} & \frac{11}{13} \end{array} \right]$$

Für A und B gilt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{1} \text{ und } \mathbf{B} \odot \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

Die eine ist also Inverse der anderen Matrix.

13.3 Ein reguläres LGS lösen mit \mathbf{A}^{-1}

Inverse Matrizen erlaubt ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

wie folgt zu lösen. Wir multiplizieren von beiden Seiten \mathbf{A}^{-1} von links, dann ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Gemäss Definition ist das Matrixprodukt auf der linken Seite gleich der Einheitsmatrix,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$$

Da diese Matrix den Vektor \vec{x} nicht verändert ($\mathbf{1} \odot \vec{x} = \vec{x}$), können wir sie weglassen und erhalten die Lösung

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}.$$

Beispiel 13.7 Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Inversen 786014

Berechne die Lösung \vec{x} des LGS mit Hilfe der Inversen

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 33 & -10 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -1 & 11 \\ 61 & -3 & 32 \\ 83 & -4 & 43 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt:

$$\mathbf{A} \odot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b}$$

Also

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Erklärungen zu diesem Thema sind auch in [Papula, 2009, Bd. 2 I 5.5, p. 93] zu finden.

Bei allen Aufgaben ist die Inverse der Koeffizientenmatrix gegeben. Lösen Sie die LGSs. Betrachten Sie am Schluss die Aufgaben b) und e) noch einmal. Was stellen Sie fest?

a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b} \text{ und } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left| \begin{array}{cc|c} -2x & -2y & = 0 \\ -3x & -y & = 0 \end{array} \right| \text{ und } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -14 & 6 \\ 1 & -19 & 5 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{=:C} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -66 \\ -78 \\ 18 \end{pmatrix}}_{=:b} \text{ und } C^{-1} = \begin{pmatrix} 71 & -50 & 44 \\ 34 & -24 & 21 \\ 115 & -81 & 71 \end{pmatrix}$$

d)

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -x & +5y & +z & = 55 \\ & 149y & +5z & = 1267 \\ 5x & +154y & +z & = 1247 \end{array} \right| \text{ und } D^{-1} = \begin{pmatrix} -621 & 149 & -124 \\ 25 & -6 & 5 \\ -745 & 179 & -149 \end{pmatrix}$$

e)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & 11 & 9 \end{pmatrix}}_{=:E} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b} \text{ und } E^{-1} = \begin{pmatrix} -8. & 8.5 & 0.5 \\ -8.5 & 8.75 & 0.75 \\ 9.5 & -9.75 & -0.75 \end{pmatrix}$$

f)

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 8x & & -z & = 5 \\ -3x & +6y & -2.5z & = 43.5 \\ 4x & -y & & = -5 \end{array} \right| \text{ und } F^{-1} = \begin{pmatrix} -2.5 & 1 & 6 \\ -10 & 4 & 23 \\ -21 & 8 & 48 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir berechnen die Lösung, indem wir die Inverse mit der Inhomogenität \vec{b} multiplizieren. Wir erhalten:

a)

$$A^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.75 & 0.5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbf{C}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e)

$$\mathbf{E}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$\mathbf{D}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

f)

$$\mathbf{F}^{-1} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bei den Aufgaben b) und e) sehen wir: In einem regulären LGS mit der Inhomogenität $\vec{0}$ gibt es nur eine Lösung und die ist $\vec{0}$.

Beispiel 13.9 Bestimme die Inverse von A und löse das folgende LGS 183360

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}|\mathbf{1}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) = (\mathbf{1}|\mathbf{A}^{-1}) \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.10 Matrix-Inverse

536550

Lösen Sie das folgende *inhomogenen* linearen Gleichungssysteme durch Invertierung der Koeffizientenmatrix A mit dem Gauss-Jordan-Verfahren. Geben Sie \mathbf{A}^{-1} an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

Die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} berechnen wir durch gleichzeitiges Anwenden von

Äquivalenztransformationen auf \mathbf{A}^{-1} und auf $\mathbb{1}$:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}|\mathbb{1}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) = (\mathbb{1}|\mathbf{A}^{-1})
 \end{aligned}$$

Die Transformationen sind (hier wird folgende Notation verwendet: \mathbf{A}_i ist die i -te Zeile)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 - 2\mathbf{A}_1) \\
 \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2/3, \mathbf{A}'_3 - \mathbf{A}'_2/3) \\
 \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{A}''_1 + \mathbf{A}''_3/4, \mathbf{A}''_2 + \mathbf{A}''_3/4, -\mathbf{A}''_3/4)
 \end{aligned}$$

Die Lösung erhalten wir aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 13.11 Eindeutigkeit der Lösung

820317

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS) $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{c}$ genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 - \lambda & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem besitzt genau eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix invertierbar ist, d.h. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Die Determinante ist (Regel von Sarrus):

$$\det(\mathbf{A}) = 12 - 2\lambda + 0 + 4 + 2(1 - \lambda) + 0 = 18 - 4\lambda.$$

Aus der Bedingung $\det(\mathbf{A}) = 18 - 4\lambda \neq 0$ folgt $\lambda \neq \frac{9}{2}$. Das LGS besitzt eine Lösung, wenn λ von $\frac{9}{2}$ verschieden ist.

Beispiel 13.12 Eindeutigkeit der Lösung,

254537

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS) $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{c}$ genau eine Lösung?

chungssystem genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung

Die Lösung existiert und sie ist eindeutig, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ erfüllt. Hier ist (Regel von Sarrus):

$$\det(\mathbf{A}) = -3\lambda - 2\lambda + 0 + 2\lambda - 1 + \lambda + 0 = -1 - 2\lambda$$

und die Lösung ist für alle $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ eindeutig.

Beispiel 13.13 Inverse bestimmen

SSWSXV

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -4 & -6 \\ -8 & 5 & 7 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & b & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie a und b so, dass \mathbf{B} die Inverse von \mathbf{A} ist.

b) Lösen Sie mit den Resultaten von oben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + by + z = 0 \\ -x + y - 3z = a - 1 \end{cases}$$

Lösung:

Wir multiplizieren die Matrizen und erhalten

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a-6 & 2a-4b-6 & 14-2a \\ 0 & 5b-9 & 0 \\ 0 & 3b-6 & 1 \end{pmatrix}$$

Falls die eine Matrix die Inverse der anderen ist, sollte $\mathbf{C} = \mathbb{1}$ und

$$\begin{cases} a-6 = 1 \\ 3b-6 = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt $a = 7$ und $b = 2$.

Wir stellen fest, dass das angegebene LGS die Koeffizientenmatrix \mathbf{B} ergibt. Wir benutzen ihre Inverse \mathbf{A} , um das LGS zu lösen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

13.4 Kriterien für die Existenz der Inversen

Satz Invertierbare lineare Abbildung

Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $L(\vec{x}) = A\vec{x}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist invertierbar
2. $\det(A) \neq 0$
3. Der Rang der Matrix A ist n .
4. Für jedes \vec{b} hat die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.
5. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Trifft eine der Aussagen aus dem vorhergehenden Satz zu, so existiert auch die inverse Abbildung $L^{-1}(\vec{x})$ und es gilt

$$L^{-1}(\vec{x}) = A^{-1} \odot \vec{x}$$

Satz Matrix einer injektiven Abbildung

Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $L(\vec{x}) = A\vec{x}$. Dann ist L injektiv genau dann, wenn die Matrix A invertierbar ist.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Beispiel 13.14 Projektion

Y9HXCF

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{T} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Bilder der Punkte unter der Abbildung L mit der Abbildungsmatrix A

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} 16x + 12y \\ 12x + 9y \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

- b) Berechnen Sie die Inverse von A .
- c) Falls die Inverse nicht existiert, erklären Sie weshalb.

Lösung:

a) Die Bilder lauten

$$\vec{P}' = \vec{Q}' = \vec{R}' = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}, \vec{S}' = \vec{T}' = \vec{U}' = \begin{pmatrix} -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass verschiedene Bildpunkte gleich ausfallen.

b) Inversion von \mathbf{A}

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 16 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1/4 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{array} \right)$$

Hier kann die Elimination nicht weitergeführt werden, denn mit der zweiten Zeile $(0, 0)$ kann die 3 in der ersten Zeile nicht eliminiert werden. Die Inverse existiert nicht.

c) Wir haben oben gesehen, dass \mathbf{A} die Wirkung hat

$$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \vec{P}'$$

und

$$\vec{S}, \vec{T}, \vec{U} \xrightarrow{\mathbf{A}} \vec{S}'$$

Die Umkehrfunktion müsste also zum Beispiel folgendes bewerkstelligen können

$$\vec{S}' = \begin{pmatrix} -100 \\ -75 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}^{-1}} \vec{S}, \vec{T}, \vec{U}$$

und das ist nicht möglich, denn das Matrix-Produkt $\mathbf{A}^{-1} \odot \vec{S}'$ erzeugt einen einzigen Punkt und nicht drei verschiedene.

Beispiel 13.15 Projektion auf eine Gerade

ISMWWY

$$g : y = -x$$

- Projizieren Sie den Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal auf g .
- Wie lautet die Abbildung allgemein.
- Bestimme die Projektions-Matrix
- Bestimme die Inverse von \mathbf{P} .

Lösung:

Die Gerade hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n}' =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also ist wird der Punkt wie folgt projiziert:

$$\vec{P}' = \frac{\vec{P} \odot \vec{v}}{\vec{v} \odot \vec{v}} \cdot \vec{v} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung lautet allgemein

$$L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \odot \vec{v}}{\vec{v} \odot \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

oder

$$L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}$$

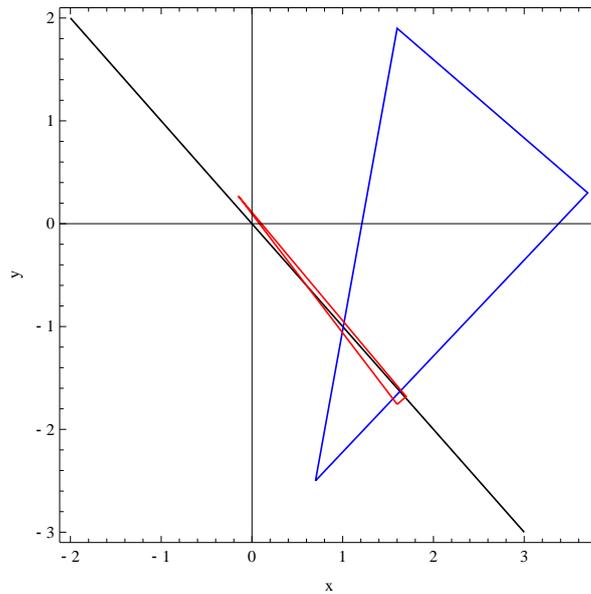
Die beiden Spalten der Projektionsmatrix ergeben sich aus den Bildern der Basisvektoren unter der Projektion:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_1 \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_2 - \vec{e}_2 \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix der Projektion ist also $\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Nun wenden wir das Gauss-Jordan-Verfahren an:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Weiter kann nicht umgeformt werden. \mathbf{P} hat keine Inverse.



