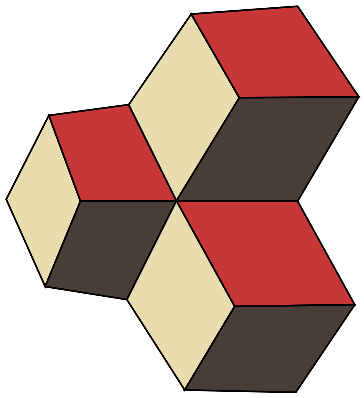
Lineare Algebra 1



Dr. D. Adams
Institut für Mathematik und Naturwissenschaften (IMN)
donat.adams@fhnw.ch
Büro: 5.1C01

Zürich, 9. September 2025

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vektoren

KAPITEL 1

Eliminationsverfahren I

Lernziele Begriffe Vektoren

- Die Studierenden können die lineare Abhängigkeit von Vektoren in Komponentenform mit dem Gauss-Verfahren bestimmen.
- Sie kennen die Begriffe, 'kollinear', 'komplanar' und 'linear abhängig' und können sie miteinander in Beziehung bringen.
- Sie können ein lineares Gleichungssystem mit dem Gauss-Verfahren in Zeilenstufen-Form bringen.
- Sie können in einem linearen Gleichungsystem in Zeilenstufen-Form durch Einsetzen die Lösung bestimmen.

1.1 Eliminationsverfahren von Gauss I

Definition Linearkombination, Koeffizienten

Eine **Linearkombination** der Objekte (Vektoren) $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ ist die Summe

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$. Die Zahlen x_1, x_2, x_3, ... heissen **Koeffizienten**.

Definition Lineare Abhängigkeit,komplanar

Die Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ heisst **linear abhängig** genau dann, wenn die Gleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

eine Lösung besitzt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen der Koeffizienten.
Drei oder mehr Vektoren in $\mathbb{R}^3$, die linear abhängig sind, nennen wir **komplanar**.

[Papula, 2009, Bd. 1 II 2.4] [Goebbels and Ritter, 2011, 3.3.2, p.429]

Beispiel 1.1 Gauss-Eliminationsverfahren **893982**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}4\\30\\-1\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind. Falls ja: Geben Sie eine Linearkombination an, welche den Nullvektor ergibt.

Beachte, dass beim ersten Schritt, die erste Zeile nicht verändert wird. Beim zweiten Schritt wird die zweite Zeile nicht verändert.

Infobox Vorgehen beim Gaussverfahren

Bei jedem Schritt gilt: Die Zeile, die benutzt wird um in anderen Zeilen zu eliminieren, darf nicht verändert werden.

Beispiel 1.2 Gauss-Eliminationsverfahren **854654**

Bestimmen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind. Falls ja: Geben Sie eine Linearkombination an, welche den Nullvektor ergibt.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\14\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\16\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\-7\\9\end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}8\\-7\\6\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\3\\-8\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-32\\34\\-41\end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\9\\-5\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}24\\-100\\44\end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-9\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}8\\8\\-1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}38\\29\\38\end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-5\\0\\-8\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-25\\12\\-31\end{pmatrix}$

Kollineare und komplanare Vektoren

Definition Kollinear

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **kollinear**, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Der Begriff kollinear fasst also die Begriffe **parallel** $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ und **antiparallel** $\vec{a} = -\lambda \vec{b}$ mit $\lambda > 0$ zusammen.

Sind zwei Vektoren kollinear so gilt auch

$$\vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{0}$$

Beispiel 1.3 Spezielle Lage von zwei Vektoren **014841**

Untersuche, ob die Paare von Vektoren kollinear sind durch Addition von Vielfachen der Vektoren.

a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{l} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

f) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

g) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

h) $\vec{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

Nehmen wir die Gleichung $\vec{c} + \frac{1}{6} \cdot \vec{d} = \vec{0}$, dann gilt z.B. auch $7 \cdot \vec{c} + 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \vec{d} = \vec{0}$ oder allgemein

$$x_1 \cdot \vec{c} + x_2 \cdot \vec{d} = \vec{0}$$

d.h. wir können *beide* Vektoren mit einer Vorzahl multiplizieren. Erhalten wir so den Null-Vektor, dann sind sie kollinear.

Wir betrachten nun die spezielle Lage von drei Vektoren. Wie Fig. 1.1 zeigt, gilt für drei Vektoren, die in einer Ebene liegen $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$. Beachte, dass in Fig. 1.1a) die Linearkombination $1\vec{a} + (-1)\vec{b} + 1\vec{c} = \vec{0}$ lautet, d.h. zufällig haben die Vektoren die richtige Länge. Wir müssen sie nur addieren und subtrahieren, damit wir wieder zum Ursprung gelangen.
Sind nun drei Vektoren ganz beliebig in einer Ebene, dann gehen wir so vor:

i) Wir verschieben $\vec{c}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ (Fig. 1.1 c).

ii) Durch den Endpunkt von $\vec{b}$ legen wir zwei Geraden (rot), die Parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{c}$ liegen. Liegen $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene, entsteht ein Parallelogramm.

iii) Wir strecken $\vec{a}$ und $\vec{c}$, so dass sie die Länge der Kanten des Parallelogramms haben Fig. 1.1 c).

$$\vec{a}' = \vec{a} \cdot x_1 \text{ und } \vec{c}' = \vec{a} \cdot x_3$$

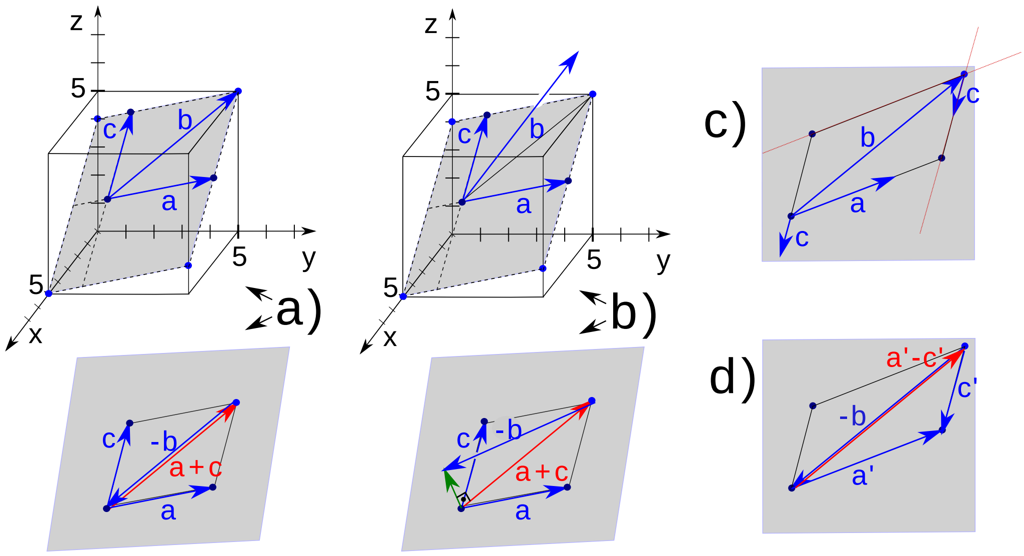


Abbildung 1.1: a) Drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, lassen sich immer so addieren, dass der Nullvektor entsteht. b) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ definieren eine Ebene. Zeigt der Vektor $\vec{b}$ aus dieser Ebene heraus, gibt es keine Linearkombination so dass $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ (abgesehen von der Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

iv) Wir haben $\vec{a}' - \vec{c}' - \vec{b} = \vec{0}$ Fig. 1.1 d).

Um also zu untersuchen, ob die Vektoren komplanar sind, wurden im Beispiel eine Linearkombinationen der Vektoren berechnet.

Wir merken uns also folgendes:

- Lineare Abhängigkeit ist die Verallgemeinerung der Begriffe “kollinear” und “komplanar” für beliebig viele Vektoren und beliebig viele Dimensionen. Linear abhängige Vektoren haben eine spezielle Lage zueinander. Zwei kollineare Vektoren sind linear abhängig, drei komplanare Vektoren sind linear abhängig.
- Um herauszufinden, ob Vektoren komplanar sind, wenden wir das Gauss-Eliminationsverfahren an.
- Die spezielle Lage erlaubt, dass man wieder zum Ursprung zurück gelang indem man sich strikt nur entlang der Vektoren bewegt.
- In zwei Dimensionen sind *mehr* als 2 Vektoren *immer* linear abhängig. In drei Dimensionen sind mehr als 3 Vektoren *immer* linear abhängig usw.
- Linear unabhängige Vektoren haben keine spezielle Lage zueinander. Zwei linear unabhängige Vektoren spannen einen Fläche auf, drei linear unabhängige Vektoren spannen ein Volumen auf, vier linear unabhängige Vektoren spannen ein Hyper-Volumen auf.

1.2 Gleichungen lösen mit dem Gauss-Eliminations-Verfahren

Definition Dreiecksform

Ein Gleichungssystem ist in Dreiecksform, falls die Koeffizienten unter der Diagonalen verschwinden (siehe Beispiele 1.4 und 1.5)

Beispiel 1.4 Einsetzen in die Dreiecksform **15951**

Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left|\begin{array}{cccccc} x & +2y & +3z & = & 8 \\ & 2y & +4z & = & 14 \\ & & 5z & = & 10 \end{array}\right|$$

Wir sehen, dass die Dreiecksform eines Gleichungssystems den Vorteil hat, dass man von unten nach oben einsetzen kann. Deshalb ist es nützlich, Gleichungssysteme in diese Form zu bringen. Dies geschieht mit dem Gauss-Verfahren.

Beispiel 1.5 Dreiecksform **712666**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left|\begin{array}{ccccc} x & +2y & +3z & = & 8 \\ -3x & -2y & -z & = & 4 \\ 4x & +2y & +5z & = & 0 \end{array}\right|$$

Beispiel 1.6 Einsetzen in die Dreiecksform **25951**

Lösen Sie das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left|\begin{array}{ccccc} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ & 5y & -z & = & 6 \\ & & 7z & = & 28 \end{array}\right|$$

Beispiel 1.7 Dreiecksform **601555**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren.

Löse dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{vmatrix} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ 4x & -y & +9z & = & 30 \\ 8x & -2y & +25z & = & 88 \end{vmatrix}$$

1.3 Übungen zu linear abhängigen Vektoren

Beispiel 1.8 Kollinear **588716**

Bestimmen Sie x, y und z, so dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.9 Kollinear/Parallel **745674**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme x, so dass $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

b) Bestimme y, so dass $\vec{f} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Beispiel 1.10 Kollinear **036721**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und $\vec{w}$ sollen kollinear sein. Bestimme x und y.

Beispiel 1.11 Kollinear **631401**

Überprüfe, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.4 Übungen

Beispiel 1.12 Lösen von LGS, Reihenfolge Gleichungen vertauschen **FZJIRV**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left[\begin{array}{lrrrcr} L_1: & -6x & 8y & 2z & = & 40 \\ L_2: & 12x & -16y & 2z & = & -32 \\ L_3: & 24x & -33y & -3z & = & -120 \end{array}\right]$$

Beispiel 1.13 Gauss-Elimination, Vertauschen von Gleichungen **F1NB3C**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left[\begin{array}{lrrrcr} L_1: & -19x & 38y & -3z & = & 114 \\ L_2: & 15x & -22y & 7z & = & -82 \\ L_3: & x & -2y & 2z & = & -6 \end{array}\right]$$

Beispiel 1.14 Gauss-Elimination, Vertauschen/Skalieren von Gleichungen **H7XS9Z**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren. Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left[\begin{array}{lrrrcr} L_1: & 42x & +9y & +35z & = & 205 \\ L_2: & 3x & & -6z & = & -3 \\ L_3: & 14x & +6y & +22z & = & 92 \end{array}\right]$$

Beispiel 1.15 Konzepte **TZ8EV9**

a) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir finden $5\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0}$. Wählen Sie die richtigen Antworten aus:

i) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind parallel

ii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind antiparallel

iii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind komplanar

iv) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig

b) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir finden $3\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$. Wählen Sie die richtigen Antworten aus:

i) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind parallel

ii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind antiparallel

iii) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind komplanar

iv) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig

c) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Wir eliminieren die Komponenten mit dem Gaussverfahren, können aber die $z-$Komponente nicht eliminieren. Also sind die Vektoren

i) linear abhängig

ii) linear unabhängig

KAPITEL 2

Der Vektorraum

Lernziele Begriffe Vektoren

- Die Studierenden kennen die komponentenweise Schreibweise von Vektoren, sowie das Vorgehen bei der komponentenweise Addition. Sie können Gegenvektoren bestimmen und Vektoren mit einem Skalar multiplizieren.
- Sie können Ortsvektoren von allgemeinen Vektoren unterscheiden.
- Sie können die Norm (Länge) eines Vektors berechnen und einen Vektor normieren.
- Sie kennen die Definition eines Vektorraums. Sie kennen neben den Vektoren in der Geometrie mindestens zwei weitere Vektorräume.

2.1 Vektoren in der Geometrie

Definition Ortsvektor

Als Ortsvektor eines Punktes bezeichnet man einen Vektor, der vom Ursprung zu diesem Punkt zeigt.

$$\overrightarrow{OA}$$

Für Berechnungen in der Geometrie ist es praktisch die Notation abzukürzen. Wir stellen fest: Die Koordinaten eines Punktes $A(2/4)$ *entsprechen* den Komponenten des Ortsvektors

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in dieser Basis. Wir unterscheiden deshalb nicht zwischen Koordinaten eines Punktes A und Komponenten des Ortsvektors $\overrightarrow{OA}$ dieses Punktes. Um die Komponenten des Ortsvektors eines Punktes anzugeben, führen wir noch folgende Kurzschreibweise ein:

Infobox Ortsvektor

Wir kürzen den Ortsvektor des Punktes A wie folgt ab:

$$\overrightarrow{OA} =: \vec{A}$$

Wir fassen zusammen: Wir bezeichnen Ortsvektoren mit Grossbuchstaben, z.B. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$ und allgemeine Vektoren mit Kleinbuchstaben z.B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Ortsvektoren sind an den Ursprung gebunden, deshalb können wir sie nicht verschieben. Allgemeine Vektoren hingegen können verschoben werden.

Infobox Verbindungsvektor

In dieser Notation können wir für den Verbindungsvektor von $\vec{A}$ zu $\vec{B}$ schreiben:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

Die Norm eines Vektors schreiben wir immer mit $\|\vec{a}\|$ und seltener als a.

Infobox Gesetze für die Norm

- Die Norm $\|\vec{a}\|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ ist in einer Orthogonalbasis

  $$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + \ \ldots \ + (a_N)^2}$$

  .

- Die Norm eines Vektor wird in der Geometrie auch 'Länge' oder 'Betrag' genannt. Wir ziehen aber den Ausdruck 'Norm' vor.

- Für die Norm eines Vektor gilt immer $\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$. Beachte, dass im Ausdruck oben die Striche bei $|\lambda|$ eine andere Bedeutung haben als bei $\|\vec{a}\|$. Stehen die Striche links und rechts von einer *Zahl*, wird der Betrag berechnet z.B. $|-2| = 2$, stehen aber Doppelstricht links und rechts von einem Vektor, wird desssen Länge (Norm) berechnet z.B. $\left\|\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}\right\| \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ sondern $\left\|\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}\right\| = 13$.

Beispiel 2.1 Mittelpunkt **I9QK6H**

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overrightarrow{PQ}$

b) Erstellen Sie eine Skizze und berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $\vec{M}$ der Strecke $\overline{PQ}$

c) Geben den Mittelpunkt einer Strecke $\overrightarrow{PQ}$ allgemein an, d.h. ohne Koordinaten zu verwenden.

Beispiel 2.2 Schwerpunkt eines Dreiecks **6JL1WJ**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten das Dreieck ABC.

a) Berechnen Sie den Mittelpunkt $\vec{M}$ der Kante c.

b) Berechnen Sie den Verbidungsvektor $\overrightarrow{CM}$. Was sind die Koordinaten des Schwerpunktes?

c) Geben den Schwerpunkt eines allgemeinen Dreiecks ABC an mit Hilfe der Koodinaten der Eckpunkte $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ (d.h. ohne Koodinaten rechen).

d) Überprüfen Sie Ihren Ausdruck, indem Sie in den allgemeinen Ausdruck die Koordinaten von oben einsetzen und mit dem Resultat aus Teilaufgabe c) vergleichen.

Beispiel 2.3 Quadrat **FNI0DZ**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{D} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmeen Sie die Länge der Seiten.

b) Bestimmen Sie die Mittelpunkte der Seiten.

c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Quadrats.

2.2 Der Vektorraum oder: Was ist überhaupt ein Vektor?

Definition Vektorraum

Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist eine Menge V mit einer Addition $+\colon V \times V \mapsto V$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \mapsto V$. Seien $\vec{v}$, $\vec{w}$ beliebige Elemente aus V und $a, b \in \mathbb{R}$, dann muss gelten:

i) $\vec{v} + \vec{w}$ und $a \cdot \vec{v}$ liegen ebenfalls in V (Abgeschlossenheit).

ii) Es gibt ein Element $\vec{0}$ (das **neutrale Element der Addition**), das folgendes erfüllt:
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

iii) Zu jedem $\vec{v}$ gibt es einen **Gegenvektor**[a] $-\vec{v}$, so dass
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

iv) Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

v) Die skalare Multiplikation ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$

vi) Die skalare Multiplikation ist distributiv: $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ und $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

vii) Das neutrale Element (1) der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist auch in V ein neutrales Element $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

[a] man spricht auch vom Inversen von $\vec{v}$

Infobox Vektorraum Gegenbeweis

- Eine Menge, die $\vec{0}$ nicht enthält, ist kein Vektorraum.
- Wenn wir vermuten, dass V kein Vektorraum ist, suchen wir ein Beispiel wo $\lambda \cdot \vec{v} \notin V$ oder $\vec{v} + \vec{w} \notin V$.

Beispiel 2.4 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ ACDB18

Zeige, dass die Punkte auf der Geraden g, ($s \in \mathbb{R}$):
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot s$$
einen Vektorraum bildet. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 2.5 Ein Punkt in $\mathbb{R}^2$ 234208

Zeige, dass die Menge
$$\left\{ \vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

keinen Vektorraum bildet. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Definition Unterraum

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums nennt man Unterraum, falls für alle $\vec{u} \in U$ und $\vec{u}' \in U$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{u}' &\in U \\ a \cdot \vec{u} &\in U \end{aligned}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Infobox Unterräume in $\mathbb{R}^N$

Typische Unterräume in $\mathbb{R}^N$ sind Geraden und Ebenen, die $\vec{0}$ beinhalten. Sie gehen durch den Ursprung.

2.3 Komponentenweise Notation, Hintergrund*

Wie wir später sehen werden, benutzt man in der Anwendungen meist eine komponentenweise Notation, d.h. man betreibt Mathematik mit den Komponenten. Bei dieser Notation sind folgende Regeln wichtig:

Infobox Gesetze für die komponentenweise Notation von Vektoren

Betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

- Die Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert.

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Das neutrale Element der Addition ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Wir nennen diesen Vektor den Nullvektor. Es erfüllt die Eigenschaft $\vec{v}+\vec{0} = \vec{v}$
- Komponentenweise Multiplikation mit einer Zahl:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_N \end{pmatrix} \text{ z.B. } 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Der Gegenvektor zu $\vec{w}$ ist $-\vec{w}$. Wir berechnen ihn, indem wir alle Komponenten mit (-1) multiplizieren:

$$-\vec{w} = (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Wir benutzen für Vektor die Spaltenform

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

  und seltener die Zeilenform $\vec{a} = (a_1, a_2)$
  [Malle, 2010, 11.1,p.204]
- Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. In $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ oder } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

  Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$.
  [Malle, 2010, 11.1,p.204]

2.4 Übungen: Komponentenweise Notation

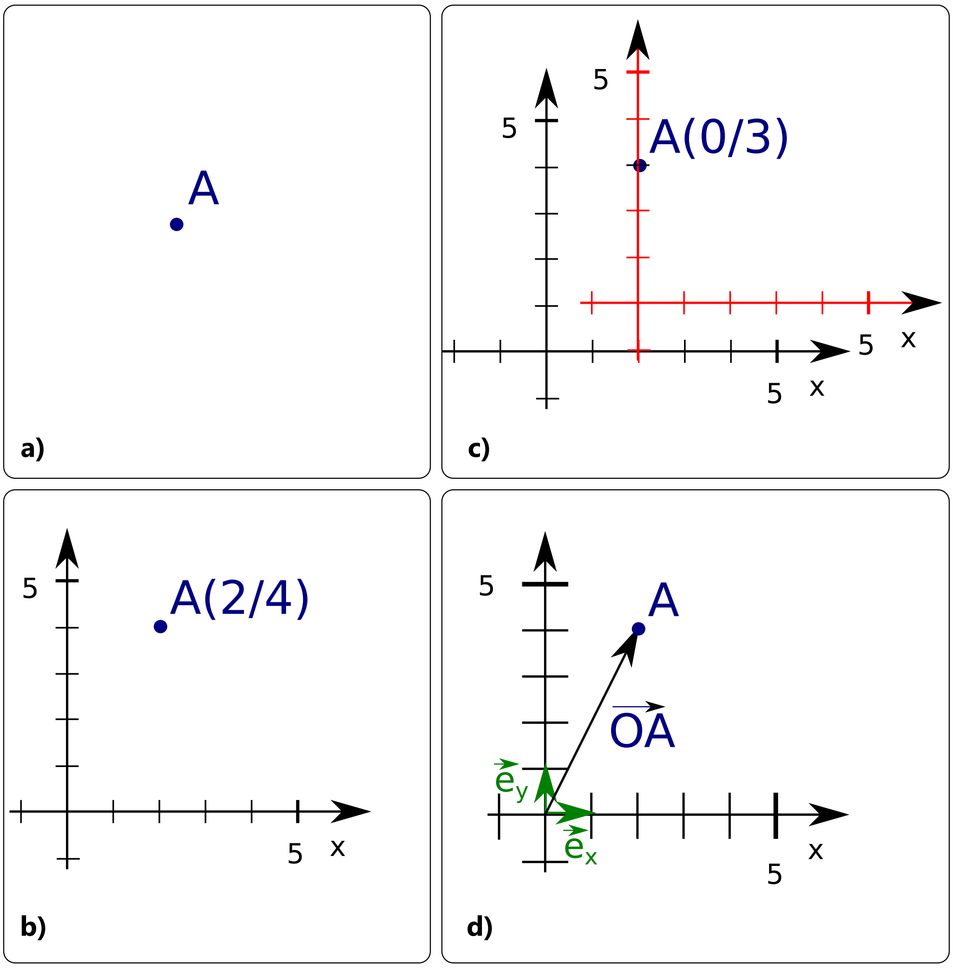


Abbildung 2.1: Traditionelle Darstellung eines Punktes (a) und der Koordinaten des Punktes (b). (c) Die Koordinaten eines Punktes sind nicht eindeutig. Sie hängen von der Wahl des Koodinatensystems ab. (d) Der Ortsvektor ist ein Vektor der vom Ursprung zum Punkt A geht.

Beispiel 2.6 Gesetze für die Addition **SY0XAE**

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom inversen Element, Gesetz vom neutralen Element, Kommutativgesetz der Addition, Assoziativgesetz der Addition.

a) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

b) $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

c) $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

d) $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

Beispiel 2.7 Gesetze für die Multiplikation **60FTC8**

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom neutralen Element, Distributivgesetz, Assoziativgesetz.

a) $r \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = r \cdot \vec{A} + r \cdot \vec{B}$

b) $(r + s) \cdot \vec{A} = r \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{A}$

c) $(r \cdot s) \cdot \vec{A} = r \cdot (s \cdot \vec{A})$

d) $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$

Beispiel 2.8 Rechnen mit Vektoren I **GD49VQ**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Berechne die Komponenten der folgenden Vektoren:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) $\vec{C} - \vec{B}$

c) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$

d) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}$

e) $2 \cdot \vec{A}$

f) $(-1) \cdot \vec{B}$

g) $7 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B} + 2 \cdot \vec{C}$

h) $\frac{7}{2} \cdot \vec{A} + \frac{1}{3} \cdot \vec{D}$

Beispiel 2.9 Diagonalen in Rechteck **YWC8BB**

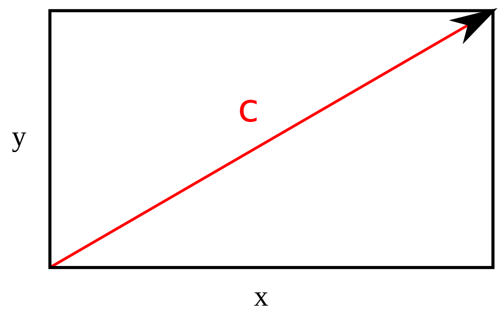
a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen (Seitenlängen $x = 8$ cm und $y = 15$ cm).

b) Berechnen Sie die Länge des Pfeils $\vec{c}$.

c) Wir betrachten nun ein Rechteck mit Seitenlängen $x = 5 \cdot 8$ cm und $y = 5 \cdot 15$ cm. Wie lange ist die Diagonale?

d) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck Seitenlänge x Zentimeter und y Zentimeter?

e) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck der Seitenlänge $\lambda \cdot x$ Zentimeter und $\lambda \cdot y$ Zentimeter?



Beispiel 2.10 Gesetze bei der komponentenweise Notation von Vektoren **490953**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme für die angegebenen Vektoren die Komponenten. Benutze wann immer möglich die oben angegebenen Gesetze.

a) Gib den Nullvektor in $\mathbb{R}^5$ an.

b) $\vec{v} + \vec{w}$

c) $5\vec{v}$, $5\vec{w}$ und $5 \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

d) $-\vec{v}$

e) $\|\vec{v}\|$

f) $\|\vec{v} \cdot 5\|$

Beispiel 2.11 Parallelogramm **DDBD9S**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2.7 \end{pmatrix}$$

Sind die Punkte die aufeinanderfolgenden Ecken eines Parallelogramms ABCD?

a) Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Verbindungsvektoren der Punkte berechnen.

b) Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Seitenlängen berechnen.

Beispiel 2.12 Parallelogramm II — LJY3HS

Überprüfen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

a)

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix},\ \vec{D}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix},\ \vec{D}=\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$$

Beispiel 2.13 Parallelogramm III — NI9G3B

Ergänzen Sie die Punkte zu einem Parallelogramm ABCD.

a)

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}21\\-11\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}-75\\199\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}35\\0\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Beispiel 2.14 Gleichschenklige Dreiecke — 5CE2XT

Handelt es sich bei ABC um gleichschenklige Dreiecke. Wenn ja, berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

a)

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}6\\2.75\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$$

Beispiel 2.15 Rechnen mit Vektoren II — KG5VVR

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{D}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$\vec{E}$ und $\vec{F}\in\mathbb{R}^2$ sind allgemeine Vektoren.

a) Gegenvektor zu $\vec{A}$?

b) Gegenvektor zu $\vec{B}$?

c) Gegenvektor zu $\vec{E} - 2 \cdot \vec{F}$?

d) Gegenvektor zu $-(\vec{E} - 5 \cdot \vec{F})$?

e) $\vec{A} + \vec{X} = \vec{B}$, $\vec{X} =$?

f) $\vec{B} + \vec{X} = \vec{0}$, $\vec{X} =$?

g) $7 \cdot \left(\vec{A} - 2 \cdot \vec{B}\right) + \vec{X} = \vec{C}$, $\vec{X} =$?

h) $\frac{1}{2} \cdot \vec{X} + \frac{1}{3} \cdot \vec{A} + \vec{D} = \vec{X}$, $\vec{X} =$?

2.5 Übungen: Vektorraum

Beispiel 2.16 Die Ebene $\mathbb{R}^2$ **14841**

Zeige, dass die Tupel in der Menge $V = \left\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

$$\begin{aligned} (x, y) + (p, k) &= (x + p, y + k) \\ (x, y) \cdot \lambda &= (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.17 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ **ZD4ZNA**

Zeige, dass die Tupel $V = \left\{a \cdot (1, 3) \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 2.18 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ 2 **D45D1N**

Prüfe, ob die Tupel $V = \left\{(a + 1, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 2.19 Die Ebene $\mathbb{R}^3$ **826816**

Wie wir später sehen werden, liegen die Punkte, die man bilden kann mit dem Gesetz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \\ a + b \end{pmatrix}$$

und $a, b \in \mathbb{R}$ in einer Ebene. Zeige, dass die Tripel in $V = \left\{ \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \\ a + b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 2.20 Ein A4-Blatt **A1D84A**

$$V = \{(x, y)|0 \leq x \leq 210 \wedge 0 \leq y < 297\}$$

$$\begin{aligned} (x, y) + (p, k) &= (x + p, y + k) \\ (x, y) \cdot \lambda &= (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Bilden die Tupel in V einen Vektorraum? Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation. Nebenbei: Wir könnten die Tupel als Koordinaten eines Punkes auf einem A4-Blatt im Hochformat betrachten. Den Ursprung bildet die linke untere Ecke und die Koordinaten werden in Millimeter (mm) gemessen.