Beispiel 13.16 Fast eine Projektion

58II14

- a) Berechne die Bilder der Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -2.5 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$, $\vec{D} = \begin{pmatrix} -1.6 \\ 1.9 \end{pmatrix}$ unter der Abbildung

$$Q = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

- b) Zeichne die Bildpunkte. Beschreibe das Bild des Dreiecks in Worten.
 c) Invertiere Q!

Lösung:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{1} \\ \hline \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 9 \\ 8 & 8 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \\ 16 & 0 \\ -16 & 16 \\ 2 & 0 \\ -16 & 16 \\ 18 & -16 \\ -16 & 16 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \end{array}$$

Q ist keine perfekte Projektion, d.h. das Dreieck wird nicht vollständig auf die Gerade projiziert. Die zweidimensionale Information des Dreiecks bleibt erhalten.

Mit Hilfe von Q^{-1} kann das Dreieck wieder rekonstruiert werden. Das ist nicht möglich bei einer perfekten Projektion, wie in der vorherigen Aufgabe.

13.5 Injektiv, surjektiv und bijektiv Abbildungen

Definition Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

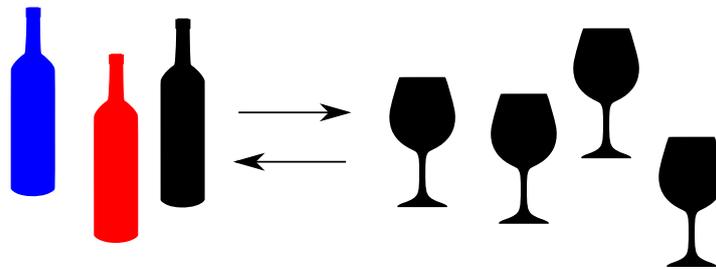
Sei L eine Abbildung^a von D nach Z oder in Symbolen

$$L : D \mapsto Z .$$

- L heisst **injektiv**, falls für je zwei Elemente $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $L(x_1) \neq L(x_2)$.
- L heisst **surjektiv**, falls zu jedem $y \in Z$ mindestens ein $x \in D$ existiert mit $L(x) = y$.
- L heisst **bijektiv**, falls L injektiv und surjektiv ist.

^aDas Wort Abbildung bedeutet bereits, dass jedem $x \in D$ ein $y \in Z$ zugeordnet wird.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]

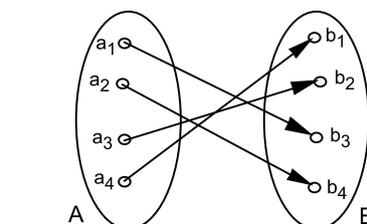
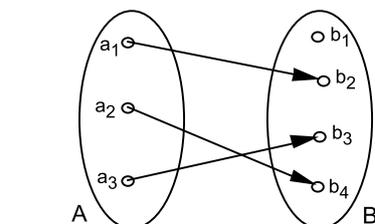


Wir können die Begriffe injektiv und surjektiv in einem Bild veranschaulichen. Wir betrachten die Flaschen x_1, x_2, x_3, \dots als Definitionismenge D und die gefüllten Gläser $L(x_1), L(x_2), L(x_3), L(x_4) \dots$ als Zielmenge. Injektiv bedeutet dann, dass verschiedene Flaschen nur in verschiedene Gläser geschüttet wurden (keine zwei Flaschen, wurden in das selbe Glas geschüttet). Und surjektiv bedeutet, dass es keine leeren Gläser gibt, nachdem eingeschenkt wurde.

Beispiel 13.17 Injektiv, surjektiv, bijektiv;

089077

Beurteilen Sie welche Eigenschaften die aufgeführten Funktionen besitzen:



a) $f : x \in \mathbb{R}^- \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

b) $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

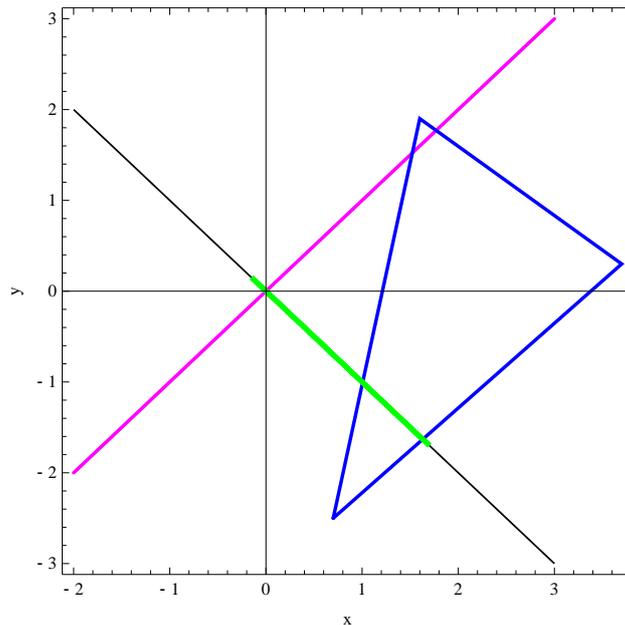


Abbildung 13.1: Bei der Projektion P wird die ganze violette Gerade auf den Ursprung abgebildet. Die Abbildung ist nicht injektiv. Deshalb gibt es keine Inverse.

Lösung

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) injektiv aber nicht surjektiv | c) bijektiv |
| b) bijektiv | d) surjektiv aber nicht injektiv |

Satz Existenz der Umkehrabbildung

Ist $L : D \mapsto Z$ bijektiv, so existiert eine eindeutige Abbildung $L^{-1} : Z \mapsto D$, die jedem $y \in Z$ ein $x \in D$ zuordnet mit $L(x) = y$. Diese Abbildung heisst Umkehrabbildung von L und wird als L^{-1} geschrieben.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]

In Abb. 13.1 wird gezeigt, dass die Abbildung Q die Abstände zur Geraden $g : y = -1x$ nur kleiner macht. Die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird zwar geschrumpft, aber es wird nicht projiziert. Dann fallen durch die Abbildung Q keine weiteren Punkte auf die Gerade g ausser die, die schon darauf sind. Deshalb ist Q injektiv¹ und hat auch eine Inverse.

¹surjektiv ist die Abbildung sowieso

Infobox Eigenschaften der Projektion

- Informationen über eine oder mehr Dimension(en) gehen verloren.
- Es gibt noch mehr Vektoren als $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abgebildet werden.
- Die Matrix, die eine Projektion enthält, erkennt man daran, dass die Spaltenvektoren linear abhängig sind.

Beispiel 13.18 Umkehrfunktion

081061

Betrachten Sie die Funktion $f(x) : x \in \mathbb{R} \mapsto y \in \mathbb{R}$ mit $y = m \cdot x + q$ ($m, q \in \mathbb{R}$).

- Bestimmen Sie für den Fall, dass f bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1} .
- Bestimmen Sie, für welche Werte von m und q die Funktion f bijektiv ist.
- Zeigen Sie, dass die in b) bestimmte Funktion f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion von f ist, indem Sie nachprüfen, dass $f^{-1} \circ f = 1$ gilt.

Lösung

- Die Umkehrfunktion berechnet sich durch Vertauschung der Namen der Variablen x und y

$$x = m \cdot y + q$$

und Auflösen nach y :

$$\begin{array}{rcl} x & = & m \cdot y + q \\ x - q & = & m \cdot y \\ \frac{x-q}{m} & = & y \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -q \\ : m \end{array} \right.$$

Die Umkehrfunktion ist also $y = \frac{x-q}{m}$.

- Der letzte Schritt der Auflösung funktioniert nur, falls $m \neq 0$. Deshalb ist f für alle q , aber nur für $m \neq 0$ bijektiv.

- $f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(m \cdot x + q) = \frac{(m \cdot x + q) - q}{m} = x$

Beispiel 13.19 Invertierbarkeit

980407

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der Determinante.

- $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} -10 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ -7 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Lösung

Falls $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ lässt sich eine Matrix invertieren. Die Determinanten sind hier:

a) $\det(\mathbf{A}) = 0$

b) $\det(\mathbf{B}) = -18$

c) $\det(\mathbf{C}) = 12$

Beispiel 13.20 Invertierbarkeit

312846

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der linearen Abhängigkeit der Zeilen.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

Matrizen mit linear abhängigen Zeilen lassen sich nicht invertieren. Wir notieren die i -te Zeile der Matrix \mathbf{A} mit \mathbf{A}_i .

a) Die beiden Zeilen sind linear abhängig, also lässt sich \mathbf{A} nicht invertieren.

b) Mit der Umformung

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3 - 2/3\mathbf{B}_1)$$

ergibt sich die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. \mathbf{B}'_2 und \mathbf{B}'_3 sind linear abhängig, also lässt sich \mathbf{B} nicht invertieren.

c) Mit der Umformung

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3 - 2 \cdot \mathbf{C}_1)$$

ergibt sich die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Die weitere Umformung

$$\mathbf{C}'' = (\mathbf{C}'_1, \frac{1}{2} \cdot \mathbf{C}'_2, \mathbf{C}'_3 - \frac{3}{2} \cdot \mathbf{C}'_2)$$

führt auf die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Das ist eine obere Dreiecksmatrix, in der die Zeilen (oder Spalten) immer linear unabhängig sind. Also lässt sich \mathbf{C} invertieren.

d) Mit den Umformung

$$\mathbf{D}' = (\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4)$$

$$\mathbf{D}'' = (\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2 - 5\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_3 - 6\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_4 + 4\mathbf{D}'_1)$$

$$\mathbf{D}''' = (\mathbf{D}''_1, \mathbf{D}''_2 - \mathbf{D}''_3, \mathbf{D}''_3, \mathbf{D}''_4 + \mathbf{D}''_3)$$

$$\mathbf{D}'''' = (\mathbf{D}'''_1, \mathbf{D}'''_2/3, \mathbf{D}'''_3/17 + \mathbf{D}'''_2/3, \mathbf{D}'''_4 + 3\mathbf{D}'''_2)$$

ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D}'' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -6 & -6 \\ 0 & -17 & -8 & -8 \\ 0 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}''' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -17 & -8 & -8 \\ 0 & -9 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{D}'''' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{51} & \frac{10}{51} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{D}'''_3 und \mathbf{D}''''_4 sind linear abhängig, also lässt sich \mathbf{C} nicht invertieren.

Definition Kern einer Abbildung L , Nullraum einer Matrix \mathbf{A}

Wir betrachten alle \vec{x} , die über $L(\vec{x})$ auf $\vec{0}$ abgebildet werden:

$$L(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Diese Vektoren heissen **Kern** von L .

Die Matrix \mathbf{A} hat einen **Nullraum**. Es sind die Vektoren \vec{x} für die gilt

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}.$$

Wir werden nicht unterscheiden zwischen einer linearen Abbildung L und der entsprechenden Abbildungsmatrix \mathbf{A} . Deshalb werden wir auch vom *Kern einer Matrix* sprechen.

Matrizen mit $\text{Kern}(\mathbf{A}) \neq \vec{0}$ lassen sich nicht invertieren. Um dies zu verstehen, halten Sie sich vor Augen, dass eine Abbildung einem Element der Bildmenge nur *ein* Element der Definitionsmenge zuordnen darf, damit sie invertierbar bleibt.

Betrachten wir kurz den Fall, wo eine Abbildung zwei Elementen g_1 und g_2 das selbe Element h in der Bildmenge zuordnet. Bei der Umkehrabbildung ist nicht klar, ob h auf g_1 oder g_2 abgebildet werden soll. Deshalb existiert keine Umkehrabbildung. Siehe auch Beispiel 13.14.

Gibt es ausser $\vec{0}$ noch andere Vektoren, die auf $\vec{0}$ abgebildet werden, ist die Abbildung \mathbf{A} nicht umkehrbar.

Um den Nullraum zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$. In der erweiterten Matrix-Form, braucht man die Nullen in der letzten Spalten nicht zu schreiben, da die Äquivalenttransformationen dort stets wieder Nullen ergeben.

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Bestimmen Sie dazu den Kern der Abbildungen mit Zeilenoperationen, d.h. löse $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung

Wir notieren die i -te Spalte der Matrix \mathbf{A} mit \mathbf{A}_i .

a) Mit den Umformungen

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)$$

ergibt sich die Matrix

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie bildet keinen anderen Vektor ausser $\vec{0}$ auf $\vec{0}$ ab. Der Kern ist also $\vec{0}$. Deshalb lässt sich \mathbf{A} invertieren.

b) Die erste Spalte ist gleich 0, also ist der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Kern und \mathbf{B} lässt sich nicht invertieren.

c) Mit den Umformungen

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_2 + 4\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_1 - 7\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4 - 2\mathbf{C}_3); \mathbf{C}'' = (\mathbf{C}'_1, \mathbf{C}'_2, \mathbf{C}'_3, \mathbf{C}'_4 + 3\mathbf{C}'_2)$$

ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Zeile in \mathbf{C}'' folgt, dass x_4 und damit auch x_1, x_2, x_3 gleich 0 sind. Deshalb ist nur $\vec{0}$ im Kern von \mathbf{C} und die Matrix lässt sich invertieren.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k-3 & -3 & k \\ 3 & k+2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme k , so dass \mathbf{A} singulär^a ist.

b) Bestimme die Werte von k , so dass \mathbf{B} die Inverse von \mathbf{A} ist.

c) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & i \end{pmatrix}$$

überführt werden. Benutze die Resultate von oben.

Lösung:

a) \mathbf{A} ist singulär, falls $\det(\mathbf{A}) = 0$. Wir berechnen

$$\det(\mathbf{A}) = -4 + k + 2k^2 = 0$$

mit den Lösungen $k = \frac{1}{2} \cdot (-1 \pm \sqrt{41})$.

b) Falls die eine Matrix die Inverse der anderen ist, sollte $\mathbf{C} = \mathbb{1}$. Wir multiplizieren die Matrizen und erhalten

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k - 2(k-1) & -4(k-1) + k - 1 & 2k - 2 \\ (k-3)k + 2 & 4 - 3k & k^2 - 1 \\ 6(k-3) + 12 & 2(k+2) - 6 & 6k - 5 \end{pmatrix}.$$

Das Element $c_{1,1}$ sollte 1 sein, daraus folgt $k - 2(k-1) = 1$ und $k = 1$.

c) Die Angaben bedeuten, dass die Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

die Inverse von \mathbf{A} ist.

^asingulär=hat keine Inverse

13.6 Weitere Sätze über die Inverse

Beispiel 13.23 Linksinverse, Rechtsinverse

285208

Da die Matrizen nicht kommutativ sind, ergibt sich die Frage ob aus

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

auch folgt

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1} ?$$

Multiplizieren Sie dafür den ersten Ausdruck mit A^{-1} und benutzen Sie die Gesetze für die Matrixmultiplikation (Satz 9.2)

Lösung:

Wir multiplizieren den ersten Ausdruck von links mit A^{-1} . Es ergibt sich

$$A^{-1} \odot (A \odot A^{-1}) = \underbrace{A^{-1} \odot \mathbb{1}}_{=A^{-1}}$$

Wir wissen, die Matrixmultiplikation ist assoziativ. Deshalb können wir die Matrizen mit einer Klammer umgruppieren.

$$(A^{-1} \odot A) \odot A^{-1} = A^{-1}$$

Wir sehen jetzt: Unabhängig davon, wie die Matrix A^{-1} lautet, der Ausdruck in Klammer (...), verändert diese Matrix nicht. Dies kann nur wahr sein, wenn in der Klammer die Einheitsmatrix steht, also

$$\underbrace{(A^{-1} \odot A)}_{=\mathbb{1}}$$

Schliesslich schreiben wir also:

$$A \odot A^{-1} = A^{-1} \odot A = \mathbb{1}.$$

Aus diesen Überlegungen (Beispiel) folgt, dass die Matrix mit ihrer Matrix-Inversen immer kommutiert.

Infobox Inverse für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dies gilt, falls A regulär ist, d.h. $\det(A) \neq 0$.

Beispiel 13.24 Inverse für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

86AFC1

Invertieren Sie folgende Matrizen

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$d) \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1. & -1. \\ -2. & 3. \end{pmatrix}$$

$$b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2. & 1. \end{pmatrix}$$

c) existiert nicht

$$d) \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1. & 5. \\ 2. & -9. \end{pmatrix}$$

Infobox Weitere Gesetze für die Inverse

Seien \mathbf{A} und \mathbf{B} regulär, dann gilt

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

Die Beweise für die Sätze finden sich in Beispiel 13.25.

Beispiel 13.25 Beweise für die Gesetze der Inversen

TPXL3B

Wir betrachten reguläre die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} .

a) Finden Sie Argumente, weshalb $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{B}^{-1}$

c) Zeigen Sie, dass gilt

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$$

Vorgehen:

i) Wir starten mit dem Ausdruck $\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbf{1}$

ii) Transponieren auf beiden Seiten

iii) Benutze

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \odot \mathbf{A}^T$$

und vereinfache auf beiden Seiten

d) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck soweit wie möglich

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \odot (\mathbf{B}^T \odot \mathbf{A})^{-1} \odot [(\mathbf{B}^{-1})^T]^{-1}$$

Lösung:

- a) Gauss-Jordan-Verfahren kann rückwärts gelesen werden als Inversion der Inversen. \mathbf{A} entsteht dann als Inverse von \mathbf{A}^{-1}
- b) Wir argumentieren in Worten: Gesucht ist das Inverse des Ausdrucks

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})$$

oder in Symbolen: Wir suchen eine Matrix \mathbf{C} , die folgendes bewerkstelligen kann für alle Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} :

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} = \mathbf{1}$$

Wir wissen, dass die Matrixmultiplikation Assoziativ ist. Deshalb schreiben wir ohne Klammern:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \odot \mathbf{C} = \mathbf{1}$$

Wir versuchen nun \mathbf{C} so aufzubauen, dass \mathbf{C} nacheinander “die Wirkung der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} rückgängig macht”. Wir finden

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}$$

Zusammengefasst also

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}$$

- c) Wie oben beschrieben, führen wir die Schritte durch. Start

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

Transponieren auf beiden Seiten

$$(\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A})^{\top} = \mathbf{1}^{\top}$$

Gesetz für Transponierte benutzen

$$\mathbf{A}^{\top} \odot (\mathbf{A}^{-1})^{\top} = \mathbf{1} \tag{13.1}$$

Achtung, dies ist nicht

$$\mathbf{A}^{\top} \odot (\mathbf{A}^{\top})^{-1} = \mathbf{1} \tag{13.2}$$

Die Gleichung 13.2 ist selbstverständlich, denn es ist eine Abwandlung von $\mathbf{B} \odot (\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{1}$, nur dass statt \mathbf{B} jetzt \mathbf{A}^{\top} geschrieben wurde.

Der Ausdruck hingegen überrascht. Er besagt, dass $(\mathbf{A}^{-1})^{\top}$, den gleichen Effekt hat auf \mathbf{A}^{\top} , wie die Inverse $(\mathbf{A}^{\top})^{-1}$ von \mathbf{A}^{\top} . Daraus folgern wir, dass wir auf zwei verschiedene Arten, die selbe Matrix gefunden haben, d.h.

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\top} = (\mathbf{A}^{\top})^{-1}$$

- d) Nach den Vereinfachungen bleibt

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{\top})^{-1}$$

Beispiel 13.26 Formal auflösen

CTX1KQ

Wir betrachten die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Löse Sie die Gleichungen formal nach X auf und geben Sie an, unter welcher Bedingung dies möglich ist.

a) $A \odot X = B$

b) $3A \odot X = B \odot X$

c) $(A \odot X)^T = 4X^T \odot B - 5C$

d) $A \odot X = X \odot B$

Lösung:

Wir benutzen $\mathbb{0}$ für die Matrix mit lauter Nullen.

a) $A \odot X = B$. Wir multiplizieren auf beiden Seiten A^{-1} und erhalten

$$X = A^{-1} \odot B$$

b) Wir subtrahieren auf beiden Seiten $B \odot X$ und klammern X aus:

$$(3A - B) \odot X = \mathbb{0}$$

Wir multiplizieren auf beiden Seiten das Inverse der Klammer und erhalten

$$X = (3A - B)^{-1} \odot \mathbb{0} = \mathbb{0}$$

c) Wir wenden das Gesetz für die Transponierte an

$$X^T \odot A^T = 4X^T \odot B - 5C$$

Nun bringen wir alle Unbekannten X^T auf die linke Seite und klammern aus

$$X^T \odot (A^T - 4 \odot B) = -5C$$

Wir multiplizieren mit dem Inverse der Klammer:

$$X^T = -5C \odot (A^T - 4 \odot B)^{-1}$$

Schliesslich transponieren wir

$$X = -5 [(A^T - 4 \odot B)^{-1}]^T \odot C^T$$

d) $A \odot X = X \odot B$ hat keine allgemeine Lösung ausser $X = \mathbb{0}$

14.1 Komplexe Zahlen, \mathbb{C} , Zahlenebene von Gauss	329
14.2 Addieren und Multiplizieren	332
14.3 Polarform	339
14.4 Potenzen und Wurzeln	345
14.5 Gleichung n -ten Grades, Fundamentalsatz der Algebra	348
14.6 Zerlegen in Real- und Imaginärteil	351
14.7 Harmonischen Schwingungen	352

Beispiel 14.1 Gleichungen lösen

Lösen sie die Gleichungen. Diskutieren Sie: Wieviele Lösungen hat eine quadratische Gleichung hat?

a) $x^2 = 9$

d) $x^2 + 25 = 0$

b) $x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

e) $x^2 - 10x + 34 = 0$

Lösung:

a) $x = 3, -3$

b) $x = 5, -5$

c) $(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ (zweifach)

d) $x = 5i, -5i$

e) $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 34}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = 5 + 3i, 5 - 3i$

14.1 Komplexe Zahlen, \mathbb{C} , Zahlenebene von Gauss

Keine reelle Zahl erfüllt die Gleichung $x^2 = -1$, denn Quadrate von reellen Zahlen sind immer positiv.