Beispiel 2.21 Verdienst **JHUQUG**

Herr Meyer arbeitet für zwei Arbeitsgebern. $\vec{M} \in \mathbb{R}^2$ gibt die Monatsgehälter bei beiden Arbeitsgebern, $\vec{J} \in \mathbb{R}^2$ seine Jahresgehälter an.

a) Drücke $\vec{J}$ mit $\vec{M}$ aus.

b) Herr Meyer erhält zweimal im Jahr das doppelte Gehalt. Drücke jetzt $\vec{J}$ mit $\vec{M}$ aus.

Beispiel 2.22 Polynome bis Grad 3 **1A73ZA**

$$p(x) = 120 - 15x + 5x^2 - 4x^3, \quad q(x) = 7 + 42x - 6x^2 - 2x^3$$

Wir schreiben die Buchhaltung für die Koeffizienten der beiden Polynome in Listen auf

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 120 \\ -15 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 42 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $a(x) = p(x) + q(x)$

b) Berechne $b(x) = -3p(x) + 2q(x)$

Beispiel 2.23 Trigonometrische Funktionen **847116**

$$p(x) = 15\cos(x) - 4\sin(x), \quad q(x) = -2\cos(x) + 6\sin(x)$$

Wir schreiben die Buchhaltung für die Koeffizienten in Listen auf

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $a(x) = 2p(x) + 15q(x)$

b) Berechne $b(x) = 6p(x) + 4q(x)$

Beispiel 2.24 Polynome bis Grad 4 **625994**

Zeige, dass die Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 \text{ mit } a_i \in \mathbb{R}$$

(Polynom 4. Grades) einen fünfdimensionalen Vektorraum V bilden.

Beispiel 2.25 Welches ist ein Vektorraum? **15G7RY**

Überprüfen Sie, ob die Mengen abgeschlossen sind.

- mit der Addition
- mit der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wenn nicht anders erwähnt, ist die Addition und die Multiplikation elementweise.

a) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

b) $x + 5$ mit $x \in \mathbb{R}$

c) $a \cdot (1, 2)$, mit $a \in \mathbb{R}$

d) Die Menge mit dem Element $5 \cdot \sin(x)$

e) Die Menge (x, y) mit $x, y \in \{0, ...320\}$

f) Die Menge mit dem Element $(1, 2, 3)$ (Trippel)

g) Die Menge mit dem Element $(0, 0, 0)$ (Trippel)

h) Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

i) Die Menge der gebrochen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

j) (x, y), mit x, y Gleitkommazahlen (float) in in C++ oder python.

k) Das Intervall $]-1, 1[$ (offenes Intervall)

KAPITEL 3

Darstellung der Gerade in $\mathbb{R}^2$

Lernziele Darstellung der Gerade

- Die Studierenden kennen die Geradengleichung in Parameterform.
- Die Studierenden können aus der Koordinatengleichung einer Geraden die Parameterform bestimmen und umgekehrt.
- Die Studierenden können einen Vektor normieren.
- Die Studierenden können überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen.
- In $\mathbb{R}^2$ können die Studierenden zu einem gegebenen Vektor $\vec{v}$ einen zweiten Vektor $\vec{n}$ bestimmen, der senkrecht auf $\vec{v}$ steht.

Eine Gerade kann auf folgende Arten dargestellt werden:

Definition Funktionsgleichung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$

Der Ausdruck $y = m \cdot x + d$ beschreibt eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Dabei ist m die Steigung und d der y-Achsen-Abschnitt

Definition Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$

Alle Punkte, die auf einer Geraden liegen und die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ haben, erfüllen die Bedingung $n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0$. Dabei ist $n \in \mathbb{R}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ der Normalenvektor der Geraden.

Definition Parameterform der Geraden in $\mathbb{R}^2$

Die Punkte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \vec{v}$$

beschreiben eine Gerade. Dabei sind $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{A}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R}$. Wir nennen $\vec{A}$ den **Aufpunkt** und $\vec{v}$ den **Richtungsvektor**.

[Papula, 2009, Bd. 1 II 4.1] In $\mathbb{R}^3$ gilt analog für die Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{A} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{R}^3; s \in \mathbb{R}$$

Infobox Darstellung von Geraden in $\mathbb{R}^n$

- In $\mathbb{R}^2$: Für Geraden, die parallel zu y-Achse verlaufen, gibt es eine Koordinatengleichung (z.B. $x = 3$) aber keine Funktionsgleichung.
- In $\mathbb{R}^n$ werden Geraden durch die Parameterform dargestellt. Für die Gerade gibt es in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) keine Funktionsgleichung und keine Koordinatenform.

Grundfertigkeiten beim Wechsel der Darstellung von Geradengleichungen

Beispiel 3.1 Parameterform der Geraden EEZWBD

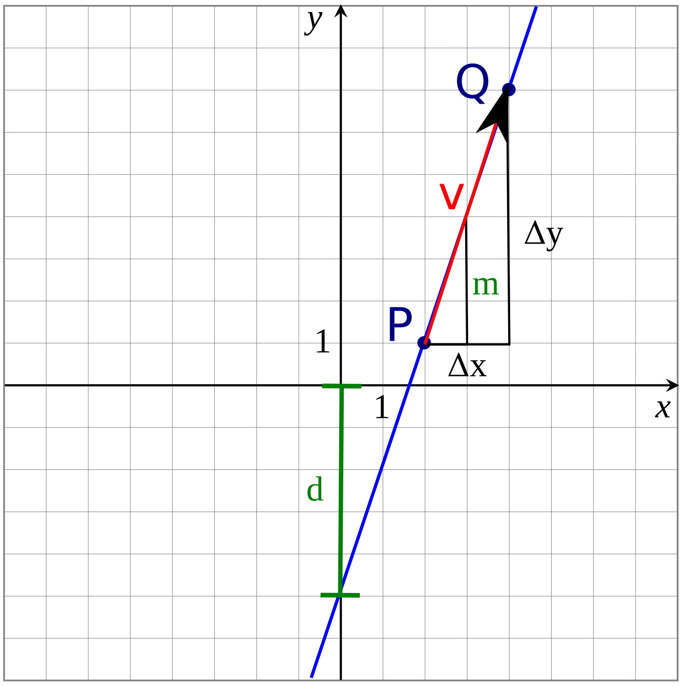
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir kennen den Mittelpunkt der Strecke $\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overrightarrow{PQ}}_{=\vec{v}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie 4 weitere Punkte auf der *Geraden* durch $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ an.

b) Wie können wir *alle* Punkte auf der Geraden darstellen?

Beispiel 3.2 Grundfertigkeiten 1 EPM0VQ



Wir betrachten die Gerade g durch die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Geraden

a) als Funktionsgleichung

b) in Parameterform.

Beispiel 3.3 Grundfertigkeiten 2 **Z0AP3T**

Wir betrachten die Gerade f durch die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Geraden

a) in Parameterform.

b) als Funktionsgleichung.

c) in Koordinatenform

d) zwei weitere Punkte auf der Geraden anhand der Parameterform

e) zwei weitere Punkte auf der Geraden Koordinatengleichung

Beispiel 3.4 Grundfertigkeiten 3 **F1CD8V**

Wir betrachten die Gerade h gegeben durch $3 \cdot x + 2 \cdot y + 6 = 0$.

a) Bestimmen Sie zwei weitere Punkte auf der Geraden, und

b) die Parameterform der Geraden h.

Wieso funktioniert das?

Beispiel 3.5 Bestimme die Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ **814251**

Gegeben seien die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Berechne zunächst zwei weitere Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Überlege dann, wie man alle Punkte auf der Geraden berechnen kann.

Beispiel 3.6 Punkte einer Geraden **702095**

Die Gerade ist gegeben durch

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liegen die Punkte auf der Geraden g?

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.7 Parameterform einer Geraden **THGS9F**

Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden durch die Punkte

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$

b) $\vec{C} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.8 Senkrechte Vektoren **HGV4AA**

Zeichnen Sie folgende Vektoren in ein Koordinatensystem ein und bestimmen

Sie einen Vektor, der senkrecht dazu steht.
Berechnen Sie anschliessend für die beiden Vektoren den Term

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

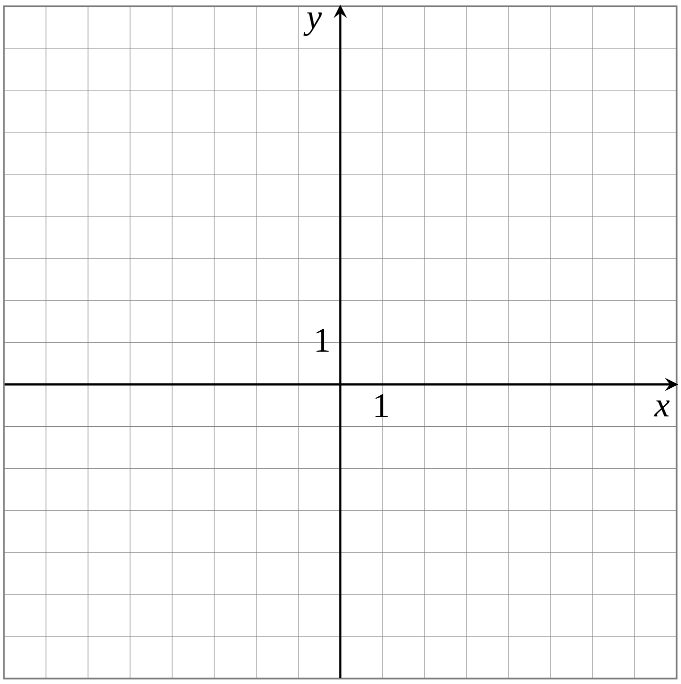
b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ u \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$



Infobox Senkrechte Vektoren

Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

- Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander, falls gilt

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y = 0$$

- Die Summe oben notieren wir auch mit dem Skalarprodukt

$$\vec{v} \odot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

- Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\vec{v}$.
- Diese Technik erlaubt es, aus dem Richtungsvektor einer Geraden $\vec{v}$ einen Vektor $\vec{n}$ zu bestimmen, der senkrecht auf der Geraden steht. Wir nennen dann $\vec{n}$ den **Normalenvektor**.

Beweis, dass $\vec{v}$ senkrecht steht auf $\vec{n}$:

$$\vec{v} \odot \vec{n} = v_x \cdot (-v_y) + v_y \cdot v_x = 0$$

Beispiel 3.9 Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$ **9TQ8VC**

Wir betrachten die Gerade g. Sie lässt sich darstellen in Parameterform

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

Wir bestimmen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und daraus in Koordinatenform

$$5x - y = 4$$

Untersuchen sie die geometrische Lage von $\vec{v}$ und $\vec{n}$.

Beispiel 3.10 Koordinatenform der Geraden in $\mathbb{R}^2$ **8SR7RB**

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}$ steht.

b) Wir berechnen einen zweiten Punkt auf der Geraden

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Welchen Winkel schliessen $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n}$ ein? Wie untersuchen Sie das mathematisch?

c) Wir betrachten jetzt einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\vec{l} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{n}$ nicht senkrecht aufeinander stehen.

d) Wir betrachten einen weiteren Punkt $\vec{D} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *auf* der Geraden g. Drücken Sie mathematisch aus, dass $\overrightarrow{AD}$ senkrecht zu $\vec{n}$ steht.

e) Multiplizieren Sie den letzten Ausdruck aus und vereinfachen Sie.

Beispiel 3.11 Von der Koordinatenform zur Parameterform der Geraden V1YY0V

$$g: \quad 5x + 8y - 16 = 0$$

a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\vec{n}$ der Geraden.

b) Bestimmen Sie den Richtungsvektor $\vec{v}$.

c) Bestimmen Sie einen Punkt $\vec{A}$ auf der Geraden.

d) Geben Sie die Parameterform der Geraden an.

Beispiel 3.12 Konstante bestimmen **0JNWFS**

$$h: \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}}\right) \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

a) Geben Sie den Normalenvektor an.

b) Bestimmen Sie n_x und n_y in der Koordinatenform

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0$$

c) Der Punkt $\vec{A}$ liegt auf der Geraden. Wie lässt sich mit dieser Überlegung d bestimmen?

d) Geben Sie h in der Koordinatenform an.

Infobox Umwandeln der Darstellungen der Geraden

- 2 Punkte zu Parameterform: Einen Punkt als Aufpunkt wählen, $\vec{v} = \vec{B} - \vec{A}$ ist der Richtungsvektor.
- Parameterform zu Koordinatenform: Aus $\vec{v}$ den Normalenvektor $\vec{n}$ berechnen. Dann Pkt. einsetzen und Konstante bestimmen.
- Parameterform zu Funktionsgleichung: Mit $\vec{v}$ die Steigung berechnen und den Aufpunkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ einsetzen in $y = m \cdot (x - A_x) + A_y$.
- Koordinatenform zu Parameterform: Normalenvektor $\vec{n}$ auslesen. Der Vektor senkrecht zu $\vec{n}$ ergibt den Richtungsvektor. Ein Punkt (z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$) ist der Aufpunkt.

3.1 Übungen: Geradengleichung

Beispiel 3.13 Gerade als Gleichung: Geradengleichung **48726**

Durch die Gleichung $x_2 = mx_1 + c$ wird eine Gerade im x_1x_2-Koordinatensystem beschrieben. Dabei ist m die Steigung und d der y-Achsenabschnitt. Gib die Parameterdarstellung der Geraden an für

a) $m = 3,\ d = 3$

b) $m = 0,\ d = 2$

c) $x_1 + x_2 = 3$

d) $2x_1 + x_2 = 5$

e) $x_2 = 3$

f) $x_1 = x_2$

g) $x_1 = 5$

h) $x_1 = -3$

Beispiel 3.14 Von der Parameterform zur Geradengleichung **94899**

Bestimme die Gleichung $x_2 = m \cdot x_1 + c$ der Geraden g ($t \in \mathbb{R}$):

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.15 Schnittpunkt von zwei Geraden **339474**

Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes $\vec{S}$ der Geraden g und h ($t, \lambda \in \mathbb{R}$):

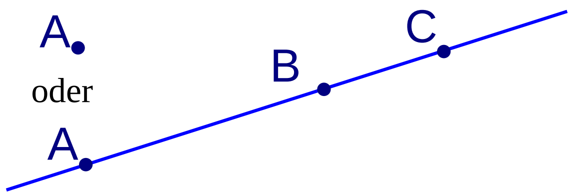
a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 3.16 Geraden **503523**



Liegt der Punkt $\vec{A}$ auf der Geraden durch die Punkte $\vec{B}$ und $\vec{C}$?

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix}$

KAPITEL 4

Funktionen und Trigonometrie

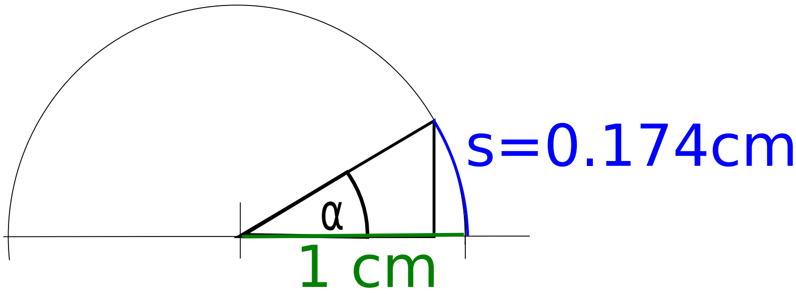
Lernziele Funktionen, Trigonometrie

- Die Studierenden können Winkel zwischen Bogenmass und Winkelgrad umrechnen.
- Sie kennen die Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis und die Eigenschaften, die sich daraus ergeben (Symmetrie und Periodizität).
- Sie kennen die Graphen der trigonometrischen Funktionen $\cos(t)$ und $\sin(t)$.
- Sie können Funktionen transformieren, d.h. verschieben und strecken entlang der x- und $y-$Achse. Sie können Funktionen an den Koordinatenachsen spiegeln.
- Sie können mit den Arkus-Funktionen aus gegebenen Komponenten von Vektoren und Dreiecken zugehörige Winkel berechnen.

4.1 Das Bogenmass

Beispiel 4.1 Kreisbogen EMSJBG

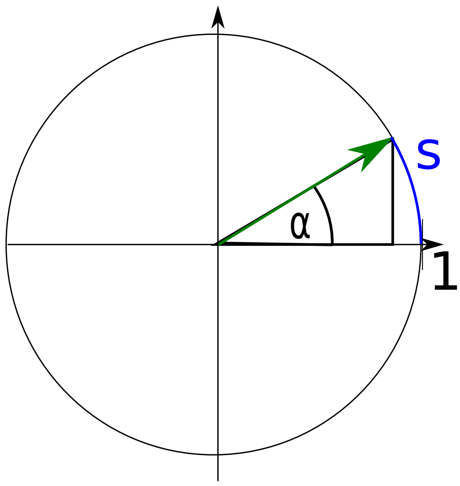
Wir messen auf einem Kreisbogen (Radius 1) einen Kreisbogen vom 0.174533. Wie gross ist der darunterliegende Winkel.



Definition Bogenmass

Unter dem Bogenmass s eines Winkels α (in Grad) verstehen wir die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.

$$\frac{s}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$



Beispiel 4.2 Rechne die Masseinheit um 245307

Berechne die Winkel $s = \frac{\pi}{7}$ und $\varphi = 12^\circ$ in beiden Masseinheiten.

Beispiel 4.3 Bogenmass TC2EE3

Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass s oder im Winkelmass α.

α	111°		120°		-15°
s		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

Beispiel 4.4 Bogenmass 978833

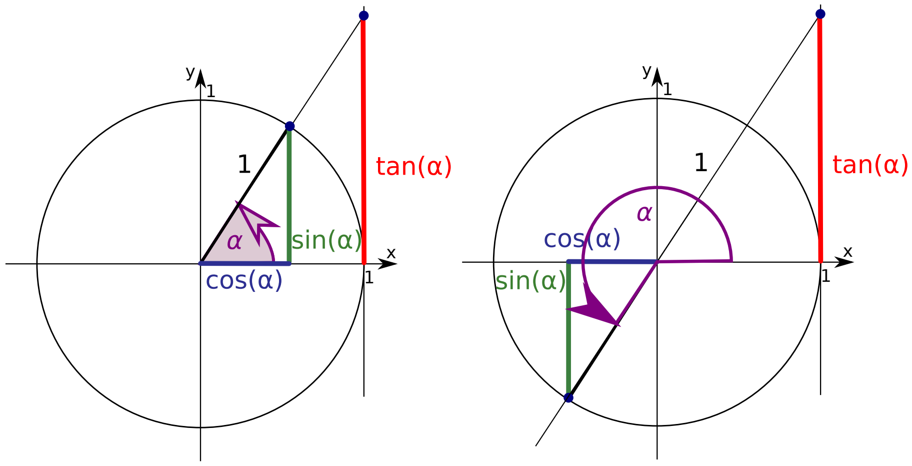
Berechne die fehlenden Einträge im Bogenmass s oder im Winkelmass α.

α	$18°$				$50°$
s		$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	

4.2 Der Einheitskreis

Wir definieren die trigonometrischen Funktionen als Stücke am Einheitkreis.

Definition Winkelfunktionen



Beachten Sie, dass die trigonometrischen Funktionen auch die Richtungen der Pfeile angeben und durch ihr Vorzeichen. Es gilt

- Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $\sin(\alpha) > 0$ und $\cos(\alpha) > 0$
- Für $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$: $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) < 0$

Infobox Winkel haben eine Richtung

In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeigersinn gemessen, d.h. $10°$ ist im Gegenuhrzeigersinn und $-10°$ ist im Uhrzeigersinn.

Für rechtwinklige Dreiecke gelten auch folgende Relationen. Wir werden die Relationen selten gebrauchen, weil wir uns mehr für die Beschreibung von periodischen Schwingungen interessieren.

Infobox Relationen am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H};\ \cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$

Mit den Abkürzungen A für Ankathete, G für Gegenkathete und H für Hypotenuse.

[Papula, 2009, Bd. 1 III 9.1]

Beispiel 4.5 Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen K4PJLD

Welche Vorzeichen haben $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für die folgenden Winkel? Geben Sie den Quadranten an.

a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Wir strecken den Einheitskreis um den Faktor r. Dadurch erhalten wir einen Kreis mit Radius r.

Satz Polarkoordinaten

Wir betrachten $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 360°$. Der Vektor

$$\vec{w} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat die Länge r und schliesst mit der x-Achse den Winkel φ ein.
Wir nennen (r, φ) die Polarkoordinaten von $\vec{w}$.

Beispiel 4.6 Polarkoodinaten 7SXS1J

Addiere die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Ihre Polar-Koordinaten sind $(r = 6.5, \varphi = 30°)$ und $(r = 10, \varphi = 50°)$.

Beispiel 4.7 Polarkoodinaten UCWJYR

Geben Sie die Vektoren in Karthesischen Koordinaten an.

a) $\vec{a}$: $\|\vec{a}\| = 1$, $\varphi = 45°$

b) $\vec{b}$: $\left\|\vec{b}\right\| = 2$, $\varphi = -225°$

c) $\vec{c}$: $\|\vec{c}\| = 5$, $\varphi = \frac{5\pi}{36}$

d) $\vec{d}$: $\left\|\vec{d}\right\| = 2$, $\varphi = 60°$

e) $\vec{e}$: $\|\vec{e}\| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

f) $\vec{f}$: $\left\|\vec{f}\right\| = 7$, $\varphi = 35°$

g) $\vec{g} = \vec{a} + \vec{b}$

Beispiel 4.8 Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten **NNHCXF**

Geben Sie die kartesischen Koordinaten der Vektoren an. Verwenden Sie auf dem Taschenrechner den Grad modus (`deg`), falls Winkel in Grad angegeben sind und den Radian-Modus (`rad`), falls die Winkel im Bogenmass angegeben sind.

a) $r = 5$, $\varphi = 216.9°$

b) $r = 13$, $\varphi = -0.4$

c) $r = 37$, $\varphi = 1.24$

d) $r = 85$, $\varphi = 25°$

e) $r = 145$, $\varphi = 4.55$

f) $r = 197$, $\varphi = 98.2°$

Beispiel 4.9 Kompass und Winkel **IJ5I6F**

a) Nicolas läuft 3 m von Punkt O weg. Dabei schliesst er mit der positiven x-Achse einen Winkel von 30° ein. Beschreibe seinen Weg mit einem Pfeil in der Zeichnung und danach mit Zahlen.

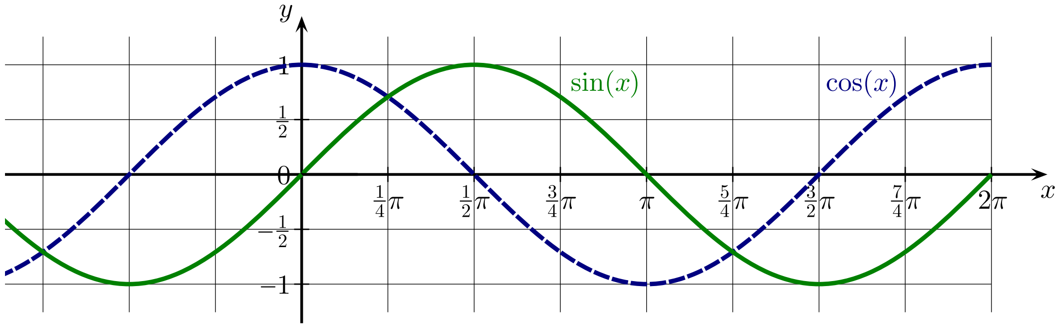
b) Wo landet er, wenn er 7 m läuft und mit der positiven x-Achse einen Winkel von 55° einschliesst?

c) Wo landet er, wenn er beide Wege nacheinander läuft?

4.2.1 Graphen der trigonometrischen Funktionen

Infobox Funktionen

- Die Zuordnung $x \mapsto y = f(x)$ heisst $f(x)$ Funktion. Dabei ist x die freie Variable (Input) und y die abhängige Variable (Output).
- Wir nennen x das **Argument** von f und y den **Funktionswert**.



Definition Periode und Symmetrie

Eine Funktion $f(t)$ heisst

- periodisch mit **Periode** T, falls $f(t+T) = f(t)$
- **symmetrisch**, falls $f(-t) = f(t)$
- **antisymmetrisch**, falls $f(-t) = -f(t)$

Beispiel 4.10 Symmetrie von Monomen NUDTZW

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

Beispiel 4.11 Symmetrie von Monomen MVESAV

Bestimme die Symmetrie der Funktionen

a) $f(x) = 1 + x^2$

b) $f(x) = x - x^3$

c) $f(x) = x + x^2$

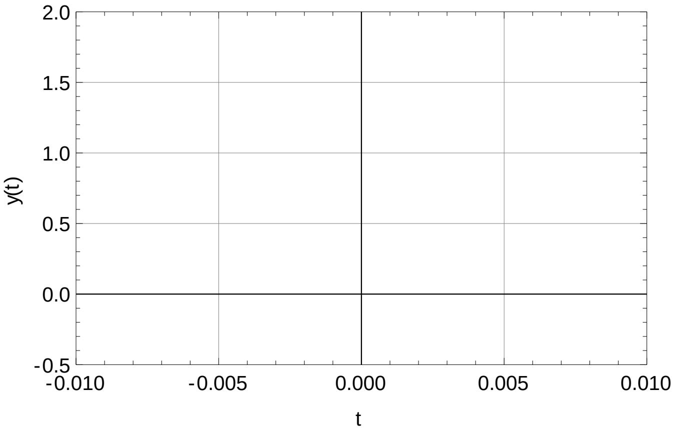
d) $f(x) = x^3 + x^4$

Beispiel 4.12 Symmetrie der trigonometrischen Funktionen U4P0S2

Benutze den Einheitskreis:

a) Sind die trigonometrischen Funktionen periodisch. Warum? Was ist ihre Periode?

b) Haben die trigonometrischen Funktionen Symmetrien. Welche? Warum? Betrachten (zeichen) Sie dafür $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ in der Umgebung von $\alpha = 0$.



Beispiel 4.13 Symmetrien **MZ2D7Y**

Bestimme die Symmetrien der folgenden Funktionen

a) $f(x) = \sin(x^2)$

b) $f(x) = \big(\sin(x)\big)^2$

c) $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big)$

d) $f(x) = \cos(x - 6\pi)$

e) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

f) $f(x) = x \cdot \cos(x)$

g) $f(x) = (1 + x^2) \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1-x}$

i) $f(x) = \sin(-x)$

j) $f(x) = \cos(-x)$

Beispiel 4.14 Symmetrien **PA3E8Z**

Wir betrachten die symmetrischen Funktionen $g(x), h(x)$ und die antisymmetrischen Funktionen $u(x), v(x)$. Bestimme die Symmetrien der folgenden Funktionen

a) $f(x) = u(x) + v(x)$

b) $f(x) = u(x) - v(x)$

c) $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

d) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

e) $f(x) = g(x) + h(x)$

f) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

g) $f(x) = g(x) + u(x)$

h) $f(x) = g(x) \cdot u(x)$

4.3 Transformationen von Funktionen

Satz Transformationen

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kann wie folgt transformiert werden:

- $-f(x)$ Spiegelung an der x-Achse
- $f(-x)$ Spiegelung an der y-Achse
- $f(x) + c$ Verschiebung in Richtung der y-Achse ($c > 0$)
- $f(x - c)$ Verschiebung in Richtung der **positiven** x-Achse ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Stauchung in Richtung der x-Achse ($a > 1$).
- $a \cdot f(x)$ Streckung in Richtung der y-Achse ($a > 1$).

Die Transformationen entlang der y-Achse sind intuitiv, die entlang der x-Achse gehen oft gegen unsere Intuition.

Infobox Folgerungen Transformationen

- $f(x) - c$ Verschiebung der y-Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(x + c)$ Verschiebung der x-Achse entgegengesetzt ($c > 0$)
- $f(a \cdot x)$ Streckung in Richtung der x-Achse ($0 < a < 1$).
- $a \cdot f(x)$ Stauchung in Richtung der y-Achse ($0 < a < 1$).

Beispiel 4.15 Transformationen mit Geogebra **G3226M**

Betrachten Sie das File auf `https://www.geogebra.org/m/nmkfm3v4`.

a) Probieren Sie zunächst alle Knöpfe ($f(x) = x^2,\ f(x) = x,\ \ldots$ und Schieberegler A-D aus. Beobachten Sie, was sich dabei verändert.