Definition Imaginäre Einheit

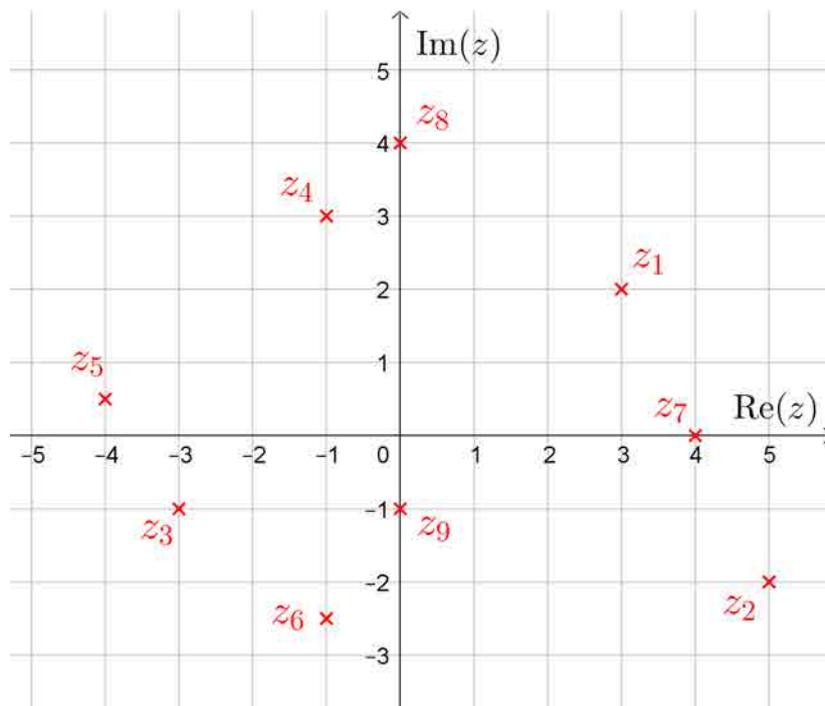
Für i gilt

$$i^2 = -1$$

Beispiel 14.2 Komplexe Zahlenebene

KICGBV

- Lesen Sie z_1, \dots, z_9 aus und geben Sie die Zahlen in der kartesischen Darstellung an.
- Wie gross ist der Abstand von z_1, z_7 und z_9 vom Ursprung?
- Geben Sie eine allgemeine Formel an um für $z = x + iy$ den Abstand vom Ursprung $|z|$ zu berechnen.
- Wir nennen $|z|$ den Betrag. Was ist der Betrag von z_2, z_3 und z_4 ?



Lösung:

- a) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 5 - 2i$, $z_3 = -3 - i$, $z_4 = -1 + 3i$, $z_5 = -4 + i/2$, $z_6 = -1 - 2.5i$,
 $z_7 = 4$, $z_8 = 4i$, $z_9 = -i$
- b) $|z_1| = \sqrt{13}$, $|z_7| = 4$ und $|z_9| = 1$
- c) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ zu berechnen.
- d) $|z_2| = \sqrt{29} \approx 5.385165$, $|z_3| = \sqrt{10} \approx 3.16228$ und $|z_4| = \sqrt{10} \approx 3.16228$

Beispiel 14.3 Gausschen Zahlenebene

KGX8MQ

Wo liegen in der Gausschen Zahlenebene jeweils alle komplexen Zahlen z mit folgender Eigenschaft?

- a) Der Realteil ist 2.
- b) Der Imaginarteil ist 2.
- c) Der Realteil und der Imaginarteil sind gleich.
- d) Der Realteil ist das Doppelte des Imaginarteils.
- e) $\text{Im}(z) > 0$

- f) $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) < 0$
- g) $3 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 4$
- h) $\operatorname{Im}(z)^2 < 0$
- i) $\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = 1$
- j) $(\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z))^2 = 1$

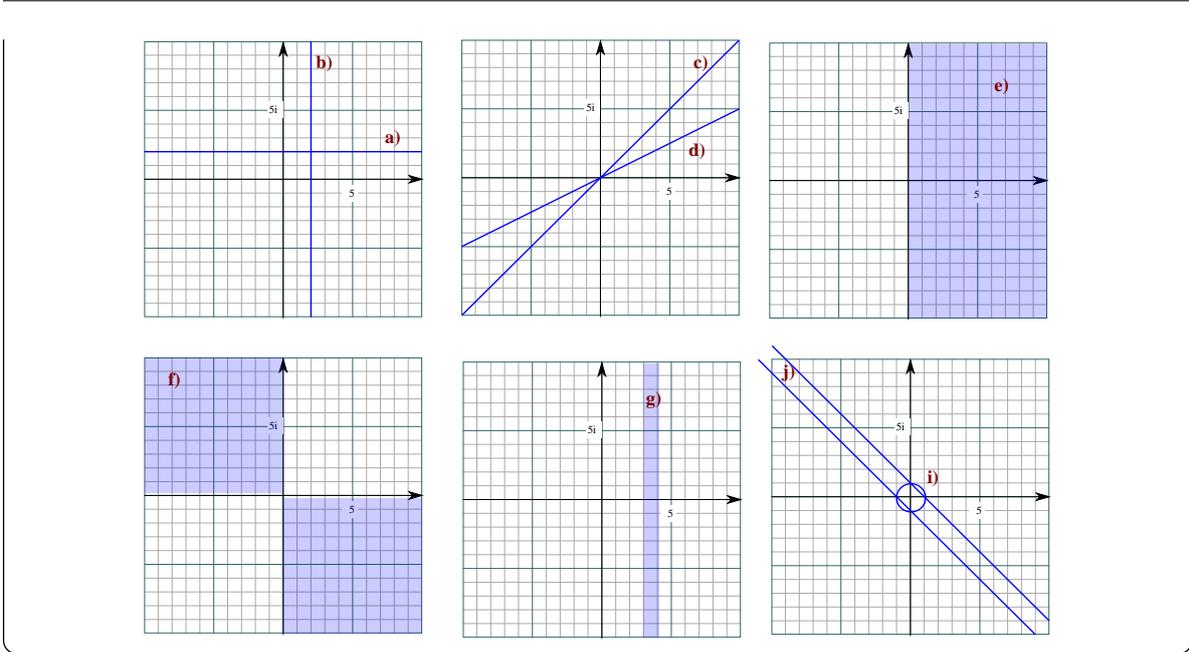
Lösung:

- a) Gerade parallel zu imaginären Achse.
- b) Gerade parallel zu reellen Achse.
- c) Winkelhalbierende mit $z = t + i \cdot t, t \in \mathbb{R}$
- d) gerade mit $z = 2t + i \cdot t, t \in \mathbb{R}$
- e) Obere Halbebene $\operatorname{Im}(z) > 0$
- f) 2 Quadranten
- g) Streifen
- h) $\{\}$
- i) Einheitskreis
- j) Entweder gilt $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1$, d.h. $x + y = 1$. Wir wählen Realteil mit $t \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 1 - t$. So erhalten wir die Lösungsmenge

$$z = t + i(1 - t).$$

Oder es gilt $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = -1$. Mit der Notation von oben erhalten wir die Gerade

$$z = t + i(-1 - t)$$



14.2 Addieren und Multiplizieren

Beispiel 14.4 Addition, Multiplikation

1EUM2V

- Wie können Sie folgende Ausdrücke vereinfachen?
- Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil.
- Welche Gesetze benutzen Sie dafür?
 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) i^2

b) $-i^3$

c) $-i^4$

d) i^5

e) $i^{100} - i^{98}$

f) $i + i + i$

g) $(2 + i) + (4 + 2i)$

h) $2 \cdot (1 + 3i)$

i) $a \cdot (c + id)$

j) $(2 + i) \cdot (4 + 2i)$

k) $(2 + i) \cdot (2 - i)$

l) $(a + ib) \cdot (c + id)$

Lösung:

a) $i^2 = -1$

b) $-i^3 = i$

c) $-i^4 = -1$

d) $i^5 = i$

e) $i^{100} - i^{98} = 2$

f) $i + i + i = 3i$

g) $(2 + i) + (4 + 2i) = 6 + 3i$

h) $2 \cdot (1 + 3i) = 2 + 6i$

i) $a \cdot (c + id) = ac + iad$

j) $(2 + i) \cdot (4 + 2i) = 6 + 8i$

k) $(2 + i) \cdot (2 - i) = 5$

l) $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) - i(ad + bc)$

Infobox Reelle Zahlen Addition, MultiplikationFür $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt u.a.

i) $a + (b + c) = (a + b) + c$, Assoziativgesetz der Addition

ii) $a + b = b + a$, Kommutativgesetz der Addition

iii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, Assoziativgesetz der Multiplikation

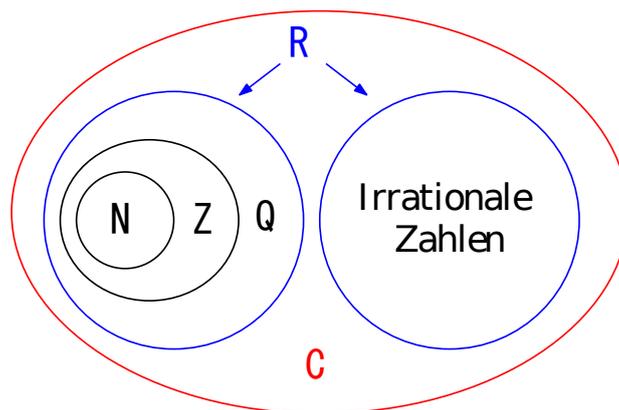
iv) $a \cdot b = b \cdot a$, Kommutativgesetz der Multiplikation

v) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, Distributivgesetz

vi) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

Wir wollen die bisher bekannten Zahlenmenge in \mathbb{C} einbetten.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Dann sollten alle Rechengesetze, die in \mathbb{R} gelten, auch in \mathbb{C} gelten.

Infobox Multiplikation, Addition

Multiplikation und Addition in \mathbb{C} erfolgen durch

- i) Zusammenfassen von Realteil und Imaginärteil (Addition)
- ii) Ausmultiplizieren (Multiplikation)

Beispiel 14.5 Addition, Multiplikation

2FXNNA

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

- a) $i + 2i + 3i + 4i$
- b) $i \cdot 2i$
- c) $i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i$
- d) $(3i)^2$
- e) $(\sqrt{3}i)^2$
- f) $(1 + i)^2$
- g) $(1 + 2i) \cdot (3 + 4i)$
- h) $(2 - 5i) + (5 + 2i)$
- i) $(1 + i)^4$

Lösung:

- | | |
|--|--|
| a) $i + 2i + 3i + 4i = 10i$ | f) $(1 + i)^2 = 2i$ |
| b) $i \cdot 2i = -2$ | g) $(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = -5 + i 10$ |
| c) $i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i = 24$ | h) $(2 - 5i) + (5 + 2i) = 7 - 3i$ |
| d) $(3i)^2 = -9$ | i) $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$ |
| e) $(\sqrt{3}i)^2 = -3$ | |

14.2.1 Subtraktion und Division

Beispiel 14.6 Komplexe Zahlen Dividieren

R3LX15

Stimmt die Gleichung $\frac{3+4i}{1-2i} = -1 + 2i$? Wie könnte man dies überprüfen?

Lösung:

Erweitern mit $1 + 2i$, d.h.

$$\frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{3 + 4i + 6i - 8}{1^2 + 2^2} = -1 + 2i$$

Wir haben dabei den Bruch in einen Real- und einen Imaginärteil zerlegt.

Beispiel 14.7 Addition, Multiplikation

1IDMNV

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

a) $i - 2i$

d) $\frac{1}{2i}$

b) $(2 - 5i) - (5 + 2i)$

e) $\frac{1+2i}{3+4i}$

c) $\frac{i}{2i}$

f) $\frac{2-5i}{5+2i}$

Lösung:

a) $i - 2i = -i$

d) $\frac{1}{2i} = -1/2i$

b) $(2 - 5i) - (5 + 2i) = 3 - 7i$

e) $\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$

c) $\frac{i}{2i} = 1/2$

f) $\frac{2-5i}{5+2i} = -i$

Beispiel 14.8 Subtraktion, Division

9KJS56

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

a) $5i - 6i$

i) $\frac{1+i}{1-i}$

b) $(8 - 15i) - (15 + 12i)$

j) $1 + \frac{1}{i}$

c) $(1 + i) + (1 - i) + (-1 + i) + (-1 - i)$

k) $\frac{2/3 - i5/6}{1/2 - i7/3}$

d) $(1 + i) - (1 - i) - (-1 + i) - (-1 - i)$

l) $\frac{7/6 + 5/2i}{1/3 - 2/3i}$

e) $\frac{2i}{i}$

f) $\frac{2}{2+2i}$

m) $\frac{7i}{\sqrt{2}} + i\sqrt{5}$

g) $\frac{1}{i}$

h) $\frac{4+5i}{3-4i}$

n) $\frac{9+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i9}$

Lösung:

a) $\bar{z}_1 = -7 + 8i$

c) $\bar{z}_3 = -17$

b) $\bar{z}_2 = -4i$

d) $\bar{z}_4 = -2 - 3i$

Beispiel 14.10 Real- und Imaginärteil**5UF7TR**

$$z_0 = 1 - 2i$$

a) Berechnen Sie: $\operatorname{Re}(z_0)$, $\operatorname{Im}(z_0)$, \bar{z}_0 , $\operatorname{Im}(i \cdot z_0)$, $\overline{\operatorname{Im}(z_0)}$, $\overline{i \cdot \operatorname{Re}(z_0)}$, $\operatorname{Re}(1/z_0)$.b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z = x + iy$ mit $\operatorname{Im}(2z + 7 - 5i) = 1$.c) Für $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = -5 + 2i$ berechnen Sie

$$\operatorname{Re}(z_1 + 4z_2), \operatorname{Im}((z_1)^2 \cdot z_2), \operatorname{Re}(z_1 \cdot (z_2)^2), \operatorname{Im}(2z_1 - 3z_2)$$

d) Für $z = x + iy$ schreiben Sie $\operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z)$ nur mit Hilfe von z und \bar{z} .**Lösung:**

- | | | |
|----|---------------------------------|--|
| a) | • $\operatorname{Re}(z_0) = 1$ | • $\operatorname{Im}(i \cdot z_0) = i$ |
| | • $\operatorname{Im}(z_0) = -2$ | • $\overline{\operatorname{Im}(z_0)} = -2$ |
| | • $\bar{z}_0 = 1 + 2i$ | • $\overline{i \cdot \operatorname{Re}(z_0)} = -i$ |

$$\operatorname{Re}(1/z_0) = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5} = 1/5 + 2/5i$$

b) Für $z = x + iy$ erhalten wir

$$2z + 7 - 5i = 2x + i2y + 7 - 5i = (2x + 7) + i(2y - 5)$$

Der Imaginärteil ist $2y - 5$. Für diesen soll gelten $2y - 5 = 1$, also $y = 6/2 = 3$.
Die gesuchte Menge ist also $z = x + i3$, mit $x \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|----|--|---|
| c) | • $\operatorname{Re}(z_1 + 4z_2) = -18$ | • $\operatorname{Re}(z_1 \cdot (z_2)^2) = 62$ |
| | • $\operatorname{Im}((z_1)^2 \cdot z_2) = -14$ | • $\operatorname{Im}(2z_1 - 3z_2) = -4$ |

d) Wir schreiben $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ nebeneinander. Andererseits wissen wir, dass $\operatorname{Re}(z) = x$ und $\operatorname{Im}(z) = y$. Durch Addition lässt sich der Imaginärteil entfernen:

$$z + \bar{z} = 2x \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

In der Differenz entfällt der Realteil:

$$z - \bar{z} = 2iy \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Beispiel 14.11 Betrag bei der Multiplikation

FDE1CP

Überprüfen Sie, ob bei der oben gefundenen Multiplikation von komplexen Zahlen, das Gesetz für den Betrag

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

erhalten ist. Benutzen Sie, dass auch gilt

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2$$

a) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 6 + 8i$

c) $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$

b) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 5 + 12i$

Lösung:

a) $|z_1| = 5$, $|z_2| = 10$, $z_1 \cdot z_2 = 50$, $|z_1| \cdot |z_2| = 50$

b) $|z_1| = 5$, $|z_2| = 13$, $z_1 \cdot z_2 = 63 + 16i$, $|z_1 \cdot z_2| = 65$, $|z_1| \cdot |z_2| = 65$

c) • $|z_1|^2 = a^2 + b^2$, $|z_2|^2 = c^2 + d^2$

• $|z_1 \cdot z_2|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

• $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

• $|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$

Infobox Rechenregeln für konjugiert-komplexe Zahlen

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iv) $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$

Beispiel 14.12 Betrag bei der Multiplikation (Beweis 2)

GEH2DQ

Überprüfen Sie allgemein, ob bei der oben gefundenen Multiplikation von komplexen Zahlen, das Gesetz für den Betrag

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

erhalten ist. Benutzen Sie, dass dann auch gilt

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2 \text{ und } |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Lösung:

Wir schreiben $|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2$ mit Hilfe der Konjugierten

$$(z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) = (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)}$$

Mit den Gesetzen oben für die komplex Konjugiert können wir umstellen

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

Nun sehen wir, dass auf beiden Seiten der selbe Ausdruck steht.

Infobox Betrag bei der Multiplikation

i) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ii) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

14.3 Polarform

Satz Satz von Euler

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Der Satz kann z.B. mit der Reihenentwicklungen der drei Funktionen gezeigt werden.

Beispiel 14.13 Sinus und Cosinus

F663GL

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \text{ und } e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$$

b) Stellen Sie $\cos(\varphi)$ mit Hilfe von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ dar.

c) Stellen Sie $\sin(\varphi)$ mit Hilfe von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ dar.

Lösung:

a) Wir erhalten

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos(\varphi)$$

und

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin(\varphi)$$

b) Wir lösen a) auf nach $\cos(\varphi)$ und erhalten

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

c) Wir lösen b) auf nach $\sin(\varphi)$ und erhalten

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

14.3.1 Von der Polardarstellung zur kartesischen Darstellung

Beispiel 14.14 Polardarstellung

246ZKY

Stellen Sie folgende Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und markieren Sie sie in der Zahlenebene (φ ist das Argument von z).

Zeichnen Sie auch \bar{z} ein.

a) $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{7\pi}{36}$

c) $|z| = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{9}$

b) $|z| = 4$, $\varphi = \frac{25\pi}{36}$

d) $|z| = a$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

Lösung:

a) $z_1 = 1.15846 + 0.81116i$

b) $z_2 = -2.29431 + 3.27661i$

c) $z_3 = -0.347296 + 1.96962i$

d) $z_4 = -ia$

14.3.2 Von der kartesischen Darstellung zur Polardarstellung

Beispiel 14.15 Polardarstellung aus der kartesischen Darstellung Y4PQ8E

a) Wir betrachten $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ mit $\varphi, r \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$$

und lösen Sie den Ausdruck formal nach φ auf.

b) Berechnen Sie $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ für $z_1 = 3 + 4i$ und für $z_2 = -3 - 4i$. Welche Schwierigkeiten erwarten Sie bei der Berechnung von φ ?

c) Berechnen Sie nun das Argument für die Paare

$$\begin{aligned}z_3 &= 5 + 12i, & z_4 &= -5 - 12i \\z_5 &= 5 - 12i, & z_6 &= -5 + 12i \\z_7 &= -4 - 13i, & z_8 &= 4 + 13i\end{aligned}$$

d) Wie kann man allgemein das Argument berechnen für $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$?