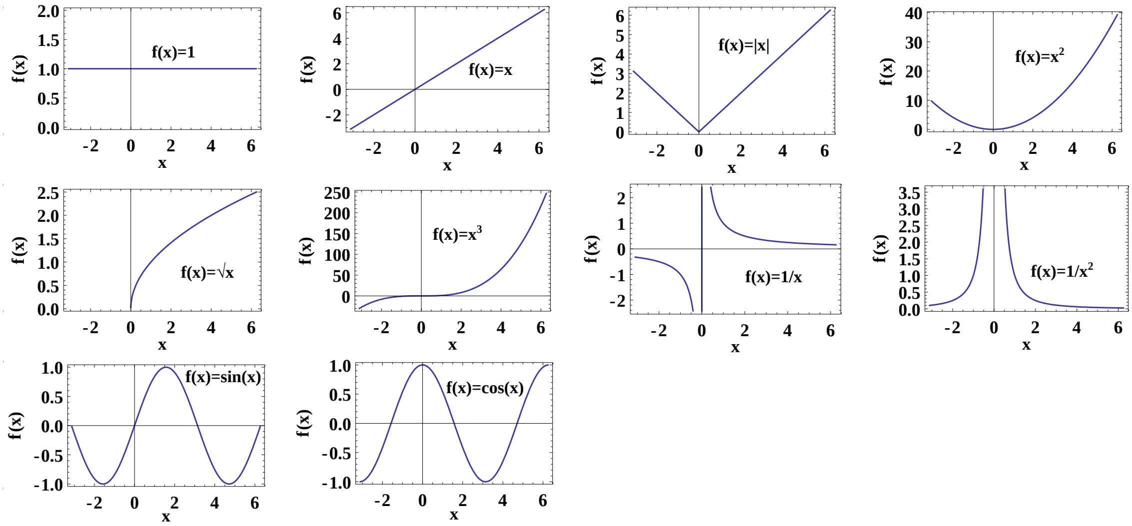
b) Wählen Sie jetzt $f(x) = x^2$ aus, verändern Sie die Schieberegler bis die Funktion $f(x) = 1 \cdot (1x)^2 + 2$ erscheint. Was passiert mit dem Graphen, wenn Sie den Regler B verschieben? Was passiert mit dem Ausdruck $f(x) = 1 \cdot (1x)^2 + 2$? Welchen Zusammenhang erkennen Sie?

c) Wählen Sie jetzt $f(x) = \sin(x)$ aus, verändern die Schiebereglern bis die Funktion $f(x) = 1 \cdot \sin(1x)$ erscheint. Was passiert mit dem Graphen, wenn Sie den Regler A verschieben? Was passiert mit dem Ausdruck $f(x) = 1 \cdot \sin(1x)$? Welchen Zusammenhang erkennen Sie?

d) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Satz 'Transformationen' (unten). Finden Sie dort Ihre Resultate aus b) und c)?

e) Welchen Regler benutzen Sie für die Verschiebung in Richtung x-Achse?

f) Welchen Regler benutzen Sie für die Stauchung in Richtung der x-Achse?



Die zehn Graphen oben zeigen die häufigsten Funktionen in der Algebra. Sie sollten schon mit den Charakteristiken dieser Graphen vertraut sein. Das wird Ihnen helfen, die Graphen der etwas komplizierteren Funktionen, die aus den einfachen Funktionen durch Transformation hervorgehen, besser zu verstehen.

Beispiel 4.16 Horizontale Verschiebung: Parabel **2RSKP9**

Wir betrachten die Parabel $f(x) = x^2$. Sie hat bei $(x, y) = (0, 0)$ einen Scheitelpunkt.

a) Ergänzen Sie die Tabelle.

b) Skizzieren Sie unten die Graphen.

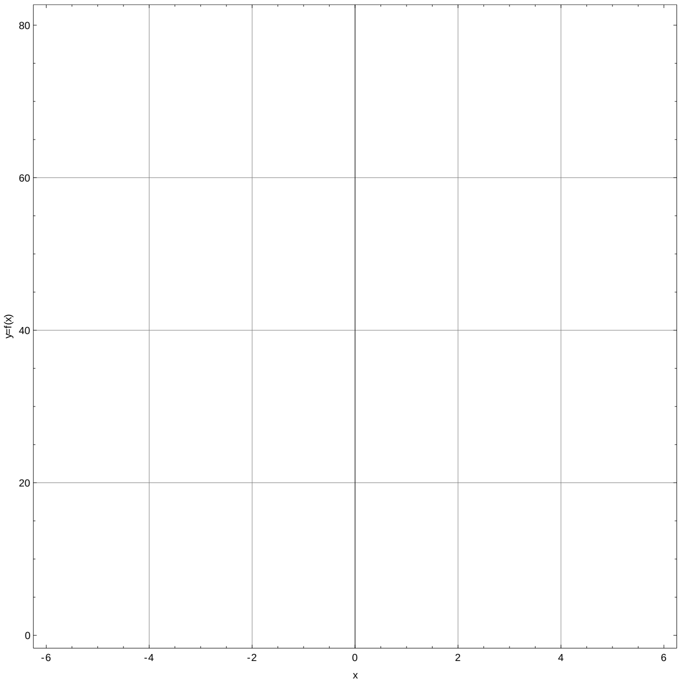
c) Wo befindet sich der Scheitelpunkt bei der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$?

d) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = (x - c)^2$ ihren Scheitelpunkt? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Verschiebung in Richtung ...'.

e) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- "Wenn ich bei $g(x) = f(x + 3)$ für x den Wert -3 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert $\ldots$ einsetze."
- "Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x + 3)$ jetzt bei -3 so, wie ursprüngliche Funktion bei $\ldots$ war."

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = f(x+3) = (x+3)^2$	$h(x) = f(x-2) = (x-2)^2$
-4	16	1	
-3	9	0	
-2	4	1	
-1	1	4	
0	0	9	
1	1	16	
2	4	25	
3	9	36	
4	16	49	



Beispiel 4.17 Streckung und Stauchung **ZC38E4**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$. Sie hat bei $x = \pi \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) Nullstellen, bei $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ Tiefpunkte und bei $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ Hochpunkte.

a) Ergänzen Sie die Tabelle (maximal 3 Stellen). Nutzen Sie auch Symmetrien der Funktionien aus.

b) Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ hat ihre charakteristische Nullstelle bei $x = \pi$. Welches Kriterium muss der Ausdruck im Argument der Sinusfunktion von $g(x) = \sin(2x)$ erfüllen, damit $g(x) = 0$?

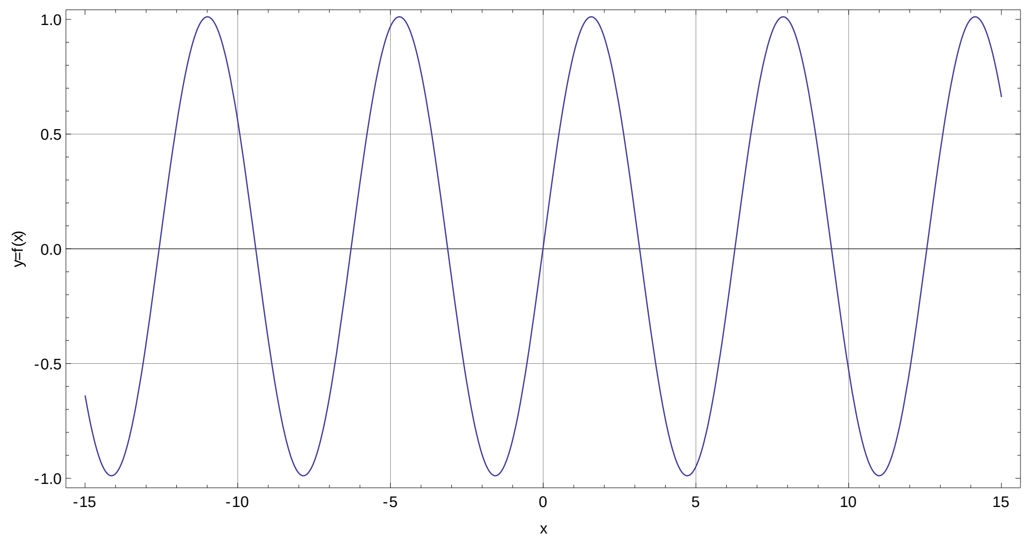
c) Bestimmen Sie die erste Nullstelle $x > 0$ der Funktionen $h(x)$ und $p(x)$. Vergleichen Sie die gefundenen Nullstellen mit der der ursprünglichen Funktion $f(x) = \sin(x)$.

d) Wurden die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ entlang der x-Achse zusammengestaucht oder gestreckt? Argumentieren Sie mit Hilfe der ersten Nullstelle und der Tabelle.

e) Skizzieren Sie nun die Graphen der Funktion $h(x)$, $g(x)$ und $p(x)$.

f) Versuchen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben zu verallgemeinern: Wo hat die Funktion $f(x) = \sin(x\omega)$ ihre erste Nullstelle $x > 0$? Benutzen Sie dazu auch die Ausdrücke 'Streckung des Graphen in Richtung …' .

x	$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \sin(2x)$	$h(x) = \sin(\frac{1}{4}x)$	$p(x) = \sin(\frac{2\pi}{5} \cdot x)$
-4π	0	0		
-10	0.544	-0.913		
-2π	0	0		
-5	0.959	0.544		
$-\pi$	0	0		
0	0	0	0	0
π	0	0	0.707107	-0.722
5	-0.959	-0.544		
2π	0	0		0.999
10	-0.544	0.913		
4π	0	0		



4.3.1 Weitere Aufgaben

Beispiel 4.18 Translationen **DG6A5Y**

Wir betrachten die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$. Sie ist definiert, falls das Argument (hier x) im Intervall $[0; \infty[$ liegt.

a) In der Funktion $r(x) = f(x-3) = \sqrt{x-3}$ können wir $x = 3$ einsetzen und erhalten

$$r(3) = f(3-3) = \sqrt{3-3} = \sqrt{0} = 0$$

Also ist $x = 3$ die Stelle, die den Definitionsbereich nach unten begrenzt. Geben Sie die untere Grenze des Definitionsbereichs der folgenden Funktionen an:

$$g(x) = f(x-5) = \sqrt{x-5},\ h(x) = f(x+14) = \sqrt{x+14}$$

$$k(x) = f(x-10) + 2 = \sqrt{x-10} + 2,\ p(x) = f(x+\frac{1}{4}) - 3 = \sqrt{x+\frac{1}{4}} - 3$$

b) Ergänzen Sie folgende Sätze:

- “Wenn ich bei $g(x) = f(x-5)$ für x den Wert 5 einsetze, dann ist es genauso, wie wenn ich bei $f(x)$ für x den Wert ... einsetze.”
- “Also ist die verschobene Funktion $g(x) = f(x-5)$ jetzt bei 5 so, wie ursprüngliche Funktion bei ... war.”

Schreiben Sie die obigen Sätze auch allgemein für die Funktion $f(x-c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ auf.

c) Zeichnen Sie die Graphen von $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $p(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie ebenfalls den Vektor ein um den die Funktion $f(x)$ jeweils verschoben wurde, um $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ oder $p(x)$ zu erhalten.

d) Ergänzen Sie nun folgenden Satz: “Die Transformation $f(x-c)+d$ verschiebt die Funktion $f(x)$ ...”

Beispiel 4.19 Spiegelung **82Q57Q**

Wir betrachten die Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$.

a) Ergänzen Sie die Tabelle

b) Geben Sie für alle Funktionen die Stelle an, wo der Ausdruck unter der Wurzel 0 ist. In welche Richtung auf der x-Achse dürfen Sie sich von dieser Stelle aus bewegen, damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv wird?

c) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen an.

d) Beschreiben Sie die Zeilen 3 und 5 in Worten: Was sind ihre Ähnlichkeiten? Worin unterscheiden Sie sich?

e) Erklären Sie nun die Ähnlichkeiten und Unterschiede (Zeilen 3 und 5) aufgrund der Werte in den Zeilen 2 und 4.

f) Plotten Sie nun die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$ mit Matlab oder GeoGebra.

g) Wie verändern sich die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ und $h(x) = \sqrt{-x-2}$, falls Sie anstatt $f(x)$ die Funktion $-f(x)$ etc. plotten?

h) Vervollständigen Sie nun folgende Sätze: "Der Graph der Funktion $y = f(-x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$."
"Der Graph der Funktion $y = -f(x)$ ergibt sich durch ... des Graphen $f(x)$."

x	-18	-11	-6	-3	-2	2	3	6	11	18
$x-2$	-20	-13	-8	-5	-4	0	1	4	9	16
$g(x)=\sqrt{x-2}$										
$-x-2$	16	9	4	1	0	-4	-5	-8	-13	-20
$h(x)=\sqrt{-x-2}$										

Beispiel 4.20 Spiegelung **879G1J**

Wir betrachten die Funktion $g(x) = 1 - 2x + x^2 + x^3$. Bestimmen Sie

a) die Funktion $h(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der x-Achse ist.

b) die Funktion $p(x)$, die eine Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der y-Achse ist.

c) Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie alle drei Funktionen in Matlab oder GeoGebra im Bereich $x \in [-2.2; 2.2]$ plotten.

4.4 Arkus-Funktionen

Beispiel 4.21 Arkustangens-Funktion **T4712W**

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.73 \end{pmatrix},\ \vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.73 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.73 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.73 \end{pmatrix}$$

a) Skizzieren Sie die Lage der Vektoren im Koordinatensystem. Berechnen Sie den Winkel zwischen der $x-$-Achse den Vektoren.

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen der $x-$-Achse den Vektoren. Benutzen Sie dafür die Arkustangens-Funktion.

Definition Arkustangens-Funktion

Die Arkustangens-Funktion ordnet den Komponenten $x > 0$ und y den Winkel φ zu. Für $x \in \mathbb{R}$ benutzen wir:

$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 180° & x < 0 \end{cases}$$

Dabei sind x, $y \in \mathbb{R}$

Wir nennen die Komponenten $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ auch **Kartesische Koordinaten**. Für jeden Vektor können wir daraus Betrag und φ (den Winkel, den $\vec{v}$ mit der x-Achse einschliesst) berechnen. Das Paar v und φ bestimmt einen Vektor eindeutig. Wir nennen dieses Zahlenpaar die **Polar-Koordinaten** des Vektors $\vec{v}$.

Beispiel 4.22 Kartesische- $\rightarrow$ Polar-Koordinaten **R3601V**

Berechnen Sie die Polarkoordinaten

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7.96956 \\ -0.697246 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Infobox Inverse trigonometrische Funktionen

- Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ wird berechnet über

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \odot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$

  Dabei erhalten wir korrekterweise einen Winkel $0 \leq \varphi < 180°$ zwischen den Vektoren, und es wird korrekterweise kein Drehsinn berücksichtigt.

Beispiel 4.23 Neigungswinkel **084725**

Berechne den Neigungswinkel für ein Gelände mit 5%, 50%, 100% und 200% Neigung.

Periodische Schwingungen

Lernziele Periodische Schwingungen

- Sie kennen die allgemeine Sinusfunktion und deren charakteristische Grössen wie Nullphasenwinkel, Periode und Amplitude.
- Sie kennen die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen.
- Sie können gleichfrequente Schwingungen zu *einer* Sinusschwingung addieren.
- Sie können eine Sinusschwingung mit Phasenwinkel zerlegen in reine $\sin$- und $\cos$-Schwingungen ohne Nullphasenwinkel

4.5 Die allgemeine Sinusfunktion; Phase und Amplitude

Infobox Eigenschaften der allgemeinen Sinusfunktion

Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin\big(\omega \cdot (t + c)\big)$$

hat

- A die Amplitude,
- die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- die charakteristische Nullstelle bei $-c$

Der Nullphasenwinkel ist $\varphi = c \cdot \omega$.
Die Funktion

$$f(t) = A \cdot \sin\big(\omega \cdot t + \varphi\big)$$

hat

- die Amplitude A ,
- die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- und den Nullphasenwinkel φ

Die charakteristische Nullstelle liegt bei $-\frac{\varphi}{\omega}$.

Beispiel 4.24 Charakteristische Grössen einer harmonischen Schwingung
IMSGR1

$$f(t) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - \frac{1}{2})\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi t}{5}t - \frac{\pi}{5}\right)$$

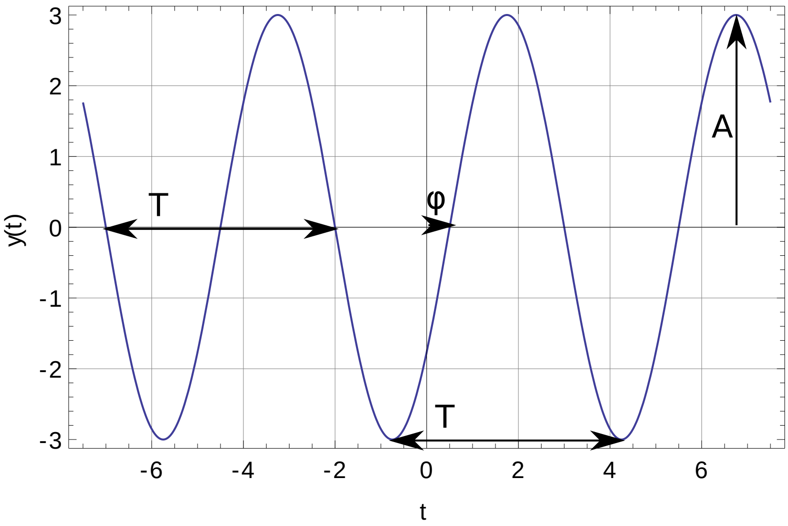
a) Geben Sie für $f(t)$ den Nullphasenwinkel φ, die Amplitude A und die Periode T an.

b) Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der Funktionen.

c) Wo erscheinen die Charakteristischen Grössen im Graphen?

Lösung:

- die Amplitude $A = 3$,
- $\omega = \frac{2\pi}{5}$ und die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 5$,
- die charakteristische Nullstelle bei $\frac{1}{2}$,
- und den Nullphasenwinkel $-\frac{\pi}{5}$).



Beispiel 4.25 Charakteristische Grössen einer harmonischen Schwingung
IMSGR1

$$f(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{3} - \frac{4\pi}{15}\right)$$

a) Geben Sie für $f(t)$ den Nullphasenwinkel φ, die Amplitude A und die Periode T an.

b) Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der Funktionen.

c) Wo erscheinen die Charakteristischen Grössen im Graphen?

Beispiel 4.26 Trigonometrische Funktionen zeichnen **4HG9L9**

Zeichnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel den Graphen der folgenden Funktionen. Zeichnen Sie für jeden Graph den Nullphasenwinkel φ, Amplitude A und Periode T ein.

a) $f(x) = 2\sin(x)$

b) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $f(x) = \cos(-x) - 2$

f) $f(x) = \sin(x - \pi/2)$

g) $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$

h) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{4}\right)$

i) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$

j) $f(x) = 5\cos\left(\frac{\pi x}{2} - 2\right)$

k) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{5} + 3\right) - 2$

l) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{3} - 1\right)$

Beispiel 4.27 Additonstheoreme Vorbereitung ECQ2MU

a) Wie hängen $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ und $\sin(\alpha)$ zusammen?

b) Wie hängen $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ und $\cos(\alpha)$ zusammen?

4.6 Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

Satz Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \end{aligned}$$

Es ist eine Kurzschreibweise, wenn wir $\pm$ verwenden. Gemeint ist, dass $\pm$ entweder alle oberen Zeichen ausgelsen werden, oder nur die unteren.

Beispiel 4.28 Additonstheoreme Vorbereitung EBP1NU

Argumentieren Sie anhand eines Zeigers am Einheitskreis

a) Berechnen Sie für $\alpha = \frac{\pi}{18}$ die Werte

$$\sin(\alpha),\ \cos(\alpha),\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}),\ \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}),\ \sin(-\alpha),\ \cos(-\alpha)$$

Welche Zusammenhänge erkennen Sie?

b) Wie lässt sich aus $\sin(-\alpha)$ das Vorzeichen aus dem trigonometrischen Ausdruck beseitigen?

c) Wie lässt sich aus $\cos(-\alpha)$ das Vorzeichen aus dem trigonometrischen Ausdruck beseitigen?

d) Vereinfachen Sie $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$

Beispiel 4.29 Additionstheorem $\sin(\alpha + \gamma)$ 8FY7QU

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha)$$

a) Setzen Sie in den Ausdruck den Winkel $\gamma = \beta + \frac{\pi}{2}$ ein.

b) Benutzen Sie $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ und $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ um die Summen von Winkeln in den einfachen trigonometrischen Funktionen zu beseitigen.

c) Beseitigen Sie Summen von Winkeln in den einfachen trigonometrischen Funktionen.

d) Ersetzen Sie im letzten Ausdruck $\alpha+\beta$ durch $\alpha-\beta$ und beseitigen sie negative

Winkel in den einfachen trigonometrischen Ausdrücken.

Beispiel 4.30 Darstellung $\cos^2(\alpha)$ **AT9S8M**

Zeigen Sie, dass gilt

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha) + 1\right]$$

Werten Sie dazu

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

für $\beta = \alpha$ aus.

4.7 Zerlegung und Überlagerungen von Schwingungen

Kosinus

Satz Zerlegung der Kosinus-Schwingungen

Die Funktion $f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ kann geschrieben werden als

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

mit $a = A \cdot \cos(\varphi)$ und $b = -A \cdot \sin(\varphi)$.

Beispiel 4.31 Zerlegung der Cosinus-Schwingungen **NFCHGJ**

Gegeben $f(t) = \sqrt{41} \cdot \cos(1 \cdot t - 0.674741)$ Zerlegen Sie das Signal in gleichfrequente $\cos / \sin$ Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

Beispiel 4.32 Zerlegung einer Schwingungen **DR61E5**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente Schwingungen ohne Nullphasenwinkel

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \ .$$

a) $f(t) = \sqrt{5} \cdot \cos(4t + 1.10715)$

b) $f(t) = 5 \cdot \cos(5t + \frac{\pi}{2})$

c) $f(t) = \sqrt{74} \cdot \cos(2t + 0.950547)$

Satz Überlagerung gleichfrequenter $\cos/\sin$ **Schwingungen zu** $\cos$

Für die Überlagerung

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

gilt

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit

- Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder gleichbedeutend, Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Nullphasenwinkel $\varphi = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \begin{cases} \pi & (a < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel 4.33 Überlagerung gleichfrequenter $\cos/\sin$ **Schwingungen** **IYPB5L**

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

an.

$$f(t) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \cos(t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(t)$$

Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude der Superposition.

Beispiel 4.34 Herleitung: Überlagerung gleichfrequenter $\cos$ **Schwingungen** **AZQA4M**

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

a) Wir betrachten die Schwingung oben mit $A, \omega > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie ein Additionstheorem und schreiben Sie damit $f(x)$ in der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)\ .$$

b) Berechnen Sie nun b/a.

c) Berechnen Sie nun $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Beispiel 4.35 Überlagerung gleichfrequenter $\cos/\sin$ **Schwingungen** **AU8VZS**

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

an.

a) $f(t) = 1.76336 \cdot \cos(18t) + 2.42705 \sin(18t)$

b) $f(t) = \cos(10t) + \sqrt{3} \cdot \sin(10t)$

c) $f(t) = 3.36588 \cdot \cos(7t) + 2.16121 \cdot \sin(7t)$

Sinus

Satz Zerlegung der Sinus-Schwingungen

Die Funktion $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ kann geschrieben werden als

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \; .$$

mit $a = A \cdot \sin(\varphi)$ und $b = A \cdot \cos(\varphi)$.

Beispiel 4.36 Zerlegung der Sinus-Schwingungen **Z4DX95**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente Schwingungen der Form

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t) \; .$$

a) $f(t) = \sqrt{41} \cdot \sin(1 \cdot t - 0.674741)$

b) $f(t) = \sqrt{5} \cdot \sin(4t + 1.10715)$

c) $f(t) = 5 \cdot \sin(5t + \frac{\pi}{2})$

d) $f(t) = \sqrt{74} \cdot \sin(2t + 0.950547)$

Satz Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen

Für die Überlagerung

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

gilt

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit

- Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder gleichbedeutend, Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Nullphasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \begin{cases} \pi & (b < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel 4.37 Überlagerung gleichfrequenter $\cos$ / $\sin$ Schwingungen SXWHB9

Geben Sie die Superposition in der Form

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

an.

a) $f(t) = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(7t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(7t)$

b) $f(t) = 1.76336 \cdot \cos(18t) + 2.42705 \sin(18t)$

c) $f(t) = \cos(10t) + \sqrt{3} \cdot \sin(10t)$

d) $f(t) = 3.36588 \cdot \cos(7t) + 2.16121 \cdot \sin(7t)$

4.8 Übungen

Beispiel 4.38 Phasenwinkel beim Sinus QSB28F

Allgemein gilt $A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

a) Für $A = 10$ und $\varphi = 2$ berechne a und b

b) Berechne nun allgemein für A und φ die entsprechenden Amplituden a und b.

Beispiel 4.39 Phasenwinkel beim Cosinus und beim Sinus R2KFYJ

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $A\cos(\omega t + \varphi)$

a) $1.36079 \cos(t\omega) - 2.67362 \sin(t\omega)$

b) $-1.13601 \cos(t\omega) - 4.86924 \sin(t\omega)$

c) $-9.36457 \cos(t\omega) + 3.50783 \sin(t\omega)$

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $A\sin(\omega t + \varphi)$

d) $0.850987 \sin(t\omega) - 2.87677 \cos(t\omega)$

e) $-8.49737 \sin(t\omega) - 9.83843 \cos(t\omega)$

f) $30.0068 \cos(t\omega) - 13.7328 \sin(t\omega)$

Beispiel 4.40 Phasenwinkel beim Cosinus und beim Sinus TEA3WI

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $a\cos(t\omega) + b\sin(t\omega)$

a) $8.544\cos(\omega t-1.21203)$

b) $5.83095\cos(\omega t+5.25281)$

c) $2.82843\cos(\omega t+5.49779)$

d) $12.0416\cos(\omega t-0.844154)$

e) $10.6301\sin(\omega t+5.56436)$

f) $2.82843\sin(\omega t-0.785398)$

g) $9.21954\sin(\omega t-0.86217)$

h) $9.43398\sin(\omega t+5.27099)$

KAPITEL 5

Skalarprodukt

Lernziele Skalarprodukt, Projektion, Spiegelung, Basis

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ Wenn nicht anders deklariert beziehen sich die Lernziele auf eine rechtshändige Orthogonalbasis.

- Die Studierenden können das Skalarprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ berechnen.
- Sie wissen, dass das Skarprodukts kommutativ, distributiv und assoziativ ist.
- Sie können Projektion und Lot von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{b}$ berechnen.
- Sie können die Spiegelung von $\vec{a}$ an der Geraden mit Richtungsvektor $\vec{b}$ berechnen.
- Sie kennen die Begriffe ‘Basis’, ‘Komponente in einer Basis’, ‘Orthogonal-Basis’
- Sie können Komponenten eines Vektors in einer Ortogonalbasis berechnen (Basistransformation).

5.1 Berechnung des Skalarprodukt in einer Orthogonalbasis

Definition Skalarprodukt

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel φ einschliessen, ist das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos(\varphi)$$

[Papula, 2009, Bd. 1 II 2.3]

Satz Skalarprodukt für Vektoren in Komponenten-Schreibweise einer Orthonormalbasis

Das Skalarprodukt in einer Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^N$ ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_N b_N$$

Wie Abschnitt 5.4 zeigen wird, handelt es sich hier nicht um eine Definition sondern bereits um das Resultat einer Herleitung.

Beispiel 5.1 In einer Orthonormalbasis **6PUK6M**

Berechnen Sie die Skalarprodukte

a) $\vec{c} \odot \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e} \odot \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 5.2 In einer Orthonormalbasis **M6C2WL**

Berechnen Sie die Skalarprodukte

a) $\vec{c} \odot \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e} \odot \vec{f} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Was können wir anhand dieser Resultate über den Winkel zwischen den

Vektoren φ sagen?

Mit dem Satz 5.1 können wir Winkel zwischen Vektoren berechnen. Die Definition des Skalarprodukts aufgelöst nach dem Winkel gibt

$$\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\|a\| \cdot \|b\|} = \cos(\varphi)$$

oder sogar

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\|a\| \cdot \|b\|}\right) .$$

Anderseits wissen wir nun wie wir das Skalarprodukt und die Längen der Vektoren berechnen. Beachte, dass der Ausdruck $\frac{\vec{a}\odot\vec{b}}{\|a\|\cdot\|b\|}$ gemäss der Schwarz'schen Ungleichung (Satz 5.4) im Bereich $[-1; 1]$ liegt und dass deshalb der Winkel stets eindeutig definiert ist.

Beispiel 5.3 Berechne das Skalarprodukt und den Zwischenwinkel **600065**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Infobox Cos/ArcCos

Bei der Berechnung des Zwischenwinkels mit Hilfe des Skalarprodukts und $\arccos$ entstehen **keine** Probleme. Oder auch:
Wenn wir Zwischenwinkel mit Hilfe des Skalarprodukts und $\arccos$ berechnen, wird immer ein Winkel $0 < \varphi < 180°$ berechnet.

Beispiel 5.4 Berechne alle Skalarprodukte und die Zwischenwinkel **599954**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.5 Skalarprodukt, Orthogonalität **891584**

Bestimme die Vektoren in der Liste, die zu $\vec{v}$ *orthogonal* sind.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 263 \\ -35 \\ -44 \end{pmatrix} , \vec{b} = \begin{pmatrix} -121 \\ 15 \\ -48 \end{pmatrix} , \vec{c} = \begin{pmatrix} 71 \\ 5 \\ -48 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.6 Winkel zwischen Vektoren 520784

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1351 \\ 362 \end{pmatrix}$$

d)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.1.1 Norm und Normierung

Beispiel 5.7 Berechne die Norm 3J47VL

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $2 \cdot \vec{a}$

c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $10 \cdot \vec{b}$

e) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$

f) $\frac{1}{5} \cdot \vec{c}$

g) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

h) $\frac{1}{9} \cdot \vec{d}$

i) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$

j) $(-1) \cdot \vec{u}$

k) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

l) $\frac{1}{11} \cdot \vec{v}$

Definition Normierter Vektor

Der Vektor $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ hat die Länge 1 und heisst deshalb **normiert**.
Achtung: Den Vektor mit $\|\vec{a}\| = 0$ kann man nicht normieren.