Lösung:

a) Wir betrachten $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ mit $\varphi, r \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{r \cdot \sin(\varphi)}{r \cdot \cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$$

also $\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$.

b) Für $z_1 = 3 + 4i$: $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{4}{3}$ und für $z_2 = -3 - 4i$: $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{4}{3}$. Ziehen wir den $\arctan()$ aus den beiden Werten erhalten wir das selbe Resultat, obwohl φ bei den Zahlen verschieden ist.

c)

$$\begin{aligned}z_3 &= 13 \cdot e^{1.17601i}, & z_4 &= 13 \cdot e^{-1.96559i} \\z_5 &= 13 \cdot e^{-1.17601i}, & z_6 &= 13 \cdot e^{1.96559i} \\z_7 &= 13.6015e^{-1.8693i}, & z_8 &= 13.6015e^{1.2723i}\end{aligned}$$

d) Für $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Argument

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \begin{cases} \pi & (a < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 14.16 Polarform

A2ELY3

Geben Sie in Polarform an (ohne Taschenrechner).

a) $2 + 2i$

e) $1 + \sqrt{3}i$

b) $-2 + 2i$

f) $-1 + \sqrt{3}i$

c) $-2 - 2i$

g) $1 - \sqrt{3}i$

d) $2 - 2i$

h) $-1 - \sqrt{3}i$

Lösung:

a) $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$

b) $-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

c) $-2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

d) $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

e) $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

f) $-1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

g) $1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

h) $-1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Beispiel 14.17 Polarform 2

DWGXLH

Stellen Sie folgende Zahlen in Polarform dar und markieren Sie sie in der Zahlenebene:

a) i

h) $2e^{i7\pi/6}$

b) -1

i) $2e^{i\cdot 0}$

c) $1 + i$

j) $6e^{-i\frac{\pi}{3}}$

d) $3 + \sqrt{3}i$

k) $3e^{i\pi}$

e) $-1 - \sqrt{3}i$

l) $6e^{i3\pi/4}$

f) $0.6 - 0.8i$

m) $\frac{2}{3} \cdot e^{i3\pi/2}$

g) $4e^{i\pi/2}$

n) $8e^{-\pi i}$

Lösung:

a) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $-1 = e^{\pi i}$

c) $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

d) $3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

e) $-1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

f) $0.6 - 0.8i = 0.8e^{-0.9273i}$

g) $4e^{i\pi/2} = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

h) $2e^{i7\pi/6} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

i) $2e^{i0} = 2$

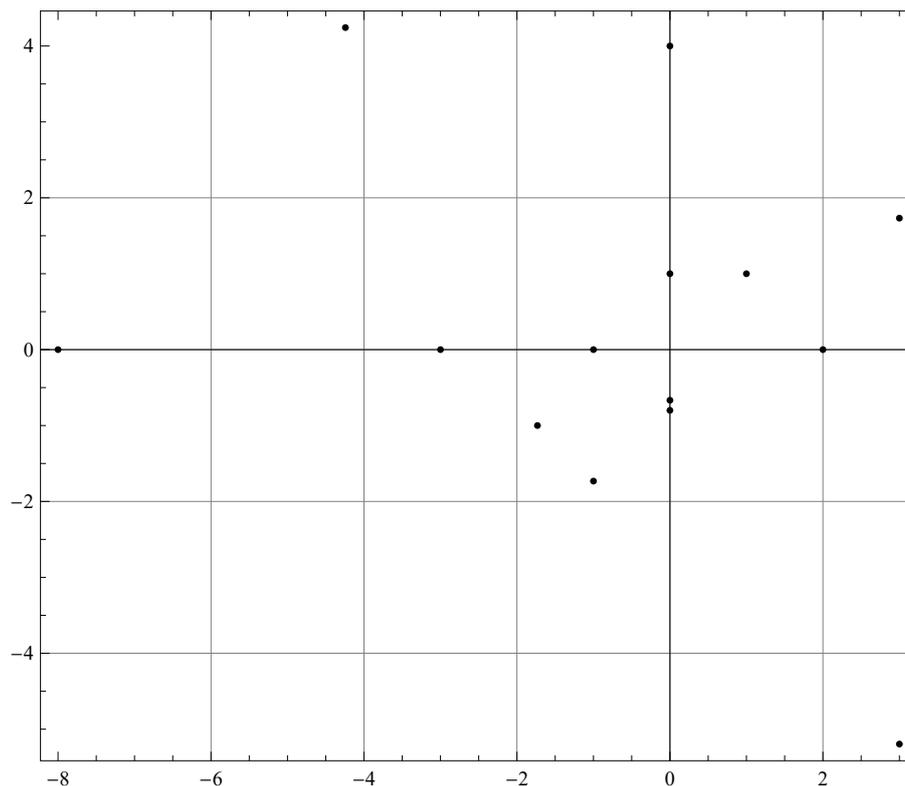
j) $6e^{-i\frac{\pi}{3}} = 6e^{-i\frac{\pi}{3}}$

k) $3e^{i\pi} = 3e^{\pi i}$

l) $6e^{i3\pi/4} = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$

m) $\frac{2}{3} \cdot e^{i3\pi/2} = \frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

n) $8e^{-\pi i} = 8e^{\pi i}$



14.3.3 Die Grundrechenarten in der Polardarstellung

Beispiel 14.18 Polardarstellung

2FG7T1

Führen Sie die Multiplikation aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{7\pi}{5}} \cdot 7 \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$

e) $z_1 \cdot z_2 = e^i \cdot e^{i3}$

b) $z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{3\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{9\pi}{10}}$

f) $z_1 \cdot z_2 = e^{-i\frac{21\pi}{40}} \cdot e^{-i\frac{9\pi}{40}}$

c) $z_1 \cdot z_2 = 10 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 5 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

g) $(z)^3 = \left(2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3$

d) $z_1 \cdot z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

h) $(z)^5 = \left(3 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5$

Führen Sie die Divisionen aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$\text{i) } z_1/z_2 = \frac{36 \cdot e^{i5\pi}}{6 \cdot e^{i3\pi}}$$

$$\text{m) } z_1/z_2 = \frac{-42 \cdot e^{i4}}{6 \cdot e^i}$$

$$\text{j) } z_1/z_2 = \frac{56 \cdot e^{i\frac{15\pi}{4}}}{8 \cdot e^{i\frac{9\pi}{4}}}$$

$$\text{n) } z_1/z_2 = \frac{-21 \cdot e^{i\frac{5\pi}{8}}}{-3 \cdot e^{i\frac{11\pi}{8}}}$$

$$\text{k) } z_1/z_2 = \frac{24 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{48 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$\text{o) } z_1 \cdot (z_2)^{-1} = 24 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \left(16 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^{-1}$$

$$\text{l) } z_1/z_2 = \frac{63 \cdot e^{i\frac{5\pi}{2}}}{-7 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}}$$

$$\text{p) } (z_1)^{-1} = \left(30 \cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}\right)^{-1}$$

Lösung:

$$\text{a) } z_1 \cdot z_2 = 21 \cdot e^{i\frac{10\pi}{5}} = 14$$

$$\text{i) } z_1/z_2 = 6 \cdot e^{i2\pi} = 6$$

$$\text{b) } z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$\text{j) } z_1/z_2 = 7 \cdot e^{i\frac{6\pi}{4}} = -7i$$

$$\text{c) } z_1 \cdot z_2 = 50 \cdot e^{i\pi} = -50$$

$$\text{k) } z_1/z_2 = \frac{1}{2} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{4}} = -i/2$$

$$\text{d) } z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\text{l) } z_1/z_2 = -i \cdot e^{i\frac{2\pi}{2}} = 9$$

$$\text{e) } z_1 \cdot z_2 = e^{4i}$$

$$\text{m) } z_1/z_2 = -7 \cdot e^{i3}$$

$$\text{f) } z_1 \cdot z_2 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{n) } z_1/z_2 = 7e^{-i\frac{6\pi}{8}} = 7e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{g) } (z)^3 = 8 \cdot e^{i2\pi} = 8$$

$$\text{o) } z_1 \cdot (z_2)^{-1} = \frac{3}{2} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{4}} = -\frac{3i}{2}$$

$$\text{h) } (z)^5 = 243 \cdot e^{i\pi} = -243$$

$$\text{p) } (z_1)^{-1} = \frac{1}{30} \cdot e^{-i\frac{9\pi}{8}}$$

Beispiel 14.19 Grundrechenoperationen, Verallgemeinerung

5WJR7Y

Betrachten Sie die Beispiele oben. Versuchen Sie jetzt zu verallgemeinern

- Wie werden komplexe Zahlen in der Polardarstellung multipliziert?
- Wie werden komplexe Zahlen in der Polardarstellung dividiert?
- Wie berechnet man die n -te Potenz einer komplexe Zahl in der Polardarstellung?
- Wie berechnet man die n -te Wurzel einer komplexe Zahl in der Polardarstellung?
- Wir haben am Anfang des Kapitels besprochen, dass \mathbb{R} in \mathbb{C} eingebettet werden soll. Welche Gesetze aus \mathbb{R} haben wir auf \mathbb{C} übertragen?

Lösung:

a-d siehe Infobox 14.7

a) Für $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(a^b)^c &= a^{b \cdot c} \\ \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}} \\ a^{-b} &= \frac{1}{a^b}\end{aligned}$$

Infobox Rechenoperationen Polardarstellung

- i) Multiplikation: Beträge multiplizieren, Argumente addieren.
- ii) Division: Beträge dividieren, Argumente subtrahieren.
- iii) n -te Potenz von z : $(r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i\varphi \cdot n}$
- iv) n -te Wurzel von z : $\sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = (r \cdot e^{i\varphi})^{1/n} = r^{1/n} \cdot e^{i\varphi/n}$ (1. Lösung von n Lösungen)

Beispiel 14.20 Polarform

9G8NBZ

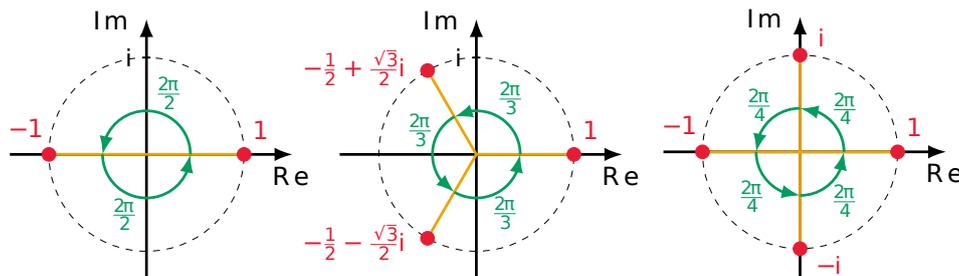
Geben Sie für $-z$, \bar{z} und z^{-1} in der Polarform an (ohne Taschenrechner). Wie können Sie ihr Resultat überprüfen?

- a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$
- b) $z_2 = \frac{1}{3} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
- c) $z_3 = 8 \cdot e^{-i\frac{5\pi}{9}}$

Lösung:

- a) $-z = -e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\bar{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = z^{-1}$
- b) $-z = -\frac{1}{3} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $\bar{z} = \frac{1}{3} \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z^{-1} = 3 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- c) $-z = -8 \cdot e^{-i\frac{5\pi}{9}}$, $\bar{z} = 8 \cdot e^{i\frac{5\pi}{9}}$, $z^{-1} = \frac{1}{8} \cdot e^{i\frac{5\pi}{9}}$

14.4 Potenzen und Wurzeln



Infobox Lösung (Wurzeln von komplexen Zahlen)

Die Gleichung

$$z^n = r \cdot e^{i\varphi}$$

mit $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ hat die Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Es sind n Lösungen.**Beispiel 14.21 Potenzen und Wurzeln**

JN82T5

- a) Berechnen Sie $u = e^{i(\frac{2\pi}{3}+2\pi)}$ und $v = e^{i(\frac{2\pi}{3}+4\pi)}$
- b) Geben Sie $w^0, w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6$ an für $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Was beobachten Sie?
- c) Können Sie auch w^7, w^8 angeben?
- d) Was folgt daraus für die Lösung von $z^3 = 1$?
- e) Berechnen Sie $(-1)^3$ und $(e^{i\frac{\pi}{3}})^3$
- f) Was folgt daraus für die Lösung von $z^3 = -1$?
- g) Wie berechnen Sie die Lösungen der Gleichungen $z^6 = -1$ und $z^4 = -1$?
- h) Wie können Sie Lösungen der folgenden Gleichungen bestimmen: $z^6 = -125$, $z^6 = -64$ und $z^4 = 81$.

Lösung:

a) Potenzen

$$\begin{array}{cccccccccc} w^0 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 & w^8 \\ \hline 1 & e^{-i\frac{\pi}{3}} & e^{-i\frac{2\pi}{3}} & -1 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & e^{i\frac{\pi}{3}} & 1 & e^{-i\frac{\pi}{3}} & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{array}$$

- b) Da $w^6 = 1$, gilt $w^7 = w^6 \cdot w^1 = w^1$ und $w^8 = w^6 \cdot w^2 = w^2$
- c) $u = v = w = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Eine Drehung um 2π auf dem Einheitskreis verändert den Wert nicht.
- d) Wir erhalten stets -1
- e) $w = e^{i\frac{5\pi}{3}}$, -1 und $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sind Lösungen von $\sqrt[3]{-1}$.
- f) Für $a = \sqrt[6]{-1}$:

$$a = e^{i\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{6}} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}, e^{i\frac{11\pi}{6}} \right\}$$

mit $k = 0, \dots, 5$.

Für $\sqrt[4]{-1}$:

$$b = e^{i\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{4}} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$$

g) Wie berücksichtigen jetzt noch den Betrag der Zahlen unter der Wurzel Für $\sqrt[3]{-125}$:

$$c = 5 \cdot e^{i\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{3}} = \left\{ 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}, 5 \cdot e^{i\pi}, 5 \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}} \right\}$$

mit $k = 0, \dots, 2$.

Für $\sqrt[6]{-64}$:

$$d = 2 \cdot e^{i\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{6}} = \left\{ 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}, 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2 \cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}, 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}, 2 \cdot e^{i\frac{11\pi}{6}} \right\}$$

mit $k = 0, \dots, 5$.

Für $\sqrt[4]{81}$:

$$f = 3 \cdot e^{i\frac{0+k\cdot 2\pi}{6}} = \left\{ 3 \cdot 1, 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, 3 \cdot e^{i\pi}, 3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \{3, 3i, -3, -3i\}$$

mit $k = 0, \dots, 3$.

Beispiel 14.22 Wurzeln

HCH7NG

Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichungen erfüllen

a) $z^5 = -1$

b) $z^8 = 256$

c) $z^3 = 125i$

d) $z^3 = 1000 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

Lösung:

a) $\sqrt[5]{z} = -1$

$$a = 1 \cdot e^{i\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{5}}$$

mit $k = 0, \dots, 4$.

b) $\sqrt[8]{z} = 256$

$$b = 2 \cdot e^{i\frac{0+k\cdot 2\pi}{8}}$$

mit $k = 0, \dots, 7$.

c) $\sqrt[3]{z} = 125i$

$$c = 5 \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi}{3}}$$

mit $k = 0, \dots, 2$.

d) $\sqrt[5]{z} = 1000 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$d = 10 \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi}{3}}$$

mit $k = 0, \dots, 2$.

14.5 Gleichung n -ten Grades, Fundamentalsatz der Algebra

Beispiel 14.23 Gleichung n -ten Grades

8AIP6W

a) Wenden Sie auf die Gleichung $13 - 6x + x^2 = 0$ die Mitternachtsformel an.

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Was beobachten Sie?

b) Berechnen Sie die dritte Potenz von i , $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ und von $e^{i\frac{11\pi}{6}}$

c) Lösen Sie nun die Gleichung $z^3 = -i$.

d) Wie viele Lösungen finden Sie bei der Berechnung der Wurzel? Was vermuten Sie aufgrund dieser Resultate?

Lösung:

a) Mitternachtsformel

$$x_{1;2} = 3 \pm 2i$$

Wir beobachten, dass es zwei Lösungen gibt *obwohl die Diskriminante negativ ist*.

b) Die dritten Potenzen ergeben alle $-i$.

c) Deshalb hat die Gleichung $z^3 = -i$ die Lösungen i , $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ und $e^{i\frac{11\pi}{6}}$

d) Für die Gleichung 2. Grades finden wir 2 Lösungen, für die Gleichung 3. Grades finden wir 3 Lösungen. Wir vermuten:
Für die Gleichung n -ten Grades gibt es n Lösungen.

Beispiel 14.24 Quadratische Gleichungen

1TGWY4

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen in \mathbb{C} .

a) $z^2 + 6z + 9 = 0$

b) $2z^2 + 9z - 5 = 0$

c) $4z^2 + 25 = 0$

d) $4z^2 + 8z + 29 = 0$

e) $z^2 - 2iz - 10 = 0$

f) $iz^2 - (9 + 16i) = -\frac{144}{z^2}$

Lösung:

a) $z_1 = -3, z_2 = -3$

b) $z_1 = 1/2, z_2 = -5$

c) $z_1 = 5/2i, z_2 = -5/2i$

d) $z_1 = -1 + 5/2i, z_2 = -1 - 5/2i$

e) $z_1 = -3 + i, z_2 = 3 + i$

f) Eine Substitution ergibt $z_1 = -4, z_2 = 4, z_3 = 3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_4 = 3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Satz Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom n -ten Grades ($n > 0$)

$$P(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z^1 + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_n \neq 0$ kann zerlegt werden:

$$P(z) = a_n \cdot (z + z_n) \cdot (z + z_{n-1}) \cdot \dots \cdot (z + z_2) \cdot (z + z_1)$$

Die Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n sind die Nullstellen von $P(z)$. Sie sind nicht immer verschieden voneinander, d.h. manchmal tritt eine Nullstelle mehrfach auf.

Beispiel 14.25 Gleichung 6. und 8. Grades

NANZ5I

Lösen Sie mit Hilfe einer Substitution.

a) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

b) $z^8 + 12z^4 - 64 = 0$

Lösung:

a) Wir substituieren $p = z^3$ und erhalten

$$p^2 + 7p - 8 = 0 \Rightarrow p_1 = 2, p_2 = -4$$

Aus $2 = z^3$ ergeben sich die Lösungen

$$z_1 = \sqrt[3]{2}, z_2 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}, z_3 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

und aus $-4 = z^3$

$$z_4 = 2^{2/3}e^{\frac{\pi i}{3}}, z_5 = 2^{2/3}e^{\pi i}, z_6 = 2^{2/3}e^{\frac{5\pi i}{3}}$$

b) $z^8 + 12z^4 - 64 = 0$ Wir substituieren $p = z^4$ und erhalten

$$p^2 + 12p - 64 = 0 \Rightarrow p_1 = 4, p_2 = -16$$

Aus $4 = z^4$ ergeben sich die Lösungen

$$z_1 = \sqrt{2}, z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}, z_3 = \sqrt{2}e^{\pi i}, z_4 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

und aus $-16 = z^4$

$$z_5 = 2e^{\frac{\pi i}{4}}, z_6 = 2e^{\frac{3\pi i}{4}}, z_7 = 2e^{\frac{5\pi i}{4}}, z_8 = 2e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

Infobox Komplex konjugierte Nullstellen

Solange ein Polynom reelle Koeffizienten hat, treten komplexe Nullstellen immer komplex konjugiert auf, d.h. falls z eine Nullstelle ist ist auch \bar{z} eine Nullstelle.

Beispiel 14.26 Nullstellen

DJUTAZ

Berechnen Sie alle Nullstellen.

- a) $P(z) = z^2 - 2z + 5$
b) $P(z) = (z^2 - 2)(z - 3)(3z + 2)$
c) $P(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 1)$
d) $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$, Tipp: $z_1 = 1 - 2i$.

Lösung:

a) $z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm i2$

b) Wir betrachten jeden Faktor separat $(z - 3) = 0 \Rightarrow z_1 = 3$, $(3z + 2) = 0 \Rightarrow z_2 = -\frac{2}{3}$ und

$$(z^2 - 2) = 0 \Rightarrow z_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

c) Wir betrachten jeden Faktor separat $(z^2 - 4) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 2$, $(z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z_{3,4} = \pm i$

- d) Wir verwenden den Tipp und die Infobox 14.9: $z_2 = 1 + 2i$. Wir erhalten damit schon

$$(z - (1 - 2i)) \cdot (z - (1 + 2i)) = z^2 - 2z + 5 =: Q(z)$$

Es fehlt uns ein zweiter Faktor $R(z)$ für den gelten würde $(z^2 - 2z + 5) \cdot R(z) = P(z)$. Da $Q(z)$ von Ordnung 2 ist und $P(z)$ von Ordnung 4, sollte $R(z)$ von Ordnung 2 sein. Ausserdem ist der Koeffizient der höchsten Potenz sowohl in $Q(z)$ wie auch in $P(z)$ 1, deshalb machen wir den Ansatz $R(z) = z^2 + b \cdot z + c$. So erhalten wir

$$(z^2 - 2z + 5) \cdot R(z) = z^4 + z^3 \cdot (b - 2) + z^2 \cdot (c - 2b + 5) + z^1 \cdot (5b - 2c) + (5c)$$

Der Koeffizientenvergleich mit $P(z)$ ergibt $5c = -10 \Rightarrow c = -2$ und $b - 2 = -1 \Rightarrow b = 1$. Also

$$R(z) = z^2 + 1 \cdot z - 2$$

mit den Nullstellen $z_3 = -2$ und $z_4 = 1$.