Beispiel 5.8 Normierung 503757

Normiere den Vektor. Zeige dann, dass der normierte Vektor die Länge 1 hat.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.9 Normierung 492646

Normiere die Vektoren. Zeige dann, dass der normierte Vektor die Länge 1 hat.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -20 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Die Norm oben heisst in der Fachsprache 'karthesische Norm'. Es gibt aber andere Möglichkeiten eine Norm festzulegen — siehe Beispiel 5.11.
Aus der Definition folgt ausserdem

$$\vec{a} \odot \vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \|\vec{a}\|^2$$

oder also

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \odot \vec{a}}$$

Alle Normen erfüllt folgende Eigenschaften.

Definition Definition und Eigenschaften der Norm

Die Norm ist für alle Elemente der Grundmenge definiert und es gilt:

- $\left\|\vec{0}\right\| = 0$
- $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Beispiel 5.10 Eigenschaften der Norm **CESMGH**

Wir wollen die Norm des Vektors $\vec{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen. Welches ist ein korrekter Ausdruck für $\|\vec{a}\|$? Mehrere Antworten möglich.

a) $\|\vec{a}\| = \frac{1}{5}$

b) $\|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}$

d) $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$

e) $\|\vec{a}\| = \frac{1}{5} \cdot \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$

f) $\|\vec{a}\| = 5$

Beispiel 5.11 Eine Norm? **SR0OVS**

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Funktionen um Normen handelt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Hinweise:
Allgemeine Gesetze für den Betrag der Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\max\{|\lambda \cdot x_1|, |\lambda \cdot x_2|\} = |\lambda| \cdot \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

A) $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$

B) $\|\vec{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

C) $\|\vec{x}\| = x_1$

D) $\|\vec{x}\| = |x_1|$

E) $\|\vec{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$

F) $\|\vec{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 - (x_2)^2}$

G) $\|\vec{x}\| = \min\{|x_1|, |x_2|\}$

Beispiel 5.12 Richtung und Länge **TVJ58M**

Geben sie die kartesischen Koordinten des folgenden Vektors an:
$\vec{a}$ hat Länge 7 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Beispiel 5.13 Richtung und Länge **SWI49N**

Geben sie die kartesischen Koordinten der folgenden Vektoren an:

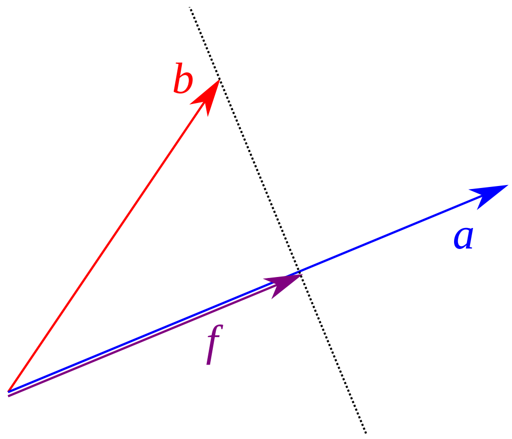
a) $\vec{a}$ hat Länge 10 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 8 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b}$ hat Länge 5 und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} -33 \\ 56 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c}$ hat Länge λ und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 9 \\ 40 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d}$ hat Länge ν und zeigt in die Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

5.2 Orthogonale Projektion und Lot



Satz Projektion und Lot

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren. Der Vektor $\vec{b}$ lässt sich eindeutig als $\vec{b} = \vec{f} + \vec{h}$ schreiben, wobei $\vec{f}$ parallel zu $\vec{a}$ steht und $\vec{h}$ senkrecht zu $\vec{a}$. Dabei sind $\vec{f}$ und $\vec{h}$ eindeutig festgelegt über:

$$\vec{f} = \left(\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{und} \quad \vec{h} = \vec{b} - \vec{f}$$

Definition Projektion und Lot

$\vec{f}$ heisst die **Projektion** von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{h}$ heisst das **Lot** von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.1, p.398]
Die "Logik dahinter" ist, dass wir mit dem Ausdruck $\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ berechnen. Merke, dass die Länge des Schattens nur dann richtig berechnet wird, wenn das Skalarprodukt mit einem Vektor der Länge 1 berechnet wird — hier mit $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ — projiziert wird. Danach wird die Länge des Schattens mit einem Vektor der Länge 1 multipliziert — auch das ist $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$. Deshalb hat $\vec{f}$ genau die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und liegt auf der Geraden durch $\vec{0}$ und die Spitze von $\vec{a}$. Übrigens projiziert man schneller, wenn man oben die Faktoren etwas umordnet:

$$\vec{f} = \frac{\vec{b} \odot \vec{a}}{\vec{a} \odot \vec{a}} \cdot \vec{a}\,.$$

und das Vorzeichen bei der Bestimmung von $\vec{h}$ kann sich durch den Ausdruck $\vec{f} + \vec{h} = \vec{b}$ merken.

Beispiel 5.14 Zerlege $\vec{b}$ in Projektion und Lot bezüglich $\vec{a}$ **251965**

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.15 Schatten, spitzer/stumpfer Zwischenwinkel **QHZIHW**

Berechnen Sie die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und geben Sie an, ob der Zwischenwinkel $0° < \varphi \leq 90°$ oder $90° < \varphi \leq 180°$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6.84 \\ 5.12 \end{pmatrix}$

Beispiel 5.16 Schatten als Vektor **JBARLL**

Geben Sie den Schatten von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ als Vektor an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6.84 \\ 5.12 \end{pmatrix}$

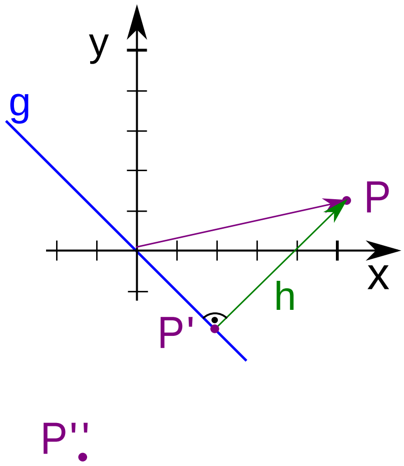
Beispiel 5.17 Geometrie am Dreieck **713581**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Berechne für das Dreieck ABC die Koordinaten des Fusspunktes $\vec{F_C}$ und den Höhenvektor h_C. Siehe auch Skizze Abbildung 5.3.

5.3 Spiegelung und Projektionen

Beispiel 5.18 Spiegelung an Geraden Einführung **KT558I**



$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \; \vec{h} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Die Gerade g verläuft durch den Ursprung.

a) Projizieren den Punkt $\vec{P}$ auf die Gerade g

b) Spiegeln Sie anschliessen den Punkt $\vec{P}$ an der Geraden g.

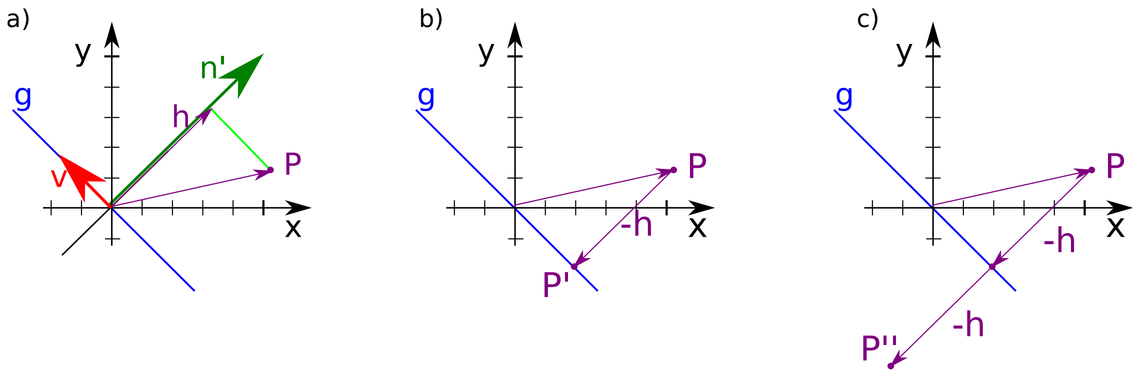


Abbildung 5.1: a) Der Ortsvektor wird auf den Normalvenvektor projiziert b) Projektion: $\vec{P} - \vec{h}$ fällt auf die Gerade c) Spiegelung: $\vec{P} - 2\vec{h}$.

Beachte, dass eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerschneidet. Die Projektion $(\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ zeigt stets in die selbe Halbebene wie $\vec{P}$, egal ob $\vec{n}'$ in der selben Halbebene liegt wie $\vec{P}$. Deshalb bringt $\vec{P} - \vec{h}$ den Punkt zurück auf die Gerade (Fig. 5.1), d.h. wir brauchen uns mit dem Vorzeichen in Gleichung 5.1 nicht zu beschäftigen.

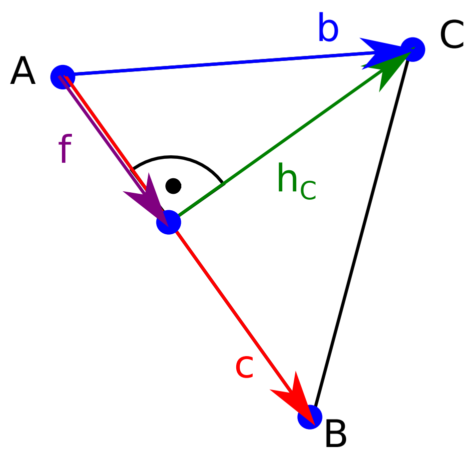


Abbildung 5.2: Zur Aufgabe 5.20

Satz Projektion und Spiegelung an einer Geraden durch $\vec{0}$

Wir projizieren $\vec{P}$ auf den Normalenvektor:

$$\vec{h} = \vec{P} \odot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{P} \odot \vec{n}}{\vec{n} \odot \vec{n}} \cdot \vec{n}$$

Dabei ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Geraden $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$.
Wir können den Punkt $\vec{P} \in \mathbb{R}^2$ auf g projizieren durch

$$\vec{P'} = \vec{P} - \vec{h} \tag{5.1}$$

oder an g spiegeln durch

$$\vec{P''} = \vec{P} - 2\vec{h} \,.$$

Beispiel 5.19 Spiegelungen und Projektionen an einer Geraden **IES6DX**

Spiegeln Sie den Punkt $\vec{P}$ an der Geraden g mit dem Richtungsvektor mit $\vec{v}$. projizieren Sie anschliessend $\vec{P}$ auf g. Alle Geraden g verlaufen durch den Ursprung.

a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 8.4 \\ 6.2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 26.85 \\ -59.23 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$

c) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 16.88 \\ 47.16 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$

d) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 120.56 \\ -33.08 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 24 \\ -7. \end{pmatrix}$

Beispiel 5.20 Geometrie am Dreieck 713581

Berechne für das Dreieck ABC die Koordinaten des Fusspunktes $\vec{F}_C$ und die Höhe h_C.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Siehe auch Skizze oben, Abbildung 5.3.

Beispiel 5.21 Lot 381963

Fällen Sie das Lot vom Punkt $\vec{C}$ auf die Gerade g und berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ zur Geraden g:

a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beispiel 5.22 Abstand, effizientes Vorgehen 797792

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ von der Geraden g:

a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beispiel 5.23 Spiegelung an Geraden durch Ursprung 659289

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g : \vec{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.24 Spiegelung 109810

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.4 Wieso funktioniert das?

Gesetze für das Skalarprodukt

Satz Gesetze für das Skalarprodukt

1. $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$
2. $(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r(\vec{b} \odot \vec{a})$
3. $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a}$
4. $\left\| \vec{a} \odot \vec{b} \right\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \left\| \vec{b} \right\|$

[Papula, 2009, Bd. 1 II 3.3] [Goebbels and Ritter, 2011, 3.1,p.394]

Für die erste Gleichung wurde verwendet, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\varphi) = \|b\| \cdot \|a\| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a}$$

Bisher haben wir ausschliesslich die abstrakte Schreibweise für Vektoren benutzt. Im Folgenden werden wir herleiten, wie man das Skalarprodukt für Vektoren in Komponenten-Schreibweise berechnet.

Beispiel 5.25 Gesetze Skalarprodukt **D9YQP1**

$$\vec{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen das Skalarprodukt für die obigen Vektoren berechnen. Welche Ausdrücke sind korrekt? Mehrere Antworten möglich.

a) $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{1}{5}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$

b) $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \odot \vec{b} = 2$

d) $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{2}{5}$

e) $\vec{a} \odot \vec{b} = \left\| \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \cos(45°)$

f) $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$

Beispiel 5.26 Rechenregeln Skalarprodukt **248034**

Es seien die Skalarprodukte

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{a} \odot \vec{c} = \vec{b} \odot \vec{c} = \frac{1}{2} \text{ und } \|\vec{a}\| = \left\| \vec{b} \right\| = \|\vec{c}\| = 1 \, .$$

Berechne

a) $\vec{b} \odot \vec{a}$

b) $\vec{a} \odot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

c) $\vec{b} \odot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

d) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \odot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

5.4.1 Basis, Komponenten

Definition Basis

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ heissen Basis des Vektorraums V, falls

- sie linear unabhängig sind
- und jeder Vektor in V als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ geschrieben werden kann.

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ heissen **Basisvektoren**.

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.12,p.433]

Definition Dimension

Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums V heisst **Dimension** von V

Definition Koordinate (Komponente)

Seien die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis eines Vektorraums und

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ \ldots \ + v_n\vec{e}_n \ ,$$

dann nennen wir $(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n)$ die **Koordinaten** von $\vec{v}$ (oder auch die **Komponenten** von $\vec{v}$).

Wir werden später zeigen, dass sich jeder Vektor in Komponenten zerlegen lässt, auch bezüglich einer Basis, die weder aus senkrechten noch normierten Basisvektoren besteht.

Beispiel 5.27 Vektor vs. Komponente 785039

Schreiben Sie die Vektoren mit den Komponenten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der Basis $1,\, t,\, t^2$ oder in der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t$, $\vec{e}_3 = t^2$

b) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t^2 - 1$, $\vec{e}_3 = t^2 - t$

d) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

e) $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = \cos(t)$, $\vec{e}_3 = \sin(t)$

Beispiel 5.28 Vektorkomponenten **128857**

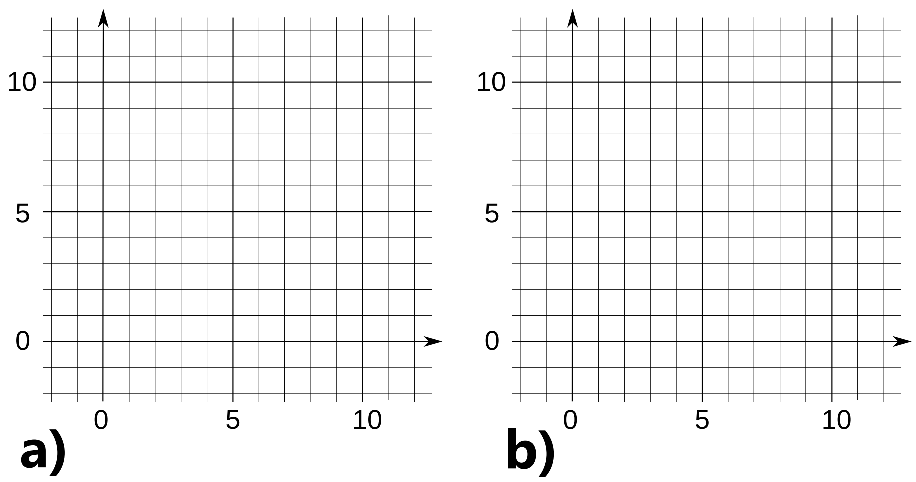
Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{U}$, $\vec{V}$ und $\vec{W}$. Die Basis-Vektoren sind

a) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Die Komponenten der Vektoren sind in jeder Basis

$$\vec{U} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \ \vec{V} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \ \vec{W} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$



Definition Orthogonal-Basis

Eine Basis $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_n$ heisst **orthogonal**, wenn die Basisvektoren rechtwinklig zu einander stehen.

Definition Normierte Basis

Eine Basis heisst **normiert**, wenn die Basisvektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_n$ die Länge 1 haben.

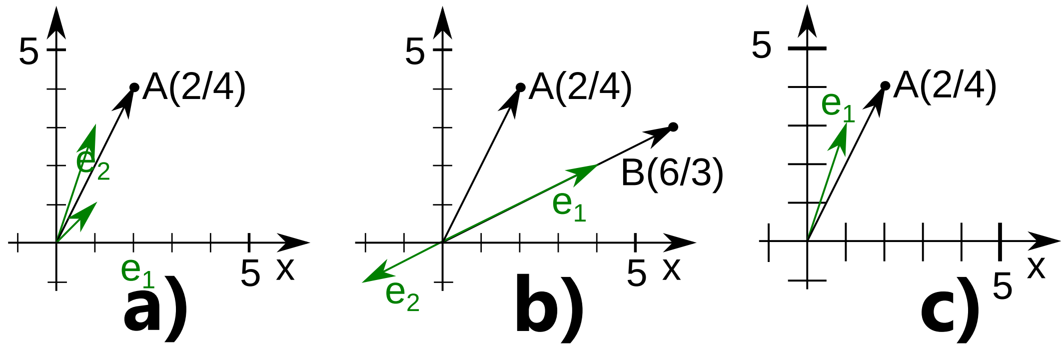


Abbildung 5.3: Die Darstellung eines Punktes in der Ebene als Summe von (zwei) Vektoren.

Definition Orthonormalbasis

Ist die Basis sowohl orthogonal wie auch normiert, heisst sie **Orthonormalbasis**.

5.4.2 Was ist eine Basis?

Infobox Basis von $\mathbb{R}^3$

Jeder Satz von 3 Vektoren (die nicht in einer Ebene liegen) ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Wir haben gesehen, dass sich jeder Punkt in der Ebene schreiben lässt als die Summe von zwei Vektoren. Wir wollen kurz analysieren, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dies möglich ist. Wählen wir $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wie in Abb. 5.3 a), ist die Zerlegung immer möglich. Im Beispiel ist $\vec{A} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Wählen wir $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wie in Abb. 5.3 b), ist die Zerlegung des Vektors $\vec{B}$ möglich — es gibt sogar mehrere Möglichkeiten für die Zerlegung. Der Vektor $\vec{A}$ hingegen kann nicht dargestellt werden! $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ liegen auf einer Geraden — sie sind kollinear — und mit einer Addition dieser Vektoren ist es nicht möglich, von dieser Geraden wegzukommen. In Abb. 5.3 c) hingegen ist nur der Vektor $\vec{e}_2$ gegeben. Er reicht nicht um die Ebene abzudecken und um den Vektor $\vec{A}$ als Linearkombination darzustellen.

Mit den Fachbegriffen ausgedrückt bedeutet dies: Für alle Situationen in Abb. 5.3 gilt, dass wir uns in der Ebene $\mathbb{R}^2$ bewegen. Sie hat zwei Dimensionen, also brauchen wir mindestens zwei Basisvektoren. Deshalb ist der Vektor in Abb. 5.3 c) keine Basis. In Abb. 5.3 b) sind die Basisvektoren linear abhängig. Deshalb bilden sie keine Basis. Nur in Abb. 5.3 a) handelt es sich um eine Basis: Wir haben zwei Basisvektoren die linear unabhängig sind.

Beispiel 5.29 Basis von $\mathbb{R}^3$ **279728**

Welches ist eine Orthogonal-Basis, welches eine Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$?

a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$

b) $\left\{\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$

c) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

d) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$

Beispiel 5.30 Basis von $\mathbb{R}^3$ **133855**

Welches ist eine Orthogonal-Basis, welches eine Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$?

a) $\left\{\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}$

b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$

c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

5.5 Geometrische Deutung der Gesetze für das Skalarprodukt

5.6 Komponenten-Schreibweise in Orthonormalbasis

Wenn wir $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Komponenten-Schreibweise als

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} ,$$

angeben, wie berechnen wir dann das Skalarprodukt $\vec{a}\odot\vec{b}$? Die meisten werden wohl antworten

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 ,$$

was zwar richtig ist, solange man mit einer Orthonormalbasis arbeitet. Für jede andere Basis ist diese Antwort aber *falsch*. Z.B. nehmen wir die Basis

$$\{\vec{f}_1,\,\vec{f}_2,\,\vec{f}_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E , \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_E , \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_E\right\} .$$

Mit dem Index E drücken wir aus, dass die Vektoren in der Standardbasis $\mathbf{E} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ gegeben sind. Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Die Basisvektoren geschrieben in dieser Basis sind

$$\vec{f}_1 = 1\cdot\vec{f}_1 + 0\cdot\vec{f}_2 + 0\cdot\vec{f}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F ,\ \vec{f}_2 = 1\cdot\vec{f}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_F ,\ \vec{f}_3 = 1\cdot\vec{f}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_F$$

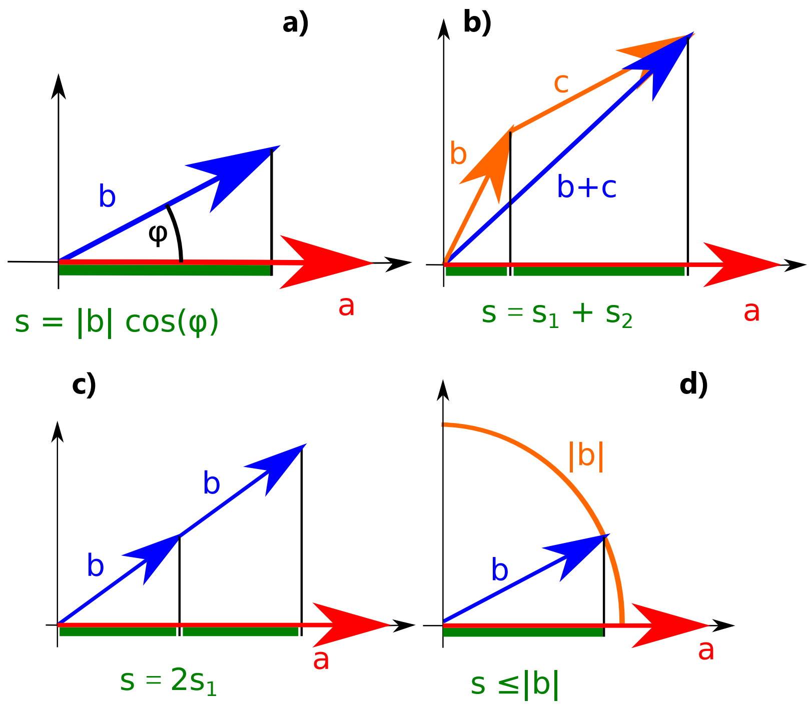


Abbildung 5.4: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Skalarprodukt folgen direkt aus geometrischen Betrachtungen.

Wenn wir hier naiv die Komponentenschreibweise für das Skalarprodukt benutzen, dann erhielten wir

$$\vec{f}_1 \odot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_F = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

Das würde ja bedeuten, dass $\vec{f}_1$ senkrecht auf $\vec{f}_2$ steht, aber das ist eben falsch. Die Basisvektoren stehen gerade nicht senkrecht aufeinander.
Wir werden deshalb hier die Berechnung des Skalarprodukts für Vektoren in Komponenten-schreibweise einer Orthonormalbasis herleiten. Für andere Basen kann das Skalarprodukt auf gleiche Weise hergeleitet werden.

Beispiel 5.31 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ für die Basisvektoren **195709**

Berechnen Sie das Skalarprodukt der Basisvektoren der Orthonormalbasis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Betrachten Sie dazu den Schatten von $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_2$, von $\vec{e}_2$ auf $\vec{e}_1$, von $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_1$, von $\vec{e}_2$ auf $\vec{e}_2$.

Beispiel 5.32 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ für beliebige Vektoren **536234**

Berechne das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Schreibe dafür die Vektoren als Summe der Basisvektoren der Orthonormalbasis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$

und wende dann die Gesetze für das Skalarprodukt (Satz 5.4) an.

KAPITEL 6

Vektorprodukt

Lernziele Vektorprodukt

Wenn nicht anders deklariert beziehen sich die Lernziele auf eine rechtshändige Orthogonalbasis.

- Die Studierenden können das Vektorprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^3$ berechnen.
- Sie wissen, dass das Vektorprodukt antikommutativ, distrubutiv und assoziativ ist.
- Sie können das Spatprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^3$ berechnen.
- Sie können das Vektorprodukt benutzen um Abstände von Punkten zu einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ zu berechnen.

Beispiel 6.1 Leseauftrag Vektorprodukt **57DXTK**

Lesen Sie im Buch "Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1" von Papula den Abschnitt 3.4. zum Vektorprodukt, d.h. die Seiten 90-96). Beantworten Sie dann folgende Fragen.

a) Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt?

b) Wie berechnet man das Vektorprodukt in einer rechtshändigen Orthonormalbasis?

Die Online-Resource zum Buch finden Sie hier
Google: E-Medien FHNW
wähle: E-Books
wähle: Springer
wähle: Technik-Informatik
suche: Papula

wähle: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1

6.1 Berechnung Vektorprodukt

Definition Vektorprodukt

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$, die den Winkel φ einschliessen, ist das **Vektorprodukt** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, mit den Eigenschaften:

- $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin(\varphi)$
- $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

[Papula, 2009, Bd. 1 II 3.4], [Goebbels and Ritter, 2011, p.401]

Wir merken uns auch: Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Infobox Praktische Berechnung des Vektorprodukts

Das Vektorprodukt von zwei Vektoren kann wie folgt berechnet werden:

- Wir schreiben die Produktvektoren auf
- Wir schreiben die ersten beiden Komponenten unten an die Vektoren hin. Wir streichen die erste Zeile.
- Wir füllen jede Zeile im Resultat, indem wir Kreuze berechnen, z.B. $a_2b_3 - a_3b_2$ für die erste Komponente. Für jede neue Komponente im Resultat rücken wir eine Zeile nach unten in den Produktvektoren.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

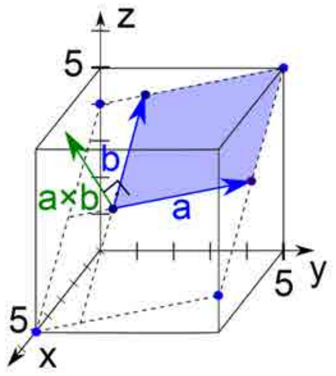
Beispiel 6.2 Vektorprodukt **306988**

Berechne das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.3 Berechne die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **519844**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Infobox "Vektorprodukt" für $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}^2$ lässt sich ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ steht schnell finden:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} .$$

Beispiel 6.4 Vektorprodukt in Orthonormalbasis **BT8J1D**

Berechnen Sie die Vektorprodukte

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{g} \times \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\vec{k} \times \vec{l} = (1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_3) \times (2 \cdot \vec{e}_3)$

f) $\vec{p} \times \vec{q} = (8 \cdot \vec{e}_1 + 9 \cdot \vec{e}_2 + 4 \cdot \vec{e}_3) \times (2 \cdot \vec{e}_2)$

Beispiel 6.5 Fläche und Vektorprodukt **68EML3**

Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = 19\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$.

e) $\vec{a} = 10\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 + 19\vec{e}_3$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Beispiel 6.6 Fläche Dreieck **62FVCH**

Berechne die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $\vec{A}, \vec{B}$ und $\vec{C}$.

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 25 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 36 \end{pmatrix}$

d) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Satz Gesetze für das Vektorprodukt

i) Betrag des Vektorprodukts: Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

iii) $\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

iv) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

v) $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|$

6.2 Herleitungen

Auch hier gehen wir axiomatisch vor, genau so wie wir es bereits beim Skalarprodukt getan haben. Welche allgmeinen Gesetzte gelten für das Vektorprodukt? Gilt das Assoziativ-Gesetz, gilt das Kommutativgesetz? Wir definieren dafür zuerst, welche Eigenschaften wir für das Vektorprodukt wünschen. Erst später kümmern wir uns darum, wie man das Vektorprodukt in einer gegebenen Basis berechnet.

Wie Abb.6.1 a) zeigt, ist der Betrag des Vektorprodukts gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Mit $\|b\| \cdot$

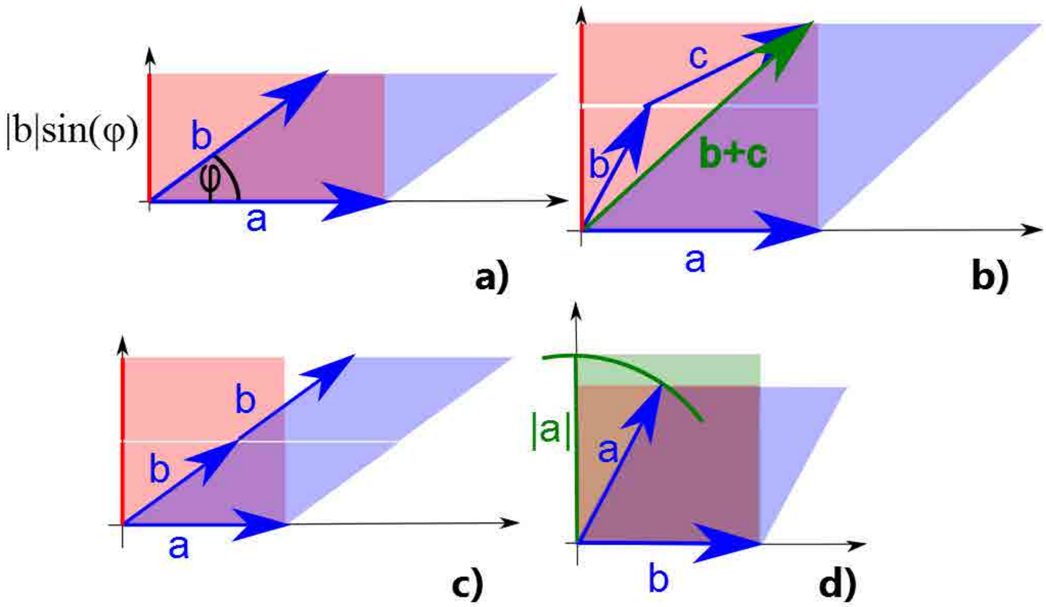


Abbildung 6.1: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Vektorprodukt folgen direkt aus geometrischen betrachtungen.

$\sin(\varphi)$ wird die Komponente (rot) von $\vec{b}$ berechnet, die senkrecht auf $\vec{a}$ steht. Wie Abb.6.1 b) zeigt, kann die Fläche des grossen blauen Parallelogramms auf zwei Arten berechnet werden: entweder direkt als $\left\|\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\right\|$ oder als Summe der kleinen roten Rechtecke, die sich zu $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|$ und $\|\vec{a}\times\vec{c}\|$ berechnen. Also muss gelten

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

Abb.6.1 c) zeigt, dass eine Streckung um den Faktor Zwei, auch zur Verdoppelung des blauen Parallelogramms — d.h. des Skalarprodukts — führt. Dies muss für alle Streckungsfaktoren gelten also folgt

$$\vec{a}\times(\lambda\cdot\vec{b}) = \lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\ .$$

Schliesslich zeigt Abb.6.1 d), dass die Fläche des blauen Parallelogramms meistens kleiner — höchstens aber gleich gross — ist, als die des Rechtecks mit dem Seitenlängen $\|a\|$ und $\|b\|$. Deshalb gilt für das Vektorprodukt

$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\ .$$

Das letzte Gesetz in 6.1 lässt sich nachvollziehen, indem Sie zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ festlegen, z.B. $\vec{a}$ nach rechts und $\vec{b}$ nach vorne. Dann zeigt $\vec{a}\times\vec{b}$ mit der Rechten-Hand-Regel nach oben und $\vec{b}\times\vec{a}$ nach unten.

6.3 Das Vektorprodukt in einer rechtshändigen Orthonormalbasis

Beispiel 6.7 Vektorprodukt für Basisvektoren **745623**

Berechne das Vektorprodukt zwischen *allen* Basisvektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis. Benutze dazu nur die Definition 6.1 des Vektorprodukts.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = ? \ \dots$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = ? \ \dots$$

Beispiel 6.8 Vektorprodukt für allgemeine Vektoren **936044**

Berechne das Vektorprodukt zwischen zwei allgemeinen Vektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis. Benutze dafür auch die Sätze 6.1. Drücke dazu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Basisvektoren aus:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Berechne dann das Vektorprodukt für die allgemeinen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
Übrigens gilt auch $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$

Der Ausdruck, der am Ende in Beispiel 6.1 entsteht lässt sich nur schwer merken. Die Infobox 6.1 zeigt ein Verfahren, wie der Ausdruck von Beispiel 6.1 ohne Auswendiglernen sondern mit einem einfachen Verfahren hingeschrieben werden kann.

Beispiel 6.9 Rechenregeln Vektorprodukt **020196**

Berechne für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die Teilresultate der ersten Teilaufgaben für die Berechnung der letzteren.

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{a} \times \vec{c}$

c) $\vec{b} \times \vec{c}$

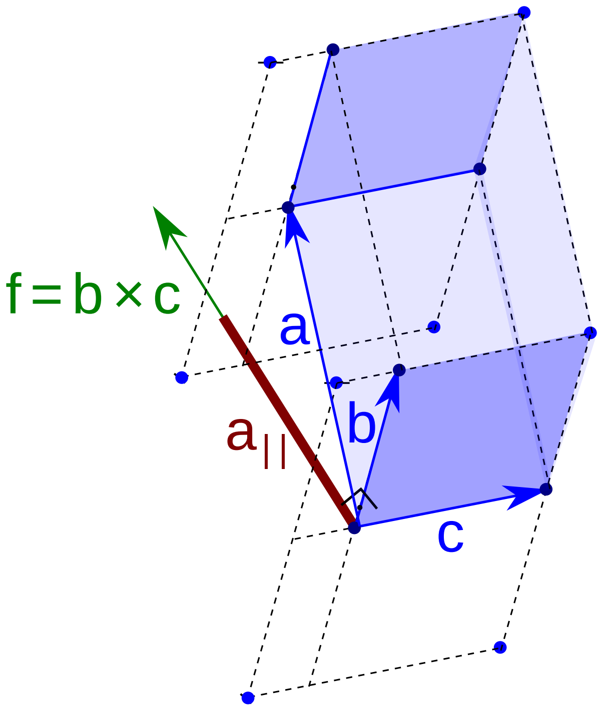
d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

e) $\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

f) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

g) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$

6.4 Spatprodukt



Beispiel 6.10 Spatprodukt Herleitung	**2W0FDK**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\vec{f} = \vec{b} \times \vec{c}$. Schreiben Sie dann $\vec{f} = F \cdot \vec{f}'$, wobei $\left\| \vec{f}' \right\| = 1$.

b) Markieren Sie in der Skizze oben F und die Richtung von $\vec{f}$.

c) Berechnen Sie nun $\vec{a} \odot \vec{f}'$. Was bedeutet das Resultat und wo markieren Sie es in der Skizze?

d) Berechen Sie $F \cdot \vec{a} \odot \vec{f}' = \vec{a} \odot (\vec{b} \times \vec{c})$. Was bedeutet das Resultat und wo markieren Sie es in der Skizze?

e) Bestimmen Sie jetzt allgmein, d.h. ohne die Komponenten festzulegen, für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$: Was bedeutet $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$?

Definition Spatprodukt

Das Parallelepiped aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nennen wir **Spat**. Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ heisst die Zahl

$$\left[\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\right] := \vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

das **Spatprodukt**.
Der Betrag des Spatprodukts ist gleich dem Volumen des Spats.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.403] [Papula, 2009, Bd. 1 II 3.5]

Satz Gesetze für das Spatprodukt

- Paarweise Vertauschung :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$$

- Zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

Wir merken uns also: Das Volumen des Spats ist unabhängig von der Reihenfolge in der $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufzählet werden. Nur das Vorzeichen kann eventuell ändern, wenn die Reihenfolge vertauscht wird.

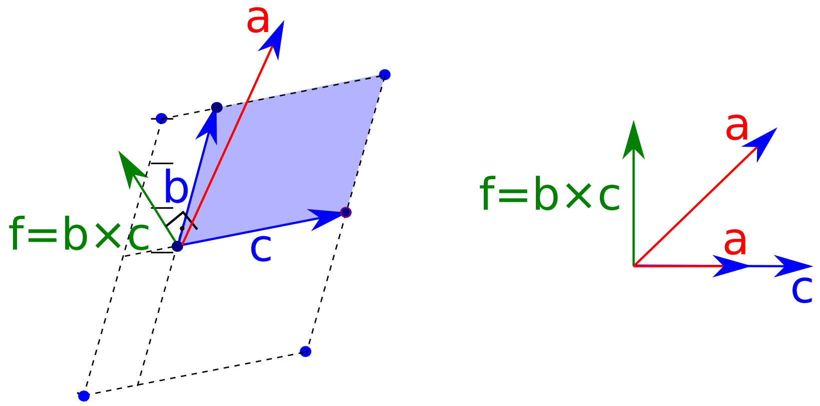
Beispiel 6.11 Berechne das Volumen des Spats aufgespannt durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ **340107**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.12 Bestimme, ob die Vektoren linear abhängig sind **451218**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Benutze dazu das Spatprodukt.



Beispiel 6.13 Spatprodukt 5AHNL8

Berechne das Volumen des Parallelepipeds aufgespannt durch die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Gibt jeweils an, ob die Vektoren linear abhängig sind.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

6.5 Abstand Punkt-Gerade

Satz Abstand Punkt Gerade

Der Abstand eines Punktes $\vec{B}$ von der Geraden $g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ ist $h = \frac{\|\vec{u}\times(\vec{B}-\vec{A})\|}{\|\vec{u}\|}$

[Papula, 2009, Bd. 1 II 4.1.3]

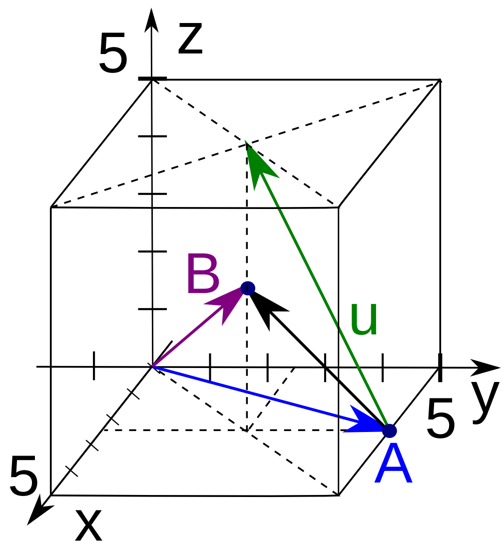
Beispiel 6.14 Abstand Punkt-Gerade DK2JYA

Wir betrachten die Gerade $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v}$ und den Punkt $\vec{B}$ ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{X} \in \mathbb{R}^3$; $\lambda \in \mathbb{R}$). Wie gross ist ihr Abstand? Berechnen Sie dazu zuerst die Fläche aufgespannt durch $\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$ und $\vec{v}$.

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

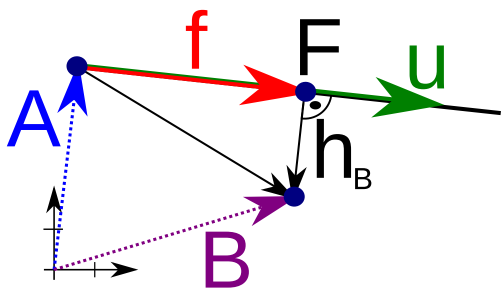
Beispiel 6.15 Abstand Punkt-Gerade im Raum 292982

Wie gross ist der Abstand zum Raum-Mittelpunkt des Würfels $5 \times 5 \times 5$?



Achtung, der Satz ist eine Eigenheit von $\mathbb{R}^3$. Er basiert darauf, dass in $\mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt existiert. In $\mathbb{R}^N$ mit $N > 3$ gibt es keine Vektorprodukt. Deshalb muss dort der Abstand zwischen dem Punkt $\vec{B}$ und der Geraden $g : \vec{A} + \lambda\vec{u}$ über den Fusspunkt $\vec{F} = \vec{A} + \vec{f}$ und das Lot $\vec{h}_B = \vec{B} - \vec{F}$ berechnet werden.

Beispiel 6.16 Bestimme den Fusspunkt von $\vec{B}$ auf g 14259

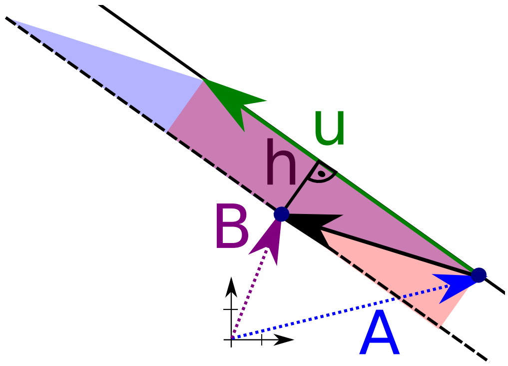


Zerlege dazu $\vec{B} - \vec{A}$ in eine Komponente $\vec{f}$ parallel (∥) und in eine Komponente $\vec{h}_B$ senkrecht (⊥) zu $\vec{u}$. Zur Kontrolle kann die Länge des Verbindungsvektors von Fusspunkt zu $\vec{B}$. Sie sollte gleich lang sein, wie der Abstand, der in der vorherigen Aufgabe berechnet wurde.

6.6 Wieso funktioniert das? (Herleitung)

Beispiel 6.17 Abstand Punkt-Gerade im Raum 094524

Berechne den Abstand eines Punktes $\vec{B}$ zur Gerade gegeben durch $g : \vec{A} + \lambda\vec{u}$.



Drücke dazu die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{u}$ und $\vec{B}-\vec{A}$ einmal mit Hilfe des Vektorprodukts aus und einmal mit Hilfe des Abstands aus

Beispiel 6.18 Abstand Punkt-Gerade **CJ1IXZ**

Wir betrachten die Gerade $\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{v}$ und den Punkt $\vec{B}$ ($\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{X}\in\mathbb{R}^3;\ \lambda\in\mathbb{R}$). Wie gross ist ihr Abstand? Berechnen Sie dazu zuerst die Fläche aufgespannt durch $\vec{r}=\vec{B}-\vec{A}$ und $\vec{v}$.

a) $\vec{X}=\vec{A}+\lambda\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\15\end{pmatrix}$ und $\vec{B}=\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{X}=\vec{A}+\lambda\vec{v}=\begin{pmatrix}7\\7\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-12\\35\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{B}=\begin{pmatrix}7\\12\\-3\end{pmatrix}$

c) $\vec{X}=\vec{A}+\lambda\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{B}=\begin{pmatrix}0\\-2\\9\end{pmatrix}$

KAPITEL 7

Ebenen in $\mathbb{R}^3$

Lernziele Darstellung von Ebenen in $\mathbb{R}^3$

- Die Studierenden können den Abstand eines Punktes zu einer Ebene berechnen.
- Sie können eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ darstellen in
  - Parameterform
  - Koordinatenform
  - (Normalenform)*
- Sie können die Darstellungen ineinander überführen.
- Sie können aus den Darstellungen die Hesse-Normalenform berechnen.
- Sie können aus der Hesseschen Normalenform den Abstand eines Punktes zur Ebene berechnen.
- Sie können die Koeffizienten der Koordinatenform der Ebene als Normalenvektor interpretieren und kennen den Zusammenhang der Konstanten mit dem Abstand zum Ursprung des Koodinatensystems.

7.1 Abstand Punkt Ebene

Durch einen festen Punkt (den Aufpunkt) und eine gegebene Richtung (den Richtungsvektor) erhält man eine Gerade. Nimmt man einen zweiten Richtunsvektor hinzu, dann entsteht eine Ebene.

Definition Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$

Die Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

- $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ heisst **Aufpunkt** (oder Stützpfeil)
- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ heissen **Richtungsvektoren**
- $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ sind freie Parameter

Die Richtungsvektoren müssen nicht unbedingt senkrecht aufeinander stehen. Sie dürfen aber *nicht kollinear* sein.

Beispiel 7.1 Parameterdarstellung der Ebene **898246**

Die Ebene E geht durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme Parameterdarstellung der Ebene.

b) Welche Freiheiten haben wir bei dieser Darstellung?

Beispiel 7.2 Parameterdarstellung Ebene **787135**

Die Ebene E geht durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

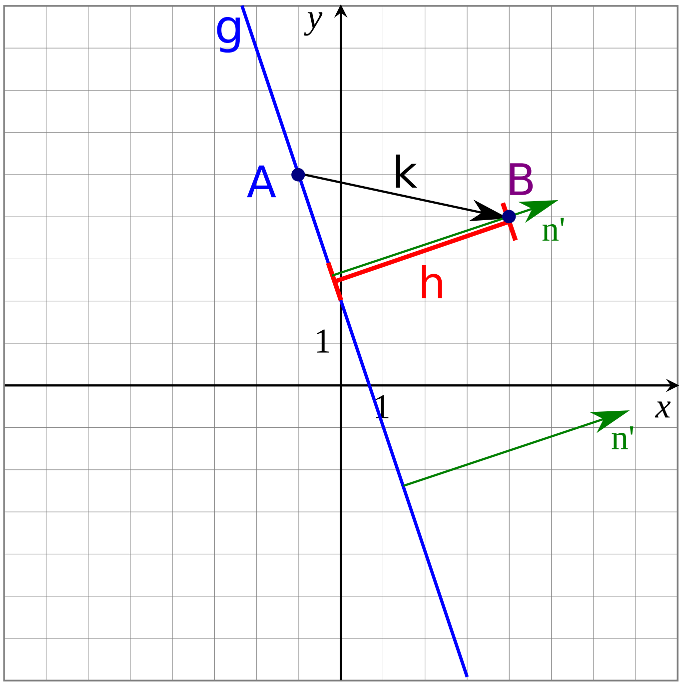
Bestimme die Parameterdarstellung der Ebene.

Beispiel 7.3 Liegen die Punkte in der Ebene E? **642893**

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -22 \\ 28 \\ -22 \end{pmatrix},\ \vec{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{S} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Beispiel 7.4 Abstand Punkt Gerade in $\mathbb{R}^2$

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{B}$ von der Geraden g



Beispiel 7.5 Abstand Punkt Gerade in $\mathbb{R}^2$ **ZIZIX3**

Die Gerade g lautet $y = -0.1 \cdot x + 5$. Wir wollen den Abstand zu Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ berechnen (ohne Vektorprodukt). Gehen Sie dafür wie folgt vor:

a) Machen Sie eine Skizze der Situation in der x-y-Ebene.

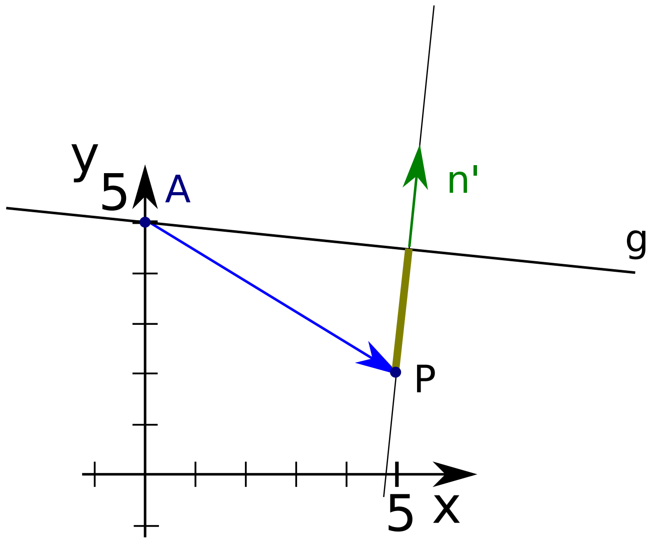
b) Geben Sie die Gerade in Parameterform an.

c) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{n}'$, der senkrecht zu g steht. Zeichnen Sie diesen Vektor ein.

d) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{w}$, der $\vec{P}$ mit der Geraden verbindet. Zeichnen Sie diesen Vektor ein.

e) Berechnen Sie die Länge des Schattens von $\vec{w}$ auf $\vec{n}'$.

f) Wie kann man nun den Abstand von $\vec{P}$ zu g berechen?.



Beispiel 7.6 Abstand Punkt Gerade in $\mathbb{R}^2$ **UE9YTP**

Berechnen Sie den Abstand der folgenden Geraden vom angegebenen Punkt.

a) $g:\ y = 0.1 \cdot x + 3$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $h:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) i verläuft durch die Punkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist der Abstand zu $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) k: $2x - y = 24$ und $\vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 7.7 Gerade in Parameterdarstellung in $\mathbb{R}^2$ **1PGCCB**

Geben Sie die Parameterform der Geraden an.
Berechnen Sie den Abstand zu einem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Ebene.
Lesen Sie dann den Normalenvektor und den Abstand zum Ursprung aus.

a) f: $y(x) = 4 - 2 \cdot x$

b) g: $y(x) = -8 + x$

c) h: $y(x) = \frac{9-x}{3}$

d) i: $y(x) = \frac{3x+8}{2}$

e) j: $2x - y = 14$

f) k: $2x = 26$

Beispiel 7.8 Gerade in Koordinatenform in $\mathbb{R}^2$ **UPMT9H**

Geben Sie die Koordinatenform der Geraden an. Berechnen Sie den Abstand zu einem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Ebene.
Lesen Sie dann den Normalenvektor und den Abstand zum Ursprung aus. Berechnen Sie schliesslich den Abstand zum Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) f: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 59 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) h: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) i: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) j: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

f) k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3.22 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 11 \end{pmatrix}$

Beispiel 7.9 Abstand Punkt Ebene in $\mathbb{R}^3$ **1R9P4G**

Die Ebene lautet $E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sie wollen ihren Abstand zu Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

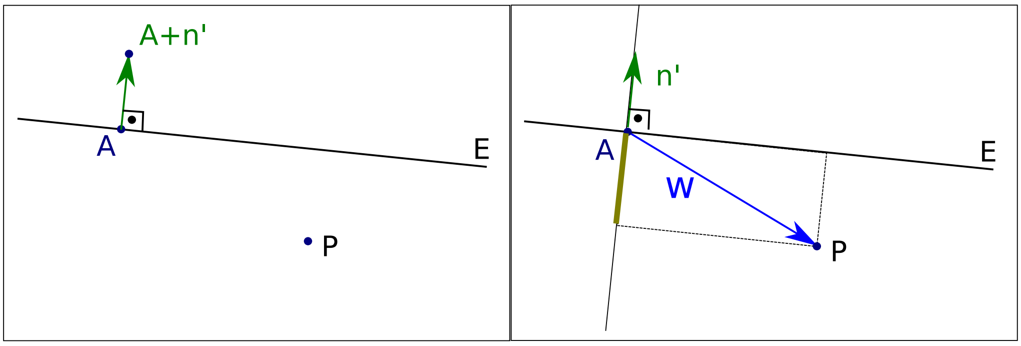
a) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{n}'$, der senkrecht zu E steht.

b) Machen Sie eine Skizze der Situation in der Ebene, in der die folgenden Punkte liegen: Aufpunkt $\vec{A}$ von E, $\vec{P}$, $\vec{A} + \vec{n}'$ und die Ebene E selber.
Zeichnen Sie den Normalenvektor $\vec{n}'$ und die Ebene E ein.

c) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{w}$, der $\vec{P}$ mit der Ebene verbindet. Zeichnen Sie diesen Vektor in der Skizze ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Schattens von $\vec{w}$ auf $\vec{n}'$.

e) Wie kann der Abstand von $\vec{P}$ zu E nun berechnet werden?



Beispiel 7.10 Abstand Punkt Ebene **2MZJ54**

Berechnen Sie den Abstand zwischen E und $\vec{P}$ ($\mu, \nu \in \mathbb{R}$)

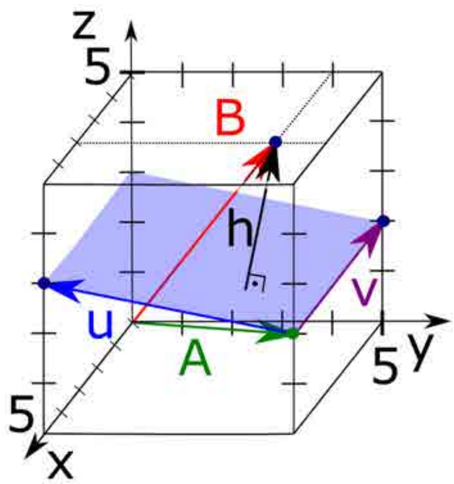
a) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \\ 105 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 117 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 35 \\ 129 \end{pmatrix}$ liegen in E und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt ausserhalb

d) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 56 \\ 13 \\ 135 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 146 \\ 18 \\ 79 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 101 \\ 8 \\ 107 \end{pmatrix}$ liegen in E und $\vec{P} = \begin{pmatrix} -28 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt ausserhalb

Beispiel 7.11 Abstand Punkt-Ebene im Raum **026648**



Lesen Sie die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ und die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ aus der Grafik aus. Projizieren Sie dann den Verbindungsvektor $\vec{B} - \vec{A}$ auf den Normalenvektor der Ebene. Berechnen Sie daraus den Abstand von $\vec{B}$ zur Ebene E.

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Satz Abstand Punkt-Ebene im Raum, Hesse-Normalenform

Der Abstand eines Punktes $\vec{P} \ \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene $E : \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \ \in \mathbb{R}^3$ ist $|h|$ und berechnet sich aus

$$h(\vec{P}) = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \left(\vec{P} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}$$

Dabei benutzen wir den Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

[Papula, 2009, Bd. 1 II 4.2.4]

Wir betrachten die Ebene mit den Aufpunkt $= \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Hesse-Normalenform lautet dann

$$h(\vec{P}) = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \left(\vec{P} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{P} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir das Skalarprodukt aus und schreiben $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dann ergibt sich

$$h(\vec{P}) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) .$$

Schliesslich erhalten wir

$$h(\vec{P}) = \frac{1}{3} (x + 2y + 2z - 3)$$

Mit diesem Ausdruck kann man zwei Dinge tun:

- Wir können $h(\vec{P})$ benutzen um Abstände von Punkten $\vec{P}$ von der Ebene E zu berechnen.
- Wir können mit $\left(\vec{P} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = 0$ implizit alle Punkte in einer Ebene definieren, d.h. alle Vektoren $\vec{P}$, die $\left(\vec{P} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = 0$ erfüllen liegen in der Ebene.

7.2 Hesse-Normalenform

Infobox Hesse-Normalenform: Abstand Punkt-Ebene

- Liegt die Ebene in der Koordinatenform vor $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, so erfolgt die Abstandsmessung über die Hesse-Normalenform in Koordinatenform

$$h(x, y, z) = \frac{a\,x + b\,y + c\,z + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Sie ist besonders ökonomisch, wenn man den Abstand von E zu vielen verschiedenen Punkten berechnen will.

Um beispielsweise die Abstände von der Ebene $12x - 5y - 78 = 0$ zu bestimmen, benutzen wir die Funktion

$$h(x, y, z) = \frac{12x - 5y - 78}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{12x - 5y - 78}{13}$$

Beispiel 7.12 Hesse-Normalenform Koordinatenform **1V9ECJ**

Berechnen Sie den Abstand zwischen E und den Punkten $\vec{P}$ und $\vec{R}$.

a) $E: \ 15x - 12y + 16z = 184, \ \vec{P} = \begin{pmatrix} -19 \\ 37 \\ 18 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = (-147, 37, 138)$

b) $E: \ 9x + 12y + 8z = 104, \ \vec{P} = \begin{pmatrix} -83 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} -109 \\ -42 \\ 18 \end{pmatrix}$

c) $E:\ 12x+12y-z=104,\ \vec{P}=\begin{pmatrix}2\\15\\100\end{pmatrix},\ \vec{R}=\begin{pmatrix}-2\\15\\52\end{pmatrix}$

d) $E:\ 2x+10y-25z=146,\ \vec{P}=\begin{pmatrix}118\\-31\\137\end{pmatrix},\ \vec{R}=\begin{pmatrix}118\\-83\\262\end{pmatrix}$

Beispiel 7.13 Hesse-Normalenform **6ZXEAL**

$$E:\ \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}\right)\odot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=0$$

a) Berechnen Sie den Abstand von E zum Punkt $\vec{P}=\begin{pmatrix}10\\4\\-12\end{pmatrix}$.

b) Geben Sie den Abstand zum allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ in der Ebene an (Hesse-Normalenform).

c) Multiplizieren Sie im Ausdruck das Skalarprodukt aus.

d) Charakterisieren Sie dann die Ebene durch die Koordinatenform, Normalenvektor und Abstand zum Ursprung.

Beispiel 7.14 Hesse-Normalenform, Abstand Ursprung **854087**

$$E:\ \vec{x}=\vec{A}+\lambda\vec{u}+\nu\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\ \text{und}\ \lambda,\nu\in\mathbb{R}$$

Wie gross ist der Abstand der Ebene E vom Ursprung? Werte $h(\vec{x})=\left(\vec{x}-\vec{A}\right)\odot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ für $\vec{x}=\vec{0}$ aus. Betrachte die Resultate und formuliere eine Vermutung.

Wir stellen fest:

Infobox Rolle der Konstante in der Ebenengleichung

Der Abstand zum Ursprung ist die Konstante der Koordinatenform geteilt durch die Länge des Normalenvektors.

Beispiel 7.15 Hesse-Normalenform **5YWDZK**

Geben Sie den Abstand zum allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene an (Hesse-Normalenform). Charakterisieren Sie dann die Ebene durch die Koordinatenform, Normalenvektor und Abstand zum Ursprung. Berechnen Sie schliesslich den Abstand zum Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) $E: \ (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) \odot \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 65 \end{pmatrix} = 0$

b) E : Aufpunkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $E: \ (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

d) E : Aufpunkt $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

7.3 Wie kann man eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ darstellen?

Definition Normalenform der Ebene im Raum

Ebene E ist definiert durch den Normalenvektor $\vec{n}$ und den Ortsvektor des Aufpunktes $\vec{A}$. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene gilt

$$E: \ (\vec{x} - \vec{A}) \odot \vec{n} = 0$$

Die Normalenform kann man auf zwei Arten verstehen:

- Für einen Vektor $\vec{x}$ in der Ebene gilt, dass $(\vec{x} - \vec{A})$ senkrecht auf $\vec{n}$ steht.
- Liegt ein Punkt $\vec{x}$ in der Ebene, so hat er den Abstand 0 zur Ebene.