14.6 Zerlegen in Real- und Imaginärteil

Beispiel 14.27 Real- und Imaginärteil bei Brüchen

QP7Y08

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen (evtl. auch Betrag und Argument).

a) $z = \frac{7+24j}{3+4j}$

e) $z = \frac{e^{-j}}{5-12j}$

b) $z = \frac{33+56j}{5-12j}$

f) $z = \frac{e^{4+2j}}{-3+4j}$

c) $z = \frac{36-77j}{-3+4j}$

g) $z = \frac{e^{-2-j}}{5-12j}$

d) $z = \frac{e^{2i}}{3+4j}$

h) $z = \frac{e^{4+\frac{\pi}{3}j}}{-3+4j}$

Lösung:

a) $\operatorname{Re}(z) = \frac{117}{25}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{44}{25}$
ausserdem $\varphi = 0.359707$, $|z| = 5$

b) $\operatorname{Re}(z) = -3$, $\operatorname{Im}(z) = 4$
ausserdem $\varphi = 2.2143$, $|z| = 5$

c) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{416}{25}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{87}{25}$
ausserdem $\varphi = 2.93543$, $|z| = 17$

d) $\operatorname{Re}(z) = \frac{3 \cos(2)}{25} + \frac{4 \sin(2)}{25}$, $\operatorname{Im}(z) = -\frac{4 \cos(2)}{25} + \frac{3 \sin(2)}{25}$
ausserdem $\varphi = 1.0727$, $|z| = 0.2$

- e) $\operatorname{Re}(z) = \frac{5 \cos(1)}{169} + \frac{12 \sin(1)}{169}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{12 \cos(1)}{169} - \frac{5 \sin(1)}{169}$
 ausserdem $\varphi = 0.176005$, $|z| = 0.0769231$
- f) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{3}{25}e^4 \cos(2) + \frac{4}{25}e^4 \sin(2)$, $\operatorname{Im}(z) = -\frac{4}{25}e^4 \cos(2) - \frac{3}{25}e^4 \sin(2)$
 ausserdem $\varphi = -0.214297$, $|z| = 10.9196$
- g) $\operatorname{Re}(z) = \frac{5 \cos(1)}{169e^2} + \frac{12 \sin(1)}{169e^2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{12 \cos(1)}{169e^2} - \frac{5 \sin(1)}{169e^2}$
 ausserdem $\varphi = 0.176005$, $|z| = 0.0104104$
- h) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{3e^4}{50} + \frac{2\sqrt{3}e^4}{25}$, $\operatorname{Im}(z) = -\frac{2e^4}{25} - \frac{3\sqrt{3}e^4}{50}$
 ausserdem $\varphi = -1.1671$, $|z| = 10.9196$

14.7 Harmonischen Schwingungen

Beispiel 14.28 Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen

a) Gehen Sie die Schritte unten durch. Was wird jeweils gemacht?

b) Versuchen Sie das Vorgehen zu verallgemeinern.

- Überlagerung von $f_1(t) = 3 \sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 5 \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$, d.h.

$$f_1(t) = 3 \cos(\omega t - \pi/2) \text{ und } f_2(t) = 5 \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

- Wir schreiben

$$\underline{f_1(t)} = 3e^{i(\omega t - \pi/2)} \text{ und } \underline{f_2(t)} = 5e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})}$$

- Addition

$$\underline{f_T(t)} = \underline{f_1(t)} + \underline{f_2(t)} = 3e^{i(\omega t - \pi/2)} + 5e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})} = (3e^{-i\pi/2} + 5e^{i\frac{\pi}{6}}) \cdot e^{i\omega t}$$

- Wir berechnen zunächst

$$(3e^{-i\pi/2} + 5e^{i\frac{\pi}{6}}) = -i/2 + (5\sqrt{3})/2$$

und damit

$$f_T(t) = \operatorname{Re}(\underline{f_T(t)}) = \operatorname{Re}\left((-i/2 + (5\sqrt{3})/2) \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))\right)$$

Wir erhalten

$$f_T(t) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(\omega t)$$

Lösung:

Vorgehen und Verallgemeinerung in der Infobox

Infobox Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen

- Darstellung der Schwingungen mit Hilfe der \cos -Funktion. Benutze

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

- Übergang von der reellen Form zur komplexen Form, d.h. die Einzelschwingungen $f_i(t)$ werden in komplexer Form dargestellt, d.h.

$$\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow e^{i(\omega t + \varphi)}$$

- Addition der komplexen Amplituden ($e^{i(\omega t + \varphi)}$ kann ausgeklammert werden)
- Rücktransformation aus der komplexen Form in die reelle Form, d.h. Realteil berechnen.

Beispiel 14.29 Überlagerung harmonischer Wellen

GDIMWT

Schreiben Sie die Superposition in der Form $f_T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

- Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t)$
- Überlagerung von $f_1(t) = 6 \cdot \sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \sin(\omega t)$
- Überlagerung von $f_1(t) = 5 \cdot \sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t)$
- Überlagerung von $f_1(t) = 7 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{10})$ und $f_2(t) = 6 \cdot \cos(\omega t + \frac{4\pi}{5})$
- Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ und $f_2(t) = 7 \cdot \cos(\omega t + \frac{9\pi}{7})$
- Überlagerung von $f_1(t) = 7 \cdot \sin(\omega t - \pi)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t + \frac{5\pi}{8})$
- Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \sin(\omega t - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2})$ und $f_2(t) = 7 \cdot \cos(\omega t + 1)$
- Überlagerung von $f_1(t) = 8 \cdot \cos(\omega t + \frac{3}{8})$ und $f_2(t) = 8 \cdot \cos(\omega t + \frac{3}{7})$

Lösung:

- $f_T(t) = 5 \cdot \cos(\omega t)$
- $f_T(t) = 9 \cdot \sin(\omega t)$
- $f_T(t) = 3 \cdot \cos(\omega t) + 5 \cdot \sin(\omega t)$
- $f_T(t) = 1.80329 \cos(\omega t) - 5.68983 \cdot \sin(\omega t)$
- $f_T(t) = -4.36443 \cdot \cos(\omega t) + 3.47282 \cdot \sin(\omega t)$
- $f_T(t) = -1.14805 \cdot \cos(\omega t) - 9.77164 \cdot \sin(\omega t)$

g) $f_T(t) = 5.35389 \cdot \cos(\omega t) - 4.65356 \cdot \sin(\omega t)$

h) $f_T(t) = 14.7205 \cdot \cos(\omega t) - 6.25476 \cdot \sin(\omega t)$

Literaturverzeichnis

S. Goebbels and S. Ritter. *Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation*. Spektrum Akademischer Verlag, 2011. ISBN 9783827427618.

Günther Malle. *Mathematik verstehen*. 5. öbv, Wien, 1. auflage edition, 2010. ISBN 978-3-209-09569-5.

Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*, volume 1 und 2. Vieweg + Teubner, Braunschweig/Wiesbaden, 12 edition, 2009.

Witz zu den Naturwissenschaften und zur Mathematik

- 10 Personen (inklusive Fahrer) fahren mit dem Bus. Der Bus hält an und 11 Leute steigen aus. Drei Wissenschaftler werden zu diesem Vorgang befragt.
Der Physiker: "Das ist okay, 10% Abweichung sind noch in der Toleranz."
Der Biologe: "Ganz klar, die haben sich unterwegs vermehrt."
Der Mathematiker: "Wenn jetzt noch einer einsteigt, dann ist der Bus leer!"
- Warum verwechseln Mathematiker (und Informatiker) Weihnachten und Halloween?
Weil Oct 31 = Dec 25¹
- Warum können Piraten keinen Kreis berechnen?
Weil sie π -raten!
- Was macht ein Mathematiker im Garten?
Wurzeln ziehen.
- Ein Mathematiker, ein Physiker und ein Philosoph stehen auf dem Dach eines brennenden Hochhauses. Die einzige Rettung ist es, 40 Stockwerke herunterzuspringen. Glücklicherweise ist unten ein drei Mal drei Meter grosser Pool.
Der Philosoph sagt: "Das Leben ist eh eine Illusion", springt, landet fünf Meter neben dem Pool und ist sofort tot.
Der Physiker zückt seinen Taschenrechner, entwickelt eine komplizierte Formel unter Berücksichtigung der Windgeschwindigkeit, der Erddrehung usw., springt, landet im Pool und überlebt.
Der Mathematiker zückt seinen Taschenrechner, entwickelt eine komplizierte Formel unter Einbeziehung aller möglicher Variablen, springt und fliegt senkrecht nach oben, bis er in den Wolken verschwindet! Was ist passiert?
Ganz einfach: Vorzeichenfehler!
- Was macht ein Mathematiker auf der Toilette?
 $\pi \pi$

¹Hier wird im Dezimal- und im Oktal-System gerechnet.

-
- Der kürzeste Mathe-Witz: Sei $\epsilon < 0$.²
 - Was ist der Unterschied zwischen einem Etymologen und einem Entomologen? Der Etymologe weiss den Unterschied.³
 - Ein Neutron will in einen Club. Der Türsteher: "Sorry, heute nur für geladene Gäste".
 - Treffen sich zwei Parallelen.⁴
 - Steht ein deprimierter Mann auf einer Brücke und überlegt sich zu springen. Kommt ein Physiker und sagt ihm, er würde das nicht tun. Als der Mann nach dem Grund fragt, antwortet der Physiker: "Sie haben so viel Potential!"
 - Zwei Mathematiker streiten sich im Restaurant, ob Mathematik jedem Menschen natürlich gegeben sei, oder ob man dafür ein Studium brauche. Der erste muss kurz auf die Toilette, da winkt der zweite die Kellnerin zu sich und sagt ihr, er werde sie nachher zu sich rufen und eine Frage stellen, die Antwort sei dann ' $x^3/3$ '.
Als der erste zurück ist, sagt der zweite, er werde ihm beweisen, dass jeder Mensch Mathematik von Natur aus beherrsche, und ruft die Kellnerin zu sich. "Was ist das Integral von x^2 ?" — " $x^3/3$ ", und beim weggehen dreht sie sich nochmals um: "plus C ".

²In der Analysis wird ϵ immer für eine kleine und *positive* Zahl verwendet.

³Die Entomologie beschäftigt sich mit der Erforschung der Insekten, die Etymologie mit der Herkunft und Geschichte von Wörtern und ihren Bedeutungen. Der Etymologe sollte also über die unterschiedlichen Bedeutungen Bescheid wissen.

⁴In der Geometrie sind Parallelen so definiert, dass sie sich nicht schneiden, d.h. nicht treffen.