Beispiel 7.16 Gleichungen der Ebene im Raum **510881**

$$E: \ \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

a) Berechne den Normalenvektor der Ebene E. Wie gross ist seine Norm?.

b) Bestimme die Normalenform von E.

c) Führe dann das Skalarprodukt aus und ordne die Terme (Koordinatenform).

d) Wie gross ist der Abstand von E zu $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix}$

e) Bestimme die Koordinatenform der Ebene F :

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ und } \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Beispiel 7.17 Gleichungen der Ebene im Raum **409770**

Bestimme die Normalenform der Ebene E

$$E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechne dazu den Normalenvektor. Vereinfache soweit, dass keine Vektoren mehr in der Normalenform auftreten.

Definition Koordinatenform der Ebene im Raum

Eine Ebene ist definiert durch die vier Parameter n_1, n_2, n_3 und d. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x}$ in der Ebene gilt $E: \; n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + d = 0$

Die Koordinatenform ergibt sich z.B. durch das Auswerten der Normalenform. Die Koeffizienten n'_1, n'_2, n'_3 sind die Komponenten des Normalenvektors.

Beispiel 7.18 Gleichungen der Ebene im Raum **173961**

Bestimme für die Ebene E

$$E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

den Normalenvektor. Drücke dann mathematisch aus, dass der Verbindungsvektor von einem Punkt $\vec{x}$ *in der Ebene* zum Aufpunkt den Abstand Null zur Ebene hat.

Beispiel 7.19 Normalenform und Koordinatenform der Ebene **UE9YTP**

Gibt die Normalenform und die Koordinatenform der folgenden Ebenen an.

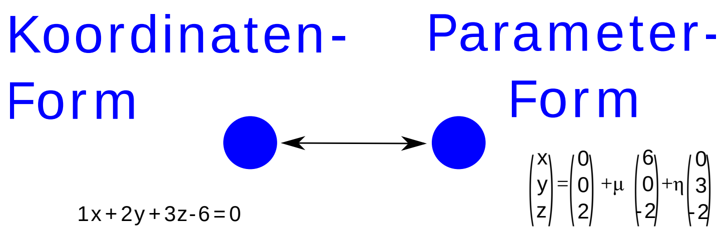


Abbildung 7.1: Die verschiedenen mathematischen Darstellungen der Ebene in $\mathbb{R}^3$.

a) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \\ 105 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 117 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 35 \\ 129 \end{pmatrix}$ liegen in E

c) Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 56 \\ 13 \\ 135 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 146 \\ 18 \\ 79 \end{pmatrix}$, und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 101 \\ 8 \\ 107 \end{pmatrix}$ liegen in E

7.4 Wie man die Darstellungen der Ebene ineinander überführt

Wir kennen zwei Darstellungen der Ebene im Raum, die Parameter-Form und die Koordinaten-Form.

Wie die Formen am effizientesten ineinander anderen überführt werden, das wird hier besprochen.

7.4.1 Von der Koordinaten-Form $1x + 2y + 3z - 6 = 0$ zu ...

Suchen wir Punkte in der Ebene, lassen sich zwei Koordinaten wählen, z.B. für $1x + 2y + 3z - 6 = 0$ können wir $y = 0$ und $z = 0$ setzen. Dann ergibt sich für den Punkt $x = 6$, also $\vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für die Ebene $E: \ 1z = 12$, geht die Wahl $y = 0$ und $z = 0$ nicht. Welche Variablen lassen sich also wählen, welche nicht?

Infobox Pivot-, freie Variablen

Für das Wählen der Variablen bietet sich folgendes Vorgehen an:
Wir betrachten die Ebenengleichung von links nach rechts.

- Die erste Variable, deren Koeffizient nicht 0 ist, bezeichnen wir als **Pivot-Variable**.
- Alle anderen Variablen als *freie Variablen*.

Freie Variablen können frei gewählt werden. Aus dieser Wahl ergeben sich dann die Pivot-Variable.

Mit diesem Vorgehen finden wir z.B. für $E: \; 2x + 1z = 12$

- Pivot-Variable: x
- freie Variablen: y, z

Variablen wählen, evtl. Ebenengleichung umformen auf $x = \frac{12-z}{2}$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{R} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 7.20 Punkte in Ebene erzeugen 7EQKL7

Geben Sie einen Punkt der Ebene an. Lesen Sie dann den Normalenvektor und Abstand zum Ursprung aus und geben Sie die Parameterform der Ebenen an.

a) E: $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

b) E: $x - y - z + 1 = 0$

c) E: $5y = 0$

d) E: $6x - 3y - 2z = -30$

e) E: $7x = 3$

f) E: $-4x + 2y - z + 8 = 0$

Beispiel 7.21 Richtungsvektoren einer Ebene bestimmen Y2NLAE

Gibt die Ebene in Parameterform an. Bestimme dazu die Richtungsvektoren der Ebene

$$2x + y - z = 3$$

Infobox Richtungsvektor generieren (Profi)

Ist eine Ebene in der Koordinaten-Form $n_1x+n_2y+n_3z+d=0$ gegeben, setzen wir eine freie Variable 1 und die andere 0 und lösen dann die homogene Gleichung

$$n_1x+n_2y+n_3z=0$$

Für jede freie Variable gibt es einen linear unabhängigen Richtungsvektor.

Infobox Richtungsvektoren generieren (quick and dirty)

Ist eine Ebene in der Koordinaten-Form $n_1x+n_2y+n_3z+d=0$ gegeben, gibt es meist Richtungsvektoren in der Form

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\-n_3\\n_2\end{pmatrix} \text{ oder } \vec{v}=\begin{pmatrix}n_3\\0\\-n_1\end{pmatrix}.$$

Infobox Koordinaten-Form zur Parameter-Form

Es werden Pivot- und freie Variablen bestimmt. Dann kann ein Aufpunkt generiert werden. Der Normalenvektor $\vec{n}$ kann ausgelesen werden. Mit den obigen Methoden ergeben sich daraus die Richtungsvektoren.

$$E:\vec{x}=\vec{P}+\lambda\vec{u}+\nu\vec{v}$$

Beispiel 7.22 Von der Koordinaten-Form zur Parameterform **467643**

Berechnen Sie eine Parameterform der Ebene gegeben durch

a)
$$E: 1x+2y+3z-6=0$$

b)
$$E: 12x+9z-55=0$$

7.4.2 Von der Parameter-Form ...

Infobox Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form

Mit dem Vektorprodukt kann aus dem Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Normalenvektor berechnet werden.

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$$

Die Ebene schreibt sich nun als

$$n_1\,x+n_2\,y+n_3\,z+d=0$$

wobei d die Konstante durch Einsetzen der Koordinaten des Aufpunktes bestimmt wird.

E1 und E2

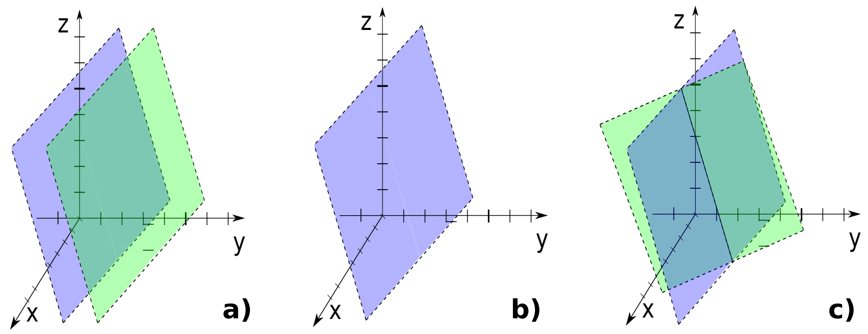


Abbildung 7.2: Mögliche Schnittmengen von zwei Ebenen

Beispiel 7.23 Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form 211568

Berechnen Sie die Koordinaten-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

7.5 Wie kann man die Koeffizienten der Koordinatenform interpretieren?

Infobox Koeffizienten und Konstante der Koordinatenform

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot y + c_3 \cdot z = d$$

- Die Koeffeffizienten c_1, c_2 und c_3 sind die Koordinaten des Normalenvektors $\vec{n}$.
- Der Betrag von $\frac{d}{|\vec{n}|}$ gibt den Abstand zum Urpsrung an.
- Für $d > 0$ gilt: Verändern wir $\vec{n}$ nicht, sondern vergrössern nur d, so wächst der Abstand der Ebene zum Urpsrung.

Beispiel 7.24 Unterscheidung nach Schnittmenge, 2 Ebenen QWHA5Z

Betrachten Sie die Schnittmengen von zwei Ebenen in Abbildung 7.2.

a) Welche Schnittmengen gibt es? Beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

b) Wie können Sie die Fälle unterscheiden anhand der Normalenvektoren oder der Konstanten.

c) Für ein homogene lineares Gleichungssystem, d.h. die Konstanten aller Ebenen sind 0: Welche der oben besprochenen Fälle können jetzt noch auftreten?

Beispiel 7.25 Schnittmengen qualitativ **FK36P5**

Betrachten Sie die Schnittmengen in Abbildung 7.3. Unten finden Sie die Gleichungen der Ebenen E_1, E_2 und E_3 — vor und nach der Elimination. Welche gegenseitige Lage haben E_1, E_2 und E_3. Wie sieht die Schnittmenge aus? Antworten Sie ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

a)
$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 0 & +9y & +8z & = & 0 \\ E_2: & 8x & +9y & +6z & = & 0 \\ E_3: & 10x & +0 & +6z & = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{rrrcr} 2x & +0 & +8z & = & 0 \\ 0 & +9y & +8z & = & 0 \\ 0 & +0 & +34z & = & 0 \end{array}\right|$$

b)
$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 2x & +y & -2z & = & -1 \\ E_2: & x & +8y & -4z & = & 10 \\ E_3: & 6x & -y & +18z & = & 81 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{rrrcr} x & +0 & +44z & = & 178 \\ 0 & +y & +246z & = & 987 \\ 0 & +0 & +336z & = & 1344 \end{array}\right|$$

c)
$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 2x & +y & -2z & = & 7 \\ E_2: & x & +8y & -4z & = & 20 \\ E_3: & -3x & +6y & +0 & = & 6 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{rrrcr} x & +8y & -4z & = & 20 \\ 0 & +15y & -6z & = & 33 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right|$$

d) Halten Sie nun Ihr Vorgehen fest: Welche Schnittmengen gibt es? Woran erkennen Sie diese in den beiden Formen des LGS — vor und nach der Elimination? Wie können Sie für jeden Typ von Schnittmenge die Lage der Ebenen erkennen?

7.6 Übungen

Beispiel 7.26 Abstand Punkt-Ebene im Raum **007592**

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{R}$ von den Ebenen.

a) E enthält u.a. die Punkte $\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$. $\vec{R} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

b) E enthält u.a. die Punkte $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$. $\vec{R} = \begin{pmatrix}18\\19\\-4\end{pmatrix}$

c) E enthält u.a. die Punkte $\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix}$. $\vec{R} = \begin{pmatrix}13.8\\20.9\\0\end{pmatrix}$

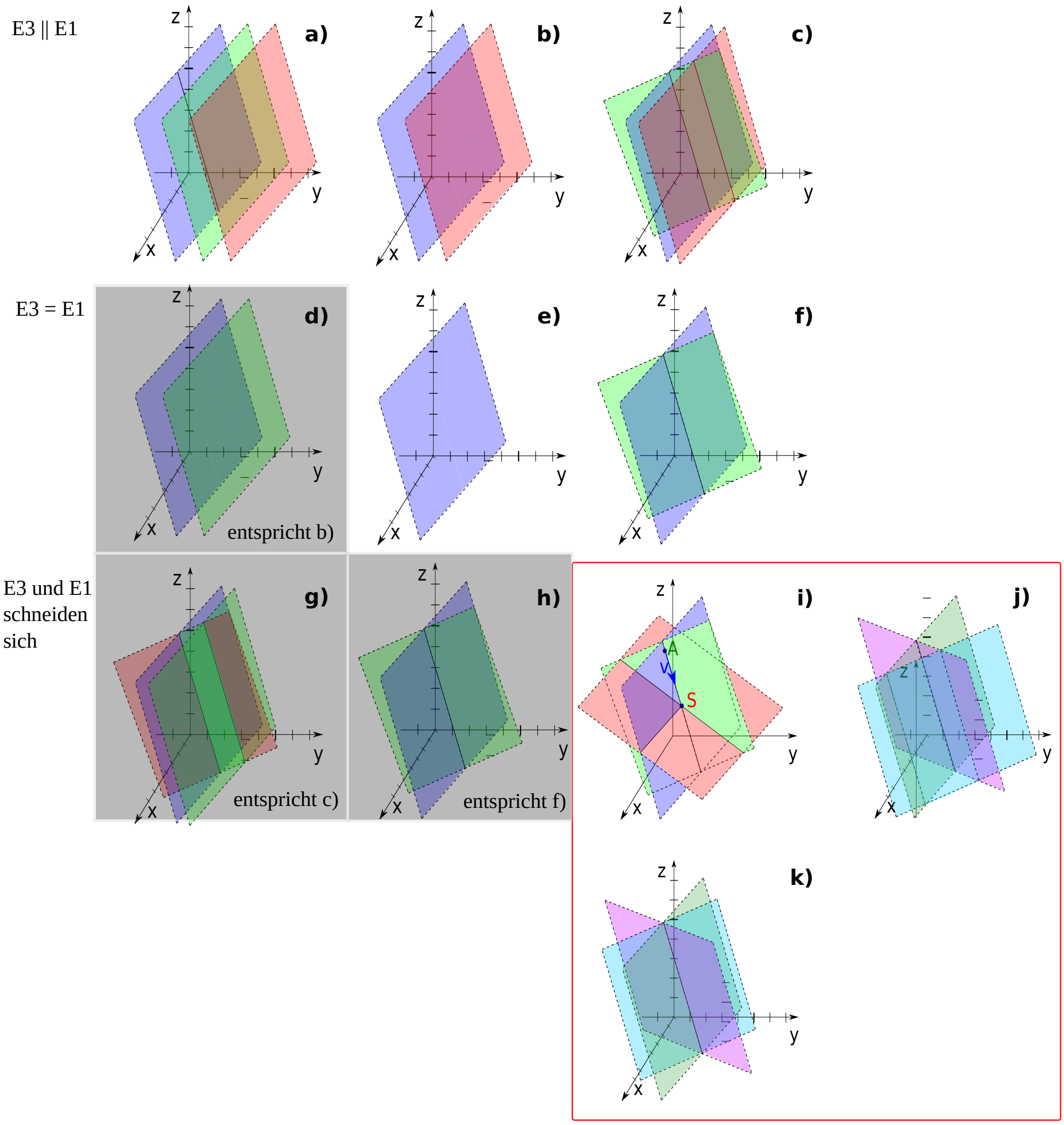


Abbildung 7.3: Mögliche Schnittmengen von drei Ebenen: die Ebenen E_1 und E_2 aus Abbildung 7.2 (parallele, identische und sich schneidende Ebenen) werden mit einer dritten Ebenen E_3 (rot) kombiniert.

Teil II

Lineare Algebra

KAPITEL 8

Lösungen von linearen Gleichungssystemen

Lernziele Lösungen von linearen Gleichungssystemen

- Die Studierenden können lineare Gleichungssysteme (LGS) in Standardform bringen.
- Sie können LGSs mit elementaren Zeilenoperationen in Zeilenstufenform bringen und vermeiden dabei linear abhängige Linearkombinationen.
- Sie können homogene LGS von inhomogenen LGS unterscheiden.
- Sie können anhand der Zeilenstufenform bestimmen, wieviele freie Parameter (oder Dimensionen) die Lösung eines LGS hat. Sie können auch angeben, ob das LGS überhaupt eine Lösung hat.
- Falls das LGS eine Lösung hat, können Sie die homogene Lösung sowie die inhomogene Lösung bestimmen.
- Sie können ein LGS in eine erweiterte Koeffizientenmatrix überführen. Für eine Koeffizientenmatrix können sie den Rang und den Nullraum bestimmen.
- Sie können die Lösung geometrisch Interpretieren:
  - homogene Lösung $\hat{=}$ Richtungsvektoren
  - inhomogene Lösung $\hat{=}$Aufpunkt

8.1 Lösungsmengen bestimmen (qualitativ)

Beispiel 8.1 Unterscheidung nach Schnittmenge, 3 Ebenen **PVKJ6M**

Betrachten Sie die Schnittmengen von drei Ebenen in Abbildung 7.3.

a) Welche Schnittmengen gibt es? Beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

b) Wie können Sie die Fälle unterscheiden anhand der Normalenvektoren oder der Konstanten.

c) Zeichnen Sie ein entsprechendes Schema für homogene LGS.

d) Erstellen Sie ein Schema um die möglichen Schnittmengen einzuteilen. Charakterisieren Sie die Fälle nach dem Rang der Koeffizientenmatrix und nach dem Rang der erweiterten Koeffizeitenmatrix.

Beispiel 8.2 Schnittmengen qualitativ **DSF4HG**

Unten finden Sie die Ebenen $E_1,\ E_2$ und E_3 — vor und nach der Gauss-Elimination. Wie sehen die Schnittmengen von der Ebenen $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \wedge E_3$ und $E_2 \wedge E_3$ aus? Wie sieht die Schnittmenge der drei Ebenen ($E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$) aus? Antworten Sie vorerst ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

$$\left|\begin{array}{rrrcr} 5x & -2y & -2z & = & 8 \\ 8x & +5y & -z & = & -3 \\ 13x & +3y & -3z & = & 5 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{rrrcr} 41x & & -12z & = & 34 \\ & 41y & +11z & = & -79 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right|$$

Beim letzten Schritt der Elimination ausserdem in der letzten Zeile drei Situationen auftreten:

Satz Formen von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem $a \cdot x = b$ kann drei Formen annehmen

- Es liegt die Form $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ vor. Es gibt eine Lösung $x = \frac{b}{a}$.
- Es liegt die Form $0 \cdot x = b$ mit $b \neq 0$ vor. Es gibt keine Lösung.
- Es liegt die Form $0 \cdot x = 0$ vor. Dann gibt es unendlich viele Lösungen $x = \mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Definition Inkonsistente lineare Gleichungen

Die lineare Gleichung $0 \cdot x = b$ mit $b \neq 0$ nennen wir **inkonsistent** (Fall 2 in Satz 8.1). Alle anderen Fälle der linearen Gleichungen heissen **konsistent** (Fall 1 und 3 in Satz 8.1).

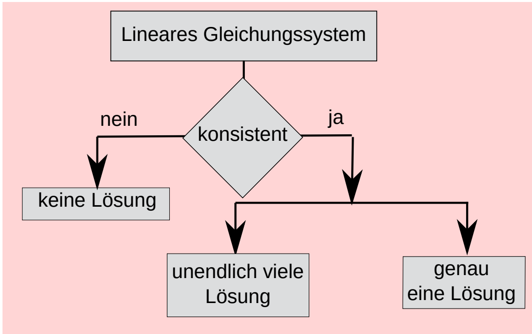


Abbildung 8.1: Mögliche Situationen für die Lösung eines linearen Gleichungssystems. [Papula, 2009, Bd. 2 I 5.4]

Ist *eine* Gleichung inkonsistent, ist auch das zugehörige Gleichungssystem inkonsistent. Beachte auch, dass für konsistente Gleichungssysteme (Fall 1 und 3 in Satz 8.1) wieder zwei Unterscheidungen gemacht werden: Es gibt den Fall mit *einer* Lösung oder mit *unendlich vielen* Lösungen. Deshalb ergibt sich das Schema für linear Gleichungssysteme, wie es in Abb.8.1 gegeben ist. Ob genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen (d.h. freie Variablen) vorliegen, entscheidet man, indem man das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform bringt und freie Variablen sucht. Gibt es freie Variablen, resultieren unendlich viele Lösungen, ansonsten gibt es genau eine Lösung.

Beispiel 8.3 Schnittmengen qualitativ: Homogene LGS **GL27L6**

Unten finden Sie Ebenen E_1, E_2 und E_3 — vor und nach der Gauss-Elimination. Wie sehen die Schnittmengen der Ebenen $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \wedge E_3$ und $E_2 \wedge E_3$ aus? Wie sieht die Schnittmenge der drei Ebenen ($E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$) aus? Antworten Sie vorerst ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

a)

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & +9y & +8z & = & 0 \\ 8x & +9y & +6z & = & 0 \\ 10x & +0 & +6z & = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 2x & +0 & +8z & = & 0 \\ 0 & +9y & +8z & = & 0 \\ 0 & +0 & +34z & = & 0 \end{array}\right|$$

b)

$$\left|\begin{array}{cccc} -7x & +y & +9z & = & 0 \\ 0 & +4y & +8z & = & 0 \\ 14x & +2y & -10z & = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 7x & +3y & -z & = & 0 \\ 0 & +1y & +2z & = & 0 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right|$$

c)

$$\left|\begin{array}{cccc} -14x & +2y & +18z & = & 0 \\ -7x & +y & +9z & = & 0 \\ 0 & +4y & +8z & = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 7x & +3y & -z & = & 0 \\ 0 & +1y & +2z & = & 0 \end{array}\right|$$

d)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +8y & -4z & = & 0 \\ -3x & +6y & +0 & = & 0 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{cccccc} x & +8y & -4z & = & 0 \\ 0 & +15y & -6z & = & 0 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right|$$

e)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +8y & -4z & = & 0 \\ 6x & -y & +18z & = & 0 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{cccccc} x & +0 & +44z & = & 0 \\ 0 & +y & +246z & = & 0 \\ 0 & +0 & +336z & = & 0 \end{array}\right|$$

f)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 4x & +3y & -5z & = & 0 \\ -3x & +3y & +10z & = & 0 \\ 5x & +9y & +0 & = & 0 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{cccccc} x & +6y & +5z & = & 0 \\ 0 & +21y & +25z & = & 0 \end{array}\right|$$

Beispiel 8.4 Schnittmengen qualitativ: Inhomogene LGS **EM75PE**

Unten finden Sie Ebenen $E_1,\ E_2$ und E_3 vor und nach der Gauss-Elimination. Wie sehen die Schnittmengen von der Ebenen $E_1 \wedge E_2,\ E_1 \wedge E_3$ und $E_2 \wedge E_3$ aus? Wie sieht die Schnittmenge der drei Ebenen ($E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$) aus? Antworten Sie vorerst ohne die Schnittmengen zu berechnen, sondern beschreiben Sie die Schnittmengen in Worten.

a)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2x & +y & -2z & = & -1 \\ x & +8y & -4z & = & 10 \\ 6x & -y & +18z & = & 81 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{cccccc} x & +0 & +44z & = & 178 \\ 0 & +y & +246z & = & 987 \\ 0 & +0 & +336z & = & 1344 \end{array}\right|$$

b)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2x & +y & -2z & = & 7 \\ x & +8y & -4z & = & 20 \\ -3x & +6y & +0 & = & 6 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{cccccc} x & +8y & -4z & = & 20 \\ 0 & +15y & -6z & = & 33 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right|$$

c)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 4x & +18y & -12z & = & 62 \\ 2x & +9y & -6z & = & 29 \\ 12x & -3y & +4z & = & 67 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{cccccc} 2x & +9y & -6z & = & 1 \\ 0 & +57y & -40z & = & 3 \\ 0 & +0 & +0 & = & 4 \end{array}\right|$$

d)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2x & +y & -2z & = & 9 \\ 6x & -y & +18z & = & 41 \\ 24x & +8y & +0 & = & 110 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{cccccc} 2x & +y & -2z & = & 9 \\ 0 & +4y & -24z & = & 10 \\ 0 & +0 & +0 & = & 12 \end{array}\right|$$

e)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0 & +9y & +8z & = & 40 \\ 8x & +9y & +6z & = & 56 \\ 10x & +0 & +6z & = & -14 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{cccccc} 2x & +0 & +8z & = & -30 \\ 0 & +9y & +8z & = & 40 \\ 0 & +0 & +34z & = & -136 \end{array}\right|$$

f)

$$\left|\begin{array}{rrrcr} -14x & +2y & +18z & = & 78 \\ -7x & +y & +9z & = & -41 \\ 0 & +4y & +8z & = & 9 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{rrrcr} 7x & +3y & -z & = & 2 \\ 0 & +4y & +8z & = & 1 \\ 0 & +0 & +0 & = & 4 \end{array}\right|$$

g)

$$\left|\begin{array}{rrrcr} -7x & +y & +9z & = & -31 \\ 0 & +4y & +8z & = & -12 \\ 14x & +2y & -10z & = & 50 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{rrrcr} 7x & +3y & -z & = & 19 \\ 0 & +4y & +8z & = & -12 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right|$$

h)

$$\left|\begin{array}{rrrcr} 4x & +3y & -5z & = & 18 \\ -3x & +3y & +10z & = & 5 \\ 5x & +9y & +0 & = & 36 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{rrrcr} x & +6y & +5z & = & 3 \\ 0 & +21y & +25z & = & 4 \\ 0 & +0 & +0 & = & 5 \end{array}\right|$$

i)

$$\left|\begin{array}{rrrcr} 4x & +18y & -12z & = & 62 \\ 2x & +9y & -6z & = & 31 \\ x & -3y & +4z & = & 2 \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{rrrcr} 2x & +9y & -6z & = & 1 \\ 0 & +15y & -14z & = & 27 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right|$$

8.2 Lösungsverfahren mit elementaren Zeilenoperationen

Beispiel 8.5 Linear-Kombinationen von Gleichungen **070402**

$$\left|\begin{array}{lrrr} L_1: & 8x_1 & +x_2 = & 17 \\ L_2: & x_1 & +3\cdot x_2 = & 5 \end{array}\right| \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir benennen die Gleichungen L_1, L_2 und L_3. Wir wissen von vorher, dass $\vec{v}$ eine Lösung des LGS ist. Ist nun $\vec{v}$ auch eine Lösung der lineare Gleichung

$$L' = 2L_1 + 3L_2\ ?$$

Beispiel 8.6 Linear-Kombinationen von Gleichungen **969391**

$$\left|\begin{array}{lrrrrr} L_1: & x_1 & +x_2 & +4\cdot x_3 & +3\cdot x_4 = & 5 \\ L_2: & 2\cdot x_1 & +3\cdot x_2 & +x_3 & -2\cdot x_4 = & 1 \\ L_3: & x_1 & +2\cdot x_2 & -5\cdot x_3 & +4\cdot x_4 = & 3 \end{array}\right| \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir benennen die Gleichungen L_1, L_2 und L_3. Wir wissen von vorher, dass $\vec{v}$ eine Lösung des LGS ist. Ist nun $\vec{v}$ auch eine Lösung der lineare Gleichung

$$L' = L_2 - L_1 - L_3\ ?$$

Definition Elementare Zeilenoperationen

Die elementaren Zeilenoperationen sind

- Vertauschung von zwei Gleichungen: $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $k \neq 0$: $L_i \to L_i \cdot k$
- Addition der Gleichungen L_i und $L_j \cdot k$: $L_i \to L_i + L_j \cdot k$

[Papula, 2009, Bd. 2 I 5.2]

Satz Elementare Zeilenoperationen

Elementare Zeilenoperationen verändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ nicht.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.464]

Das Gauss'sche Eliminations-Verfahren wendet die elementaren Zeilenoperationen nacheinander an, um das lineare Gleichungssystem in die **Zeilenstufenform** (meist sogar **Dreiecks-Form**) zu bringen. Daraus kann die Lösung des Gleichungssystems einfach bestimmt werden. Dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 8.7 Einsetzen in die Dreiecksform **959281**

Löse das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & = & 9 \\ & 5x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ & & 7x_3 & -x_4 & = & 3 \\ & & & 2x_4 & = & 8 \end{array}\right|$$

Die Dreiecksform zeichnet sich dadurch aus, dass genau so viele Gleichungen vorliegen wie Unbekannte. Gibt es weniger Gleichungen als Unbekannte, sprechen wir von der **Zeilenstufenform**. Die Dreiecksform ist also ein Spezialfall der Zeilenstufenform mit Anzahl Unbekannte gleich Anzahl Gleichung, $n = m$.

Beispiel 8.8 Einsetzen in der Zeilenstufenform **577593**

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben:

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & +4x_4 & -2x_5 & = & 15 \\ & & x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 5 \\ & & & 3x_4 & -9x_5 & = & 6 \end{array}\right| .$$

Das Lösen von linearen Gleichungen mit dem **Gauss-Eliminations-Verfahren** setzt sich nun aus den beiden Teil-Verfahren zusammen:

- Elimination: Durch elementare Zeilenoperationen wird das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform gebracht.

- Rücksubstitution: Durch Einsetzen von unten nach oben werden die Unbekannten bestimmt.

Infobox Zeilenstufenform vs. Trapezform

In [Papula, 2009, Bd. 2 I 4.4] werden die elementare Zeilenoperationen "äquivalente Umformungen" genannt. Ausserdem wird die Zeilenstufenform da "Trapezform" genannt.

Übrigens, beim Überführen eines Gleichungssystems in Zeilenstufenform verwendet man eine Kombination von zwei Schritten, nämlich man ersetzt die Gleichung L_i mit $L_i + kL_j$: $L_i \to L_i + L_j \cdot k$, d.h. man führt die Multiplikation einer Gleichung gleichzeitig mit der Addition von Gleichungen aus.

Beachte, dass das Verfahren vorzeitig abgebrochen werden kann, wenn ein Widerspruch erzeugt wird. Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung. Wie die elementaren Zeilenoperationen eingesetzt werden um auf Zeilenstufenform zu kommen, zeigt das nächste Beispiel

Beispiel 8.9 Zeilenstufenform durch elementare Zeilenoperationen 577593

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem mit dem Gaussverfahren

$$\left| \begin{array}{rrrcr} x & -3y & -2z & = & 6 \\ 2x & -4y & -3z & = & 8 \\ -3x & +6y & +8z & = & -5 \end{array} \right| .$$

Beachte, dass beim Gaussverfahren zuerst von oben nach unten gearbeitet wird (Elimination) und dann strikt von unten nach oben (Einsetzen). Dies erlaubt die Übersicht zu behalten und wir vermeiden linear abhängige Linearkombinationen (siehe unten).

Infobox Elimination beim Gaussverfahren

Bei der Elimination wird *eine* Zeile bestimmt, mit der eliminiert wird (sie darf zu anderen Zeilen addiert werden).
Diese Zeile muss unverändert in das nächste Gleichungssystem übernommen werden. So werden linear abhängige Linearkombinationen der Gleichungen vermieden.

Die Probleme, die entstehen, wenn man sich nicht an diese Regel hält, zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 8.10 Linear abhängige Linearkombinationen von Gleichungen 942087

$$\left| \begin{array}{lrrcr} L_1: & & -3y & = & 6 \\ L_2: & 2x & -4y & = & 10 \end{array} \right| .$$

Für das Gleichungssystem oben wird das folgende Vorgehen vorgeschlagen:

$$\left| \begin{array}{rrrcr} L_1' = L_1 - \frac{1}{2}L_2: & 0 & -1y & = & 1 \\ L_2' = L_2 - 2L_1: & 0 & +2y & = & -2 \end{array} \right|$$

also

$$\left| \begin{array}{rrrcr} L_1'' = L_1': & 0 & -1y & = & 1 \\ L_2'' = L_2' + 2L_1': & 0 & +0 & = & 0 \end{array} \right|$$

x ist vermeintlich ein freier Parameter. Wir setzen $x = \mu$. Ausserdem folgt aus der ersten Zeile, dass $y = -1$ ist. Die Lösungen sind also $\vec{u} = \begin{pmatrix} \mu \\ -1 \end{pmatrix}$. Dies ist offensichtlich eine falsche Lösung, denn die richtige Lösung besteht aus einem einzigen Schnittpunkt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Was wurde beim Lösen falsch gemacht?

In der Fachsprache nennt man die Gleichungen L_1' und L_2' linear abhängige Linearkombinationen, weil die Vektoren gebildet aus den Koeffizienten

$$L_1' = 1L_1 - \frac{1}{2}L_2 \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$L_2' = -2L_1 + 1L_2 \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. Diese linear abhängige Linearkombinationen werden bei der Elimination vermieden, indem die Zeile mit der eliminiert wird, unverändert beibehalten wird.

8.3 Homogene und inhomogene Lösungen bestimmen

Homogene Lösungen und Nullraum

Beispiel 8.11 Alle Lösungen **U4IWCC**

$$\left| \begin{array}{rrrcr} 1x & +2y & +3z & = & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{rrrcr} 1x & +2y & +3z & = & 0 \\ & 4y & +5z & = & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{rrrcr} 1x & +2y & +3z & = & 0 \\ & 4y & +5z & = & 0 \\ & & 6z & = & 0 \end{array} \right|$$

a) Wie können Sie die Gleichungssysteme anschaulich (geometrisch) darstellen? Erstellen Sie zu allen drei Gleichungssystemen eine Skizze.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Parameterform.

c) Erkennen Sie ein allgemeines Lösungsverfahren, mit dem sie für alle 3 Fälle die Lösungsmenge bestimmen können?

Infobox Homogene Lösungen (Richtungsvektoren)

Sie lassen sich am schnellsten bestimmen aus dem *homogenen* LGS. Für den ersten Richtungsvektor setzen wir die freien Variablen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, usw. und lösen dann das LGS durch Einsetzen von unten nach oben. Gibt es weitere Richtungsvektoren, dann wiederholen wir dies mit

2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, usw.
3. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, usw.

Infobox Richtungsvektoren alternativ

Sie lassen sich auch bestimmen durch

- das Vektorprodukt der Normalenvektoren bei zwei Ebenen in $\mathbb{R}^3$
- aus Lösung des LGS mit den freien Variablen λ_1, λ_2, usw.

Beispiel 8.12 Homogene lineare Gleichungssyteme **801980**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der homogenen linearen Gleichungssysteme. Überprüfen Sie ihr Resultat mit Matlab (Befehl `null`).

a)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 3x & +3y & -12z & = & 0 \\ E_2: & x & & -4z & = & 0 \\ E_3: & 5x & +2y & -20z & = & 0 \end{array}\right|$$

b)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 3x & +3y & -5z & = & 0 \\ E_2: & & y & -3z & = & 0 \\ E_3: & & 2y & -5z & = & 0 \end{array}\right|$$

c)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & x & +3y & +z & = & 0 \\ E_2: & & y & +z & = & 0 \\ E_3: & & 2y & +2z & = & 0 \end{array}\right|$$

Beispiel 8.13 Richtungsvektoren und Nullraum **V5JXDD**

$$\left|1x \quad +2y \quad 3z \quad = \quad 0\right|, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Wir haben oben die Lösungsmenge des LGS in Parameterform bestimmt. Erstellen Sie eine Skizze der Ebene, des Normalenvektors $\vec{n}$ und der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Sind wohl $3 \cdot \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ auch senkrecht zu $\vec{n}$?

b) Überprüfen Sie, ob algebraisch ob $3 \cdot \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ auch senkrecht zu $\vec{n}$ sind. Wie können Sie ihr Resultat verallgemeinern?

Falls es mehrere Richtungsvektoren in der Lösung eines LGS gibt (z.B. $\vec{u}$ und $\vec{v}$) sind auch Summen und Vielfache der Richtungsvektoren wieder Richtungsvektoren, z.B.

$$3 \cdot \vec{u} \text{ und } 3 \cdot \vec{u} - 5\vec{v}$$

oder allgemein

$$\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \ldots$$

Wir nennen diesen Raum **Nullraum** der Koeffizientenmatrix.

Beispiel 8.14 Nullraum **QWDLIG**

Bestimmen Sie den Nullraum der Koeffizientenmatricen in den folgenden LGSs.

a)

$$\begin{vmatrix} 5x & +6y & +z & = & 0 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 7x & +3y & -z & = & 19 \\ & 4y & +8z & = & -12 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} x & +6y & +5z & = & 0 \\ & 21y & +25z & = & 0 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} -3x & -10y & -z & = & 0 \end{vmatrix}$$

e)

$$\begin{vmatrix} 5x & -2y & +z & +3v & +4w & = & -13 \\ & 3y & & & +w & = & 6 \end{vmatrix}$$

f)

$$\begin{vmatrix} -7x & -3y & +z & -10v & -w & = & 12 \\ & & -4z & -7v & +w & = & 41 \end{vmatrix}$$

Partikuläre Lösungen

Infobox Partikuläre Lösungen (Aufpunkt)

Sie lässt sich am schnellsten bestimmen, wenn im LGS alle freien Variablen 0 gesetzt werden und dann das LGS durch Einsetzen von unten nach oben gelöst wird.

Beispiel 8.15 Aufpunkt **96265K**

$$\begin{vmatrix} 2x & & -z & = & 3 \\ & 4y & +z & = & 0 \end{vmatrix}$$

Bestimmen Sie die freien Variablen und die Pivot-Variablen. Bestimmen Sie dann einen Aufpunkt der Schnittmenge.

Beispiel 8.16 Allgemeine Lösung QWQK7P

Bestimmen Sie die freien Variablen und die Pivot-Variablen. Bestimmen Sie dann die allgemeine Lösung der LGSs.

a)
$$\left|\begin{array}{cccccc} x & +8y & -4z & = & 20 \\ 0 & +15y & -6z & = & 33 \end{array}\right|$$

b)
$$\left|\begin{array}{cccccc} 2x & +y & -2z & = & 9 \\ 0 & +4y & -24z & = & 10 \end{array}\right|$$

c)
$$\left|\begin{array}{cccccc} 2x & +0 & +8z & = & -30 \\ 0 & +9y & +8z & = & 40 \\ 0 & +0 & +34z & = & -136 \end{array}\right|$$

d)
$$\left|\begin{array}{ccccc} 7x & +3y & -z & = & 2 \end{array}\right|$$

e)
$$\left|\begin{array}{cccccc} 4x & +18y & -12z & = & 0 \\ 2x & +9y & -6z & = & 0 \end{array}\right|$$

f)
$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5x & -2y & +z & +3v & +4w & = & -13 \\ & +3y & & & +w & = & 6 \end{array}\right|$$

g)
$$\left|\begin{array}{cccccccc} -7x & -3y & +z & -10v & -w & = & 12 \\ & & -4z & -7v & +w & = & 41 \end{array}\right|$$

Beispiel 8.17 Inhomogene LGS 970730

Bestimmen Sie die Lösungsmengen. Überprüfen Sie das Resultat mit Python (Befehle `mrref` und `mnull`).

a)
$$\left|\begin{array}{ccccccc} E_1: & 5x & +2y & -20z & = & 8 \\ E_2: & x & & -4z & = & 2 \\ E_3: & 5x & +2y & -20z & = & 9 \end{array}\right|$$

b)
$$\left|\begin{array}{ccccccc} E_1: & 2x & +6y & -12z & = & 12 \\ E_2: & & 2y & -4z & = & 2 \\ E_3: & 2x & +6y & -12z & = & 12 \end{array}\right|$$

c)
$$\left|\begin{array}{ccccccc} E_1: & 2x & +3y & & = & 15 \\ E_2: & 2x & +3y & +z & = & 11 \\ E_3: & x & +3y & & = & 12 \end{array}\right|$$

Beispiel 8.18 Freie Variablen und Pivot-Variablen 863440

Bestimmen Sie freie Variablen und Pivot-Variablen und die Lösung des LGS. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Matlab (Befehle `null` und `rref`).

a)

$$\left|\begin{array}{lrrrrrrr} E_1: & & & 2z & & & = & 4 \\ E_2: & x & +y & -4z & +u & & = & 2 \\ E_3: & 3x & +3y & -12z & +3u & +v & = & 7 \end{array}\right|$$

b)

$$\left|\begin{array}{lrrrrrrr} E_1: & 3x & +3y & -8z & +6u & & = & 14 \\ E_2: & x & +y & -4z & +2u & +v & = & 3 \\ E_3: & 5x & +5y & -20z & +10u & +3v & = & 13 \end{array}\right|$$

8.4 Geometrische Interpretation der Lösung

Beispiel 8.19 Struktur der Lösung eines LGS **181322**

Gegeben sind verschiedene Lösungen der linearen Gleichungssysteme. Bestimmen Sie die Richtungsvektoren der homogenen Lösung.

1. Setzen Sie dafür in das LGS ein.
2. Überprüfen Sie ihr Resultat mit Matlab indem Sie die Lösung mit der Koeffizienten-Matrix multiplizieren.

a)

$$\left|\begin{array}{lrrrrr} E_1: & -x & +2y & -3z & = & 0 \\ E_2: & -2x & +5y & -6z & = & 0 \\ E_3: & x & +3y & +3z & = & 0 \end{array}\right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\left|\begin{array}{lrrrrr} E_1: & 9x & -6y & -5z & = & -16 \\ E_2: & 6x & -4y & 8z & = & 12 \\ E_3: & -12x & +8y & +4z & = & 16 \end{array}\right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -14/3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 28/3 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 8.20 Schnittgerade von Ebenen **042736**

Die Ebenen E_1 und E_2 (und E_3) schneiden sich in einer Geraden g.

- Bestimme eine Parameterdarstellung von g

- Überprüfe das Resultat mit Matlab (Befehle `null` und `rref`).

a)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & x_1 & -x_2 & +2x_3-1 & = & 0 \\ E_2: & 6x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array}\right|$$

b)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 4x & +4y & -16z & = & 4 \\ E_2: & x & & -4z & = & 2 \\ E_3: & 5x & +2y & -20z & = & 8 \end{array}\right|$$

c)

$$\left|\begin{array}{lrrrcr} E_1: & 3x_1 & +5x_2 & -x_3 & = & 7 \\ E_2: & -x_1 & +5x_2 & -6x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

8.5 Ebenen in $\mathbb{R}^3$

Die drei Fälle bei linearen Gleichungssystemen (inkonsistent, konsistent mit einer Lösung, konsistent mit unendlich vielen Lösungen) lassen sich in drei Dimensionen $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Damit schlagen wir auch eine Brücke zur Vektorgeometrie. Wir stellen fest, dass die lineare Gleichung $a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z = b$ einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ entspricht. Beim Aufstellen von linearen Gleichungssystemen suchen wir Punkte, die alle Gleichungen erfüllen, d.h. die Schnittmenge der Ebenen. Die folgenden Beispiele erläutern die möglichen Situationen.

Definition Homogene und inhomogene LGSs

Ein LGS, in dem alle Konstanten Null sind heisst **homogen**, sonst **inhomogen**.

Wir erkennen in $\mathbb{R}^3$, dass ein homogenes LGS der Situation entspricht, bei der alle Ebenen durch $\vec{0}$ verlaufen.

Beispiel 8.21 Schnittmengen von Ebenen in $\mathbb{R}^3$, die nicht durch $\vec{0}$ **331889**

Berechne die Schnittmenge der Ebenen.

a)

$$\left|\begin{array}{rcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2x+z & = & 2 \end{array}\right|$$

b)

$$\left|\begin{array}{rcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2y+z & = & 2 \\ x+3y-2z & = & 1 \end{array}\right|$$

c)

$$\left|\begin{array}{rcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2x+z & = & -3 \\ 3x+3y & = & -4 \end{array}\right|$$

d)

$$\left|\begin{array}{rcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2x+z & = & -3 \\ 3x+3y & = & 0 \end{array}\right|$$

Homogene LGSs: Ebenen, die durch $\vec{0}$ gehen

Beispiel 8.22 Ebenen in $\mathbb{R}^3$ **185060**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left| \begin{array}{lrcl} L_1: & -12y+6z & = & 0 \\ L_2: & 2x+6y-2z & = & 0 \\ L_3: & 4x-12y+8z & = & 0 \end{array} \right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

Infobox Die triviale Lösung eines homogenen LGS

Ein homogenes LGS hat stets die Lösung $\vec{0}$.

Aus der geometrischen Anschauung ist dies klar: Die Konstanten der Ebenen sind 0, d.h. alle Ebenen gehen durch den Ursprung und schneiden sich da also. In den Anwendungen interessiert uns aber diese Lösung oft nicht.

Beispiel 8.23 Ebenen in $\mathbb{R}^3$ **807042**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left| \begin{array}{lrcl} L_1: & -2y+4z & = & 0 \\ L_2: & 4x+16y+21z & = & 0 \\ L_3: & 2x+10y+6z & = & 0 \end{array} \right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

Infobox Lösungsmenge eines homogenen LGS

Ein homogenes LGS hat nur dann nicht-triviale Lösungen, falls die Ebenen eine spezielle Lage haben.
In diesen Fällen sind die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig.

KAPITEL 9

Matrixalgebra

Lernziele Begriffe Matrizen

- Die Studierenden können auf Zeilen und Spalten einer Matrix zugreifen über die Indices (in Matlab, wie auch auf dem Papier). Sie kennen die Transponierte einer Matrix.
- Sie können Matrizen addieren (subtrahieren) und mit Hilfe des Falk-Schema multiplizieren.
- Sie wissen, dass das Matrix-Produkt assoziativ und distributiv, aber nicht kommutativ ist.
- Sie können zwischen der elementweisen Multiplikation von Matrizen und dem Matrix-Produkt unterscheiden.
- Sie können das Produkt einer Matrix mit einem Spaltenvektor auch als Linearkombination der Spaltenvektoren oder als ‘Einsetzen einer Lösung in die Koeffizienten-Matrix’ interpretieren.

- Sie kennen einige spezielle Matrizen, u.a. die Einheitsmatrix, die Nullmatrix, Matrizen für Rotationen, Spiegelungen und Streckungen in der Ebene.
- Sie können mit dem Summenzeichen umgehen.

Im vorherigen Kapitel haben wir die erweiterte Koeffizienten-Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

kennen gelernt. Wir haben schon festgestellt, dass die Darstellung von linearen Gleichungssystemen in dieser Form praktisch ist, weil sie uns viel Schreibarbeit erspart und anderseits, weil sie übersichtlich ist und damit Fehler bei den Umformungen verhindert. Deshalb werden wir erforschen welche weiteren Probleme wir mit Hilfe von Matrizen lösen können.
Um das Wichtigste vorwegzunehmen: Wir werden finden, dass alle Fragestellungen, die lineare Gleichungssysteme beinhalten mit Matrizen geschrieben werden sollen. Und wir werden deshalb zahlreiche davon so formulieren, dass wir darin lineare Gleichungssysteme erkennen.

9.1 Zeilen und Spalten einer Matrix

Definition Matrix

Eine Matrix ist ein rechteckige Tabelle mit Zahlen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Die **Zeilen** der Matrix sind die m horrizontalen Listen

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \ \dots, \ (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

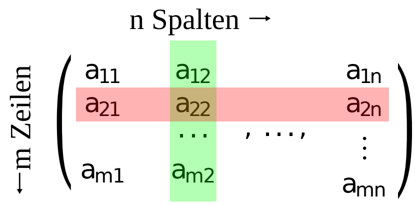
und die **Spalten** sind die n vertikalen Listen

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Oft werden wir die Matrix einfach mit einem Grossbuchstaben[1] schreiben $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Die Elemente a_{ij} stehen in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte.
Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennen wir eine m mal n Matrix und schreiben dafür entweder $m \times n$ oder $\mathbb{R}^{m \times n}$ um noch anzugeben, aus welchem Zahlenbereich die Einträge gewählt werden (hier aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$).

[1] in Fettschrift

Definition Spaltenvektor und Zeilenvektor



Eine Matrix mit einer Spalte nennen wir **Spaltenvektor**, eine Matrix mit einer Zeile nennen wir **Zeilenvektor**. Für die m mal n Matrix $\mathbf{A}$ schreiben wir die Spaltenvektoren auch als

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{:,1},\, \mathbf{a}_{:,2}, \ldots, ; \mathbf{a}_{:,n}]$$

und die Zeilenvektoren

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{1,:};\, \mathbf{a}_{2,:}; \ldots, ; \mathbf{a}_{m,:}]\ .$$

Wir übernehmen dabei die Notation aus Matlab: **,** bedeutet nächstes Element, **;** bedeutet nächste Zeile und **:** bedeutet 'nimm alle Einträge'.

Um zu betonen, dass es sich um Vektoren handelt, schreiben wir manchmal auch

$$\mathbf{A} = \left[\vec{A}_1,\, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n\right]$$

für die Spaltenvektoren und für die Zeilenvektoren

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1;\, \mathbf{A}_2; \ldots;\, \mathbf{A}_n]\ .$$

Beispiel 9.1 Zeilen und Spalten 711244

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Für $\mathbf{M}$ bestimme

a) die zweite Spalte,

b) die dritte Zeile,

c) die Dimension.

Beispiel 9.2 Zeilen und Spalten 600133

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 9 & 5 & 9 \\ 6 & -3 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $\mathbf{M}$ bestimme

a) die vierte Spalte,

b) die zweite Zeile,

c) die Dimension.

Definition Transponierte Matrix

Die Transponierte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ist } \mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & \dots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Die Elemente der transponierten Matrix $\mathbf{A}^\intercal$ sind

$$(a^\intercal)_{ij} = a_{ji} \ ,$$

d.h. die Indices werden vertauscht.

Definition Symmetrisch und antisymmetrische Matrizen

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heiss **symmetrisch**, falls

$$\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}$$

oder **antisymmetrisch** falls

$$\mathbf{A}^\intercal = -\mathbf{A}$$

Beispiel 9.3 Transponierte **869494**

Bestimme die Transponierte der folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 7 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Beispiel 9.4 Transponierte **758383**

Bestimme die Transponierte der folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 7 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Beispiel 9.5 Symmetrische/Antisymmetrische Matrizen 340726

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Transponierten und entscheiden Sie anschliessend, ob die Matrizen symmetrisch oder antisymmetrisch sind.

Satz Gesetze für die Transponierte

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\intercal = \mathbf{A}^\intercal + \mathbf{B}^\intercal$
- $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^\intercal = \mathbf{B}^\intercal \odot \mathbf{A}^\intercal$
- $(\mathbf{A}^\intercal)^\intercal = \mathbf{A}$

9.2 Summen von Matrizen, Multiplikation mit einer Zahl

Infobox Summen von Matrizen, Multiplikation mit einer Zahl

Die Matrix $\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann mit der Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden

$$\mathbf{C} = \lambda \cdot \mathbf{A} \text{ mit } c_{i,j} = \lambda \cdot a_{i,j} \; .$$

Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} = \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{R}^{k\times l}$ können addiert und subtrahiert werden

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \text{ mit } s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \text{ und } \mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{ mit } d_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$$

falls sie in den Dimensionen übereinstimmen, d.h. $m = k$ und $n = l$.

Selten benutzen wir auch die elementweise Multiplikation von Matrizen, falls Sie in den Dimensionen übereinstimmen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ mit } e_{i,j} = a_{i,j} \cdot b_{i,j}$$

Auf dem Papier notieren wir die elementweise Multiplikation mit $\cdot$ und in Matlab mit `.*`. Das Matrixprodukt hingegen ist auf dem Papier $\odot$ und in Matlab `*` .

Leider unterscheiden viele Texte nicht zwischen den beiden Arten der Multiplikation. Häufig wird dort einfach $\cdot$ oder nur ein Leerzeichen für die das Matrixprodukt geschrieben.

Beispiel 9.6 Summe Matrizen

Betrachten Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 7 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Überlegen Sie zuerst, welche der folgenden Ausdrücke existieren. Berechnen Sie dann die Resultate.

a) $\mathbf{C} + \mathbf{D}$

b) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

d) $2 \cdot \mathbf{A}$

Beispiel 9.7 Summe von Matrizen, Multiplikation mit Skalar **WEWKTK**

Betrachten Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 7 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \end{bmatrix}.$$

Überlegen Sie zuerst, welche der folgenden Ausdrücke existieren. Berechnen Sie dann die Resultate.
Befehle: **+ - .***

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T}$

b) $3 \cdot \mathbf{B}$

c) $\mathbf{E} + \mathbf{F}$

d) $\mathbf{E} + \mathbf{F}^\mathsf{T}$

e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}$

f) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}^\mathsf{T}$

g) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$

h) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{E}$

i) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$

j) $\mathbf{C}^\mathsf{T} \cdot \mathbf{C}$

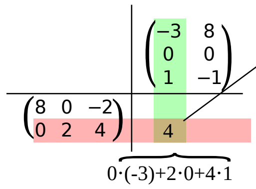
k) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}$

9.3 Matrix-Produkt mit dem Falk-Schema

Definition Matrix-Produkt, Falk-Schema

Mit dem Falk-Schema lassen sich die Produkte von Matrizen berechnen.

$$\mathrm{C} \odot \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 66 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$



1) Dazu werden die Matizen in ein Raster geschrieben. **C** links unten, **D** rechts oben

2) Jeder Kreuzungspunkt von einer Zeile und einer Spalte ergibt einen Eintrag in der resultierenden Matrix.

3) Die neuen Elemente berechnet man aus dem *Skalarprodukt* aus einer Zeile und einer Spalte.

Achtung: Das Matrix-Produkt existiert nur dann, wenn die Zeilen **C** und die Spalten **D** gleich viele Einträge haben.

Beispiel 9.8 Produkt von zwei Matrizen AIX1U0

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Berechne die Produkte

a) $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ b) $\mathbf{C} \odot \mathbf{D}$ c) $\mathbf{E} \odot \mathbf{F}$

Beispiel 9.9 Produkt von zwei Matrizen CKZ2V1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 5 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechne die Produkte

a) $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ b) $\mathbf{C} \odot \mathbf{D}$ c) $\mathbf{E} \odot \mathbf{F}$ d) $\mathbf{E} \odot \mathbf{C}$

Beispiel 9.10 Matrixprodukt **SY7RC5**

Wir haben $\mathbf{A}$ mit m Spalten und $\mathbf{B}$ mit p Zeilen. Das Matrix Produkt $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ existiert nur, falls $m = p$ Betrachten Sie nun die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 7 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \end{bmatrix},$$

Überlegen Sie zuerst, welche der folgenden Ausdrücke existieren. Berechnen Sie dann die Resultate.
Befehle: + - .*

a) $\mathbf{D} \odot \mathbf{C}$

b) $\mathbf{B} \odot \mathbf{F}$

c) $\mathbf{B} \odot \mathbf{F}^\intercal$

d) $\mathbf{E} \odot \mathbf{E}$

e) $\mathbf{F} \odot \mathbf{E}$

f) $\mathbf{C} \odot \mathbf{E}$

g) $\mathbf{C}^\intercal \odot \mathbf{C}$

h) $\mathbf{C} \odot \mathbf{F}$

i) $(\mathbf{C} + \mathbf{D}) \odot \mathbf{E}$

j) $(\mathbf{A}^\intercal + \mathbf{B}) \odot \mathbf{E}$

k) $(\mathbf{C}^\intercal + \mathbf{D}) \odot (\mathbf{B}^\intercal + \mathbf{A})$

9.4 Matrix-Produkt: assoziativ und distributiv, aber nicht kommutativ

Definition Matrixprodukt

Die Matrizen $\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{B} = \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ können multipliziert werden

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} \text{ mit } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

falls sie in den Dimensionen übereinstimmen, d.h. $m = p$.

a)

$$\mathrm{A} \odot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 24 & 12 \\ 55 & 62 & 52 \\ 75 & 54 & 41 \\ 66 & 21 & 38 \end{pmatrix} = \mathrm{C}$$

b)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 27 & 24 & 12 \\ 55 & 62 & 52 \\ 75 & 54 & 41 \\ 66 & 21 & 38 \end{pmatrix} \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 2 \\ 4 & b_{22} & 3 \\ 6 & b_{32} & 4 \\ 4 & b_{42} & 2 \\ 5 & b_{52} & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 3 & 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 27 & 24 & 12 \\ 55 & 62 & 52 \\ 75 & c_{32} & 41 \\ 66 & 21 & 38 \end{pmatrix} \end{array}$$

Abbildung 9.1: **a)** Wir betrachten das Produkt der Matrizen **A** und **B**. Das Resultat nennen wir C. **b)** Wir wählen einen Eintrag in **C** aus, und verfolgen rückwärts welche Zeilen und Spalten zu diesem Element einen Beitrag geleistet haben: Es ist die 3. Zeile in **A** und die 2. Spalte in B. **c)** Nun betrachten wir die Indices aller relevanten Zeilen und Spalten. Wir sehen, dass dies $a_{3,:}$ und $b_{:,2}$ sind. Aus der Summe $\sum_{k=1}^{5} a_{3,k} \cdot b_{k,2}$ ergibt sich $c_{3,2}$.

Definition Drehungen in $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{R}(\varphi)$ stellt eine Rotation im Gegenuhrzeigersinn in der $x-y$-Ebene dar.

Infobox Verknüpfung von Abbildungen

Das Ausführen von Transformationen nacheinander entspricht dem **Multiplizieren von Matrizen**.
Achtung bei der Reihenfolge: Für die eine Spiegelung **S** und die Drehung **R** bedeutet $\mathbf{S} \odot \mathbf{R} \odot \vec{v}$, dass der Vektor $\vec{v}$ **zuerst** gedreht und dann gespiegelt wird. Das ist etwas gewöhnungsbedürftig, weil wir sonst von links nach rechts lesen.

Beispiel 9.11 Eigenschaften der Matrixmultiplikation 2 **9Y8SWL**

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Berechne folgende Ausdrücke:

$$\mathbf{M} \odot \vec{v}, \ \mathbf{M} \odot \vec{w}, \ \mathbf{M} \odot (2\vec{v})$$

$$\mathbf{M}\odot(3\vec{w}),\ \mathbf{M}\odot(\vec{v}+\vec{w}),\ \mathbf{M}\odot(\vec{v}-\vec{w})$$

Berechne nun mit Hilfe der obigen Zwischenresultaten

$$\mathbf{M}\odot(\vec{v}+\vec{w})-(\mathbf{M}\odot\vec{v}+\mathbf{M}\odot\vec{w}),\ \mathbf{M}\odot(\vec{v}-\vec{w})-(\mathbf{M}\odot\vec{v}-\mathbf{M}\odot\vec{w})$$

$$\mathbf{M}\odot(2\vec{v})-2\mathbf{M}\odot\vec{v},\ \mathbf{M}\odot(3\vec{w})-(3\mathbf{M}\odot\vec{w})$$

Welche Rechenregeln lassen sich vermuten aufgrund der Resultate?

Beispiel 9.12 Rechenregeln Matrix-Multiplikation 1 **Y2ANUD**

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-8&0&-4\\4&6&3\\0&-3&-1\end{bmatrix},\ \mathbf{E}=\begin{bmatrix}-7\\0\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{P}=3\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-24&0&-12\\12&18&9\\0&-9&-3\end{bmatrix}$$

Wir berechnen

$$\mathbf{C}\odot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}48\\-22\\-2\end{pmatrix}\text{ und }\mathbf{P}\odot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}144\\-66\\-6\end{pmatrix}$$

a) Welchen Zusammenhang vermuten Sie?

b) Welchen Namen hat das Gesetz, das Sie entdeckt haben?

c) Können Sie Ihre Vermutung beweisen für allgemeine Matrizen?

Beispiel 9.13 Rechenregeln Matrix-Multiplikation 2 **Q5K4VQ**

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-8&0&-4\\4&6&3\\0&-3&-1\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&-4&-3\\7&9&2\\-1&0&-5\end{bmatrix},\ \mathbf{E}=\begin{bmatrix}-7\\0\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{S}=\mathbf{C}+\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-8&-4&-7\\11&15&5\\-1&-3&-6\end{bmatrix}$$

Wir berechnen

$$\mathbf{C}\odot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}48\\-22\\-2\end{pmatrix}\text{ und }\mathbf{D}\odot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-6\\-45\\-3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\odot\mathbf{E}+\mathbf{D}\odot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}42\\-67\\-5\end{pmatrix}\text{ und }\mathbf{S}\odot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}42\\-67\\-5\end{pmatrix}$$

a) Welchen Zusammenhang vermuten Sie?

b) Welchen Namen hat das Gesetz, das Sie entdeckt haben?

c) Können Sie ihre Vermutung beweisen für allgemeine Matrizen?

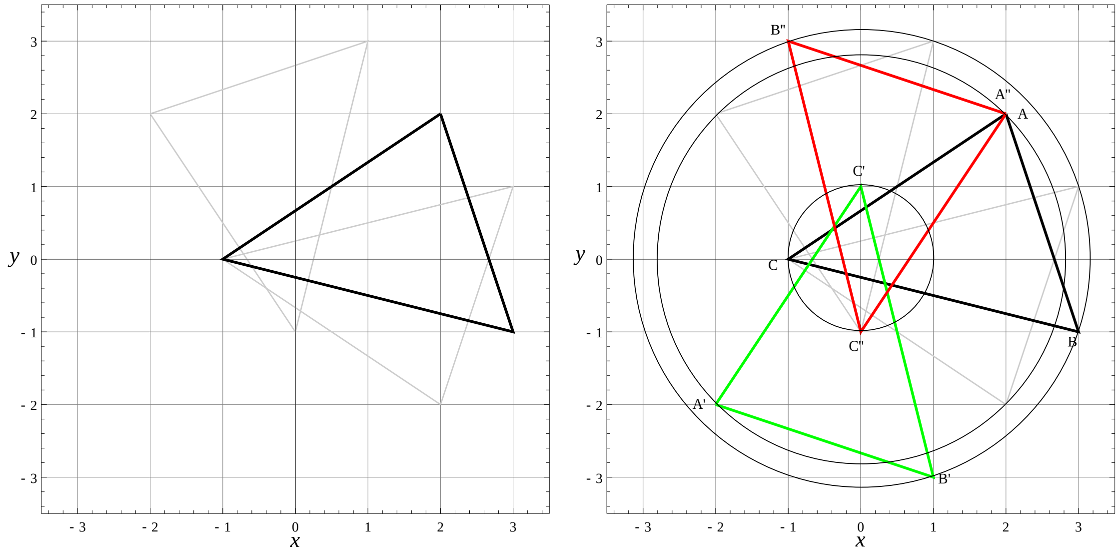


Abbildung 9.2: Zur Aufgabe 9.14

Beispiel 9.14 Verkettung von Abbildungen **926268**

Wir arbeiten mit folgenden Matrizen:

$$\mathbf{R}(90°) = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

d.h. mit der Drehung $\mathbf{R}$ um $\varphi = 90°$ und der Spiegelung an der x-Achse. Es soll das Dreieck ABC abgebildet werden:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Konstruieren Sie das Dreieck ABC gross auf ein Blatt Papier.

ii) Berechnen Sie die Position der Ecken unter der Abbildung $\mathbf{S} \odot \mathbf{R}$ und zeichnen Sie $A'B'C'$ in die Grafik ein.

iii) Berechnen Sie die Position der Ecken unter der Abbildung $\mathbf{R} \odot \mathbf{S}$ und zeichnen Sie $A''B''C''$ in die Grafik ein.

Satz Gesetze für das Matrixprodukt

- Die Matrix-Multiplikation ist im Allgemeinen **nicht kommutativ**

$$\mathbf{M} \odot \mathbf{S} \neq \mathbf{S} \odot \mathbf{M}\,.$$

  Es gibt aber spezielle Matrizen, trotzdem miteinander kommutieren.

- $(\mathbf{C}+\mathbf{D}) \odot \mathbf{E} = \mathbf{C} \odot \mathbf{E} + \mathbf{D} \odot \mathbf{E}$
- Für $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda \cdot \mathbf{D}) \odot \mathbf{E} = \lambda \cdot (\mathbf{D} \odot \mathbf{E}) = \mathbf{D} \odot (\lambda \cdot \mathbf{E})$
- $(\mathbf{C} \odot \mathbf{D}) \odot \mathbf{E} = \mathbf{C} \odot (\mathbf{D} \odot \mathbf{E})$

9.5 Koeffizienten Matrix, Rang

Um den Schreibaufwand zu verringern, können bei den Umformungen im Gaussverfahren die Unbekannten und die Gleichheitszeichen weggelassen werden. Wir schreiben dann das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{lllll} a_{11}\cdot x_1 & +a_{12}\cdot x_2 & +\dots & +a_{1n}\cdot x_n = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & +a_{22}\cdot x_2 & +\dots & +a_{2n}\cdot x_n = & b_2 \\ & \dots & & & \\ a_{m1}\cdot x_1 & +a_{m2}\cdot x_2 & +\dots & +a_{mn}\cdot x_n = & b_m \end{array}\right|.$$

als

Definition Erweiterte Koeffizienten-Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Beispiel 9.15 Erweiterte Koeffizienten-Matrix **958139**

Schreibe das lineare Gleichungssystem als **erweiterte Koeffizienten-Matrix** und löse es mit dem Gauss-Verfahren:

$$\left|\begin{array}{llll} x & +y & +z = & -6 \\ x & +2y & +3z = & -10 \\ 2x & +3y & +6z = & -18 \end{array}\right|$$

Beispiel 9.16 Rang Koeffizienten Matrix **UHXGXT**

Beschreiben Sie die LGS aus dem Beispiel 8.4 mit folgenden Fachausdrücken

- Rang Koeffizientenmatrix
- Rang der erweiterten Koeffizeitenmatrix
- konsistentes/inkonsistentes LGS

Beispiel 9.17 Konsistentes LGS **0ZDJ5L**

Bestimme m, so dass das LGS konsistent ist. Bestimme dann für den gefundenen Wert die ganze Lösungsmenge (=allgemeine Lösung) des LGS.

a) $\left|\begin{array}{llllr} 2x & +y & +3z & = & -5 \\ 3x & -y & +4z & = & 2 \\ 5x & & +7z & = & m-5 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{cccccc} -3x & +2y & +3z & = & 1 \\ 4x & -y & -5z & = & -5 \\ x & -y & -2z & = & m-3 \end{array}\right|$

9.6 Standardform von linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungsysteme sind ein wichtiges Thema in der linearen Algebra. Wie wir sehen werden, können viele Aufgaben auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden.

Definition Lineare Gleichung

Eine **lineare Gleichung** in den Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist eine Gleichung, die sich in der Standard-Form

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$$

schreiben lässt, mit den Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ und der Konstanten b.
Eine **Lösung der linearen Gleichung** ist die Liste

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

die eingesetzt in die lineare Gleichung die wahre Aussage

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \ldots + a_n \cdot u_n = b$$

ergibt.
Wir rechnen in $\mathbb{R}$, also $a_1, a_2, \ldots a_n,\ b\ \in \mathbb{R}$

In der Definition haben wir die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ genannt. Wenn wir diese Indices vermeiden wollen schreiben wir stattdessen x, y, z und beschränken uns auf drei Dimensionen.

Beispiel 9.18 Lösung einer linearen Gleichung T9XYMD

Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lösungen der folgenden linearen Gleichung?

$$5x + 2y - z = 3$$

Beispiel 9.19 Lösung einer linearen Gleichung 56BJQY

Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Lösungen der folgenden linearen Gleichung?

$$x + 2y - 3z = 6$$

Wir notieren die Lösungen von LGSs in diesem Kapitel zwar mit Kleinbuchstaben z.B. $\vec{u}$. Diese Lösung kann manchmal einen Aufpunkt (Schnittpunkt) beinhalten, den wir im vorherigen Kapitel mit $\vec{A}$ notiert hätten. Wir bewegen uns am Schnittpunkt von Bereichen der Mathematik (darstellende Geometrie/ lineare Algebra), die verschiedene Notationen verwenden. Deshalb ist eine Notation, die in beiden Gebieten anwendbar ist, schwierig zu finden.

Definition Lineares Gleichungssystem, LGS 969291

Ein **lineares Gleichungssystem** ist eine Liste von linearen Gleichung in den selben Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Wir systematisieren die Schreibweise noch weiter:

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_{11} \cdot x_1 & +a_{12} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & +a_{22} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & \cdots & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & +a_{m2} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array} \right|$$

Dabei bezeichnet m die Anzahl der linearen Gleichungen. Die Koeffizienten a_{ij} haben jetzt zwei Indices. Der erste Index i bezeichnet die Nummer der Gleichung, der zweite bezeichnet die Unbekannte, zu der der Koeffizient gehört. Ebenfalls bezeichnet b_i, die Konstante in der i-ten Gleichung.

Ausserdem wird ein lineares Gleichungssystem **quadratisch** genannt, wenn es gleich viele Gleichungen wie Unbekannte hat $m = n$.
Ein lineares Gleichungssystem heisst **homogen**, falls

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Andernfalls heisst es **inhomogen**.

Beispiel 9.20 Lösung eines linearen Gleichungssystems **500997**

Betrachte das System

$$\left|\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +4\cdot x_3 & +3\cdot x_4 = & 5 \\ 2\cdot x_1 & +3\cdot x_2 & +x_3 & -2\cdot x_4 = & 1 \\ x_1 & +2\cdot x_2 & -5\cdot x_3 & +4\cdot x_4 = & 3 \end{array}\right| .$$

Sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems?

Beispiel 9.21 Lösung eines LGS **851082**

Welcher der Vektoren erfüllt das lineare Gleichungssystem?

a) Setzen Sie dafür in das LGS ein.

b) Überprüfen Sie ihr Resultat mit Matlab indem Sie die Lösung mit der Koeffizienten-Matrix multiplizieren.

a)

$$\left|\begin{array}{cccccc} E_1: & & -2y & & = & 2 \\ E_2: & 4x & -4y & +12z & = & 20 \\ E_3: & 2x & & +6z & = & 8 \end{array}\right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\left|\begin{array}{cccccc} E_1: & & -2y & & = & 0 \\ E_2: & 8x & +4y & +12z & = & 16 \\ E_3: & 4x & +4y & +6z & = & 8 \end{array}\right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

9.7 Produkt einer Matrix mit einem Vektor

Infobox Interpretation des Matrix-Produkts

Das Produkt einer Matrix mit einem Spaltenvektor kann interpretiert werden als

- als Linearkombination der Spaltenvektoren
- als 'Einsetzen einer Lösung in die Koeffizienten-Matrix'
- als Abbildung des Vektors (z.B. es wird ein Vektor gedreht oder gespiegelt).

Beispiel 9.22 Linearkombination **LQF58M**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \ \vec{l} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Berechne folgende Ausdrücke

a) $-1 \cdot \vec{u} + 6 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w}$

b) $\mathbf{A} \odot \vec{l}$

Beispiel 9.23 Linearkombination **T46Q97**

Stellen Sie folgende Linearkombinationen als Matrix-Produkt dar. Berechnen Sie dann den Vektor.

a)

$$-8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$-4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Beispiel 9.24 Matrix mal Vektor = Einsetzen in Koeffizientenmatrix **CNNZ8U**

Wir betrachten das LGS

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ E_2: & 6x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array} \right|$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

der *partikulären Lösung* (Aufpunkt)

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und der *homogenen Lösung* (Richtungsvektor)

$$\vec{x}_h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{A} \odot \vec{x}_p$

b) Setzen Sie $\vec{x}_p$ in die linke Seite des Gleichungssystems ein

c) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{A} \odot \vec{x}_h$.

d) Geben Sie möglichst viele Lösungen des LGS an.

Beispiel 9.25 Matrix mal Vektor = Einsetzen in Koeffizientenmatrix **XGQ-MA7**

Handelt es sich bei den Lösungen unten um partikuläre Lösungen, homogene Lösungen oder gar keine Lösung?
Befehle: $\star$

a)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & 4x & +4y & -16z & = & 4 \\ E_2: & x & & -4z & = & 2 \\ E_3: & 5x & +2y & -20z & = & 8 \end{array} \right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left| \begin{array}{lrrrcr} E_1: & 3x_1 & +5x_2 & -x_3 & = & 7 \\ E_2: & -x_1 & +5x_2 & -6x_3 & = & 0 \end{array} \right|$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -25/20 \\ 19/20 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 35/20 \\ 7/20 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 26/20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 9.26 Homogene und partikuläre Lösung **XM6UY5**

Wir betrachten das LGS

$$\mathbf{A} \odot \vec{x} = \vec{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, den Unbekannnten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und der Inhomogenität $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Es sei $\vec{x}_p$ eine partikuläre Lösung. Ausserdem sei $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) < \mathrm{m}$, d.h. es gibt eine homogene Lösung $\vec{x}_h$.

a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$\mathbf{A} \odot \vec{x}_p,\ \mathbf{A} \odot \vec{x}_h,\ \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p + \vec{x}_h),\ \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p - 3\cdot\vec{x}_h),\ \mathbf{A} \odot (\vec{x}_p - \lambda\cdot\vec{x}_h)$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die Lösung eines LGs stets die Form $\vec{x}_p + \lambda\cdot\vec{x}_h$ hat.

9.8 Spezielle Matrizen

Beispiel 9.27 Spezielle Matrizen **653JPW**

Matritzen stellen Abbildungen von Vektoren dar. Sie drehen, spiegeln, projizieren oder strecken Vektoren. Hier lernen Sie typische Matrizen kennen. Wir arbeiten mit dem Dreieck:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie es gross auf. Benennen Sie die jeweiligen Abbildungen mit Worten, z.B. Drehung, Spiegelung, Projektion usw. Beachte dazu die Innenwinkel des Dreiecks, die Kantenlängen und den Umlaufsinn des Dreiecks.

a) Berechne und zeichne das Bild des Dreiecks unter der Abbildung $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

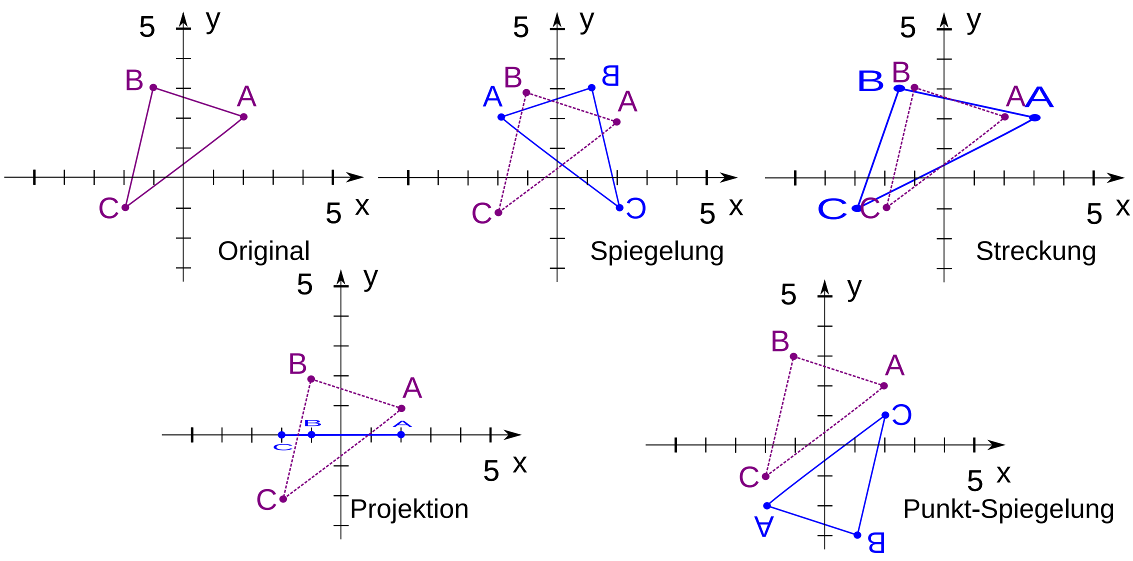


Abbildung 9.3: Zur Aufgabe 9.27. Das Original-Dreieck und die vier Bilder.

Definition Abbildungen in R^2

Folgende Matrizen können als Abbildungen interpretiert werden ($s \in \mathbb{R}$):

- $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Spiegelung an der y-Achse
- $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Spiegelung an der x-Achse
- $\mathrm{M}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Punktspiegelung an $\vec{0}$.
- $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Streckung entlang der x-Achse
- $\mathrm{S}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$: Streckung entlang der y-Achse
- $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: Projektion auf die x-Achse

Definition Quadratische Matrizen

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ hat gleich viele Spalten wie Zeilen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Definition Diagonalmatrix

Eine quadratische Matrix heisst Diagonalmatrix, falls alle Elemente ausserhalb der Diagonalen gleich 0 sind

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Wir schreiben auch $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, wobei a_{ii}, die Diagonalelemente sind.

Sind alle Diagonalelemente 1, so erhalten wir die Einheitsmatrix und kürzen sie mit $\mathbb{1}$ ab.
Sind alle Diagonalelemente 0, so erhalten wir die Nullmatrix und kürzen sie mit ab.

Beispiel 9.28 Symmetrische und antisymmetrische Matrizen TKB9RA

Wir betrachten jetzt nur quadatische Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir nennen eine Matrix symmetrisch, falls gilt $\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}$ und antisymmetrisch falls $\mathbf{A}^\intercal = -\mathbf{A}$.

a) Ergänzen Sie die folgenden Matrizen zu symmetrischen und antisymmetrischen Matrizen.
Symmetrisch:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \square & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 8 \\ \square & 6 & 9 \\ \square & \square & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & \square & \square \\ -1 & 8 & 7 \\ 5 & \square & -2 \end{bmatrix}$$

Antisymmetrisch:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ \square & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \square & -1 & 8 \\ \square & \square & 9 \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \square & \square & 6 \\ -1 & \square & \square \\ \square & 7 & \square \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{A}^\intercal + \mathbf{A}}{2}$, $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{A}^\intercal - \mathbf{A}}{2}$ und $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ für folgende Matrizen, wobei sie für $\mathbf{A}$ nacheinander die Matrizen $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ oder $\mathbf{J}$ einsetzen. Was stellen

Sie fest?

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -10 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -10 \\ 4 & -8 & -3 \\ 9 & 10 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Fassen Sie die Resultate von dieser Aufgabe zusammen. Beantworten Sie mindestens folgende Fragen: Wie sieht die Diagonale einer antisymmetrischen Matrix aus? Welche Symmetrie haben die Matrizen $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{A}^\intercal + \mathbf{A}}{2}$ und $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{A}^\intercal - \mathbf{A}}{2}$? Was ergibt $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$

d) Überlegen Sie, wie Sie $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\intercal$ aus den Transponierten $\mathbf{A}^\intercal$ und $\mathbf{B}^\intercal$ und berechnen können. Was bedeutet $(\mathbf{B}^\intercal)^\intercal$? Beweisen Sie damit Ihre Vermutungen aus der vorherigen Teilaufgabe.

9.9 Das Summenzeichen

Das Summenzeichen $\sum$ erspart uns viel Schreibarbeit. Wir benutzen dazu das Σ (Sigma) aus dem griechischen Alphabet, weil der Buchstaben gleich klingt wie das 'S' im Wort Summe.

Definition Summenzeichen, Bezeichnungen

$$\sum_{i=1}^{18} a_i$$

- a: Summationsvariable
- i: Laufindex. Sie nimmt hier die Werte von 1 bis 18 in aufsteigender Folge an
- 1 : untere Grenze
- 18 : obere Grenze

Die Wahl der Bezeichnung des Laufindex ist nicht von Bedeutung. Gewöhnlich werden hierfür i, k oder j verwendet.

Beispiel 9.29 Summenzeichen **8721LM**

Schreiben Sie die Summe mit dem Summenzeichen

a)

$$V = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12$$

b)

$$W = 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{10} + 4^{11} + 4^{12}$$

c)

$$X = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

d) Benutzen Sie die Summe $\sum_{i=1}^{N} i$

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 32 + 34 + 36$$

e) Benutzen Sie links die Summe $\sum_{i=1}^{N} i$

$$P = 1+2+3+4+\ldots+8+5+10+15+\ldots+40 = 1+5+2+10+3+15+\ldots+8+40$$

f) Welche Umformungen beim Summenzeichen können Sie aus den obigen Aufgaben ableiten?

Infobox Gesetze für das Summenzeichen

- Ausklammern (Multiplikation mit einer Konstanten):

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Umordnen (Zerlegen in Teilsummen):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Achtung: Aus der Summe darf nur ausgeklammert werden, was nicht vom Laufindex abhängt.

Beispiel 9.30 Schreiben Sie die Summen aus **W315NQ**

a) $\sum_{i=1}^{5} i^3$

b) $\sum_{i=2}^{7} (2-i)$

c) $\sum_{i=0}^{4} (i+1)^2$

d) $\sum_{i=3}^{8} (10 - \frac{i}{2})$

e) $\sum_{i=2}^{6} (-i)^i$

f) $\sum_{i=0}^{5} \frac{i}{i+2}$

Beispiel 9.31 Ermitteln Sie die Grenzen **N3J50P**

a)

$$\sum \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ \dots \ + \frac{1}{10}$$

b)

$$\sum \frac{2^k}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \ \dots \ + \frac{4\,096}{3}$$

c)

$$\sum (-1)^i \cdot i^2 = (-9) + 16 - 25 + \ \dots \ + 324$$

d)

$$\sum (4j^2 - j) = 14 + 33 + 60 + 96 + \ \dots \ + 1\,580$$

Satz Summen Zusammenstellung

- Summe der Einsen
$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$
- Summe der Indices
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
- Summe von Quadraten
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$
- Summe von Kuben
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{2^2}$$
- Exponentialsumme
$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Falls eine Grenze gegen ∞ oder $-\infty$ geht, sprechen wir von Reihen. Summen der Form $\sum_{i=1}^{n} i$ sind dann algebraische Reihen und Summen der Form $\sum_{k=0}^{n} r^k$ sind dann geometrische Reihen. Ihre Konvergenz wird in der Analysis besprochen.

Beispiel 9.32 Rechenregeln für Summen **R4K83X**

a) $\sum_{i=1}^{15} 4i - 5$

b) $\sum_{k=0}^{8} \frac{3^k}{4}$

Beispiel 9.33 Rechenregeln für Summen **R7B3FX**

a) $\sum_{i=1}^{10} (3i)^2$

b) $\sum_{i=0}^{9} 2^{i+1}$

c) $\sum_{i=1}^{15} i^2 - 5$

d) $\sum_{i=1}^{11} (3i-1) \cdot (3i+1)$

Beispiel 9.34 Indexverschiebung **2ZXHEU**

$$\sum_{i=6}^{10} (i-1)$$

Beispiel 9.35 Indexverschiebung — VUMP0V

Bestimmen Sie die Werte der Platzhalter $\square$

a) $\sum_{i=4}^{10}(i+4) = \sum_{k=1}^{\square}(\square)$

b) $\sum_{i=2}^{8}(3-i) = \sum_{k=1}^{\square}(\square)$

c) $\sum_{i=5}^{20}(i^2+2i) = \sum_{k=\square}^{17}(\square)$

d) $\sum_{i=6}^{10}(25-10i+i^2) = \sum_{k=1}^{\square}(\square)$

e) $\sum_{j=6}^{10} \frac{1}{4} \cdot 3^j = \sum_{k=0}^{\square}(\square)$

f) $\sum_{j=2}^{80} \left(1+\frac{1}{4}\right)^j = \sum_{k=\square}^{78}(\square)$

Beispiel 9.36 Rechenregeln + Indexverschiebung für Summen — 2W2RMM

Benutzen Sie die Regeln unten um die Summen zu berechnen.

a) $\sum_{i=0}^{15} 5+3i$

b) $\sum_{i=0}^{9} 50-5i$

c) $\sum_{i=5}^{10} \frac{i\cdot(i+1)}{2}$

d) $\sum_{i=0}^{12} 1+(i+3)^2$

e) $\sum_{j=1}^{18} 3^{j-10}$

f) $\sum_{i=2}^{8}(-5)^i$

KAPITEL 10

Lineare Abbildung

Lernziele Lineare Abbildung

- Die Studierenden können die Linearität einer Abbildung L überprüfen. Sie kennen wichtige Merkmale einer linearen Abbildung z.B. $\mathcal{L}(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Sie können Matrizen der Darstellung einer linearen Abbildung in einer Basis berechnen.
- Sie können aus den Matrizen $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ der Darstellungen von lineare Abbildungen $(\mathcal{F}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{x}))$ die entsprechende Darstellungen berechnen.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(\vec{x}) & \leftrightarrow & \mathbf{M} \odot \vec{x} \\
\mathcal{H}(\vec{x}) & \leftrightarrow & \mathbf{N} \odot \vec{x} \\
\lambda \cdot \mathcal{F}(\vec{x}) & \leftrightarrow & \lambda \cdot \mathbf{M} \odot \vec{x} \\
\mathcal{F}(\vec{x}) + H(\vec{x}) & \leftrightarrow & (\mathbf{M} + \mathbf{N}) \odot \vec{x} \\
\mathcal{F}\big(\mathcal{H}(\vec{x})\big) & \leftrightarrow & \mathbf{M} \odot \mathbf{N} \odot \vec{x}
\end{array}$$

- Sie können Matrizen angeben, die Zeilenoperationen entsprechen

10.1 Linearität einer Abbildung $\mathcal{L}$ überprüfen

Abbildungen (Funktion)

Definition Abbildung/Funktion

Eine Abbildung (oder Funktion) $\mathcal{L}$ ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu.

$$\mathcal{L} : D \to Z, \quad x \mapsto y$$

Wir nennen

- x das Argument der Abbildung
- $y = \mathcal{L}(x)$ das Bild von x (oder den Funktionswert).

Infobox Begriffe: Abbildungen (Funktionen)

- Wir stellen uns Abbildungen gerne als Maschinen $\mathcal{L}(x)$ vor. In die Klammer (x) schreiben wir das, was wir der Maschine zur Verarbeitung übergeben.
- Wir nennen x auch den Input oder – wie oben – das Argument von $\mathcal{L}$
- Wir nennen $y = \mathcal{L}(x)$ auch den Output oder – wie oben – das Bild von x
- Sie haben bisher Abbildungen sicherlich unter dem Begriff 'Funktion' kennengelernt, z.B. $f(x) = x^2$ oder $g(x) = \sin(x)$. In unserem aktuellen Kontext würden wir schreiben $\mathcal{L}(x) = x^2$ oder $\mathcal{G}(x) = \sin(x)$ und für diese beiden Funktionen angeben $\mathcal{L} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ und auch $G : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$
- Wird eine Abbildung allgemein angegeben $\mathcal{L}(\vec{x})$, dann nehmen wir an, dass die Definitionsmenge $\mathbb{R}^m$ ist und die Zielmenge $\mathbb{R}^n$, mit $m, n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 10.1 Zwei Notationen für lineare Abbildungen J2MVFF

Geben Sie die Abbildungen in beiden Notationen an. Geben Sie an, für welchen Input die Funktion definiert ist und welche Dimension der Output hat.

$$\mathcal{L}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -3y \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Benutze auch $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Beispiel 10.2 Zwei Notationen für lineare Abbildungen AP4X4W

Geben Sie die folgenden Abbildungen in alle Notationen an. Geben Sie an, für welchen Input die Funktion definiert ist und welche Dimension der Output hat.

a) $\mathcal{L}(x, y, z) = 5x - y + 1$

b) $\mathcal{R}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{w}$ mit $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

c) $\mathcal{P}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix}$ und $x, y, \varphi \in \mathbb{R}$

d) $\mathcal{C}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{v}$ wobei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

10.2 Linearität

Definition Lineare Abbildung

Eine Abbildung $\mathcal{L} : V \to W, \vec{v} \mapsto \mathcal{L}(\vec{v})$ heisst **linear** genau dann, wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und λ gilt:

- **Homogenität**: $\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v})$
- **Additivität**: $\mathcal{L}(\vec{v} + \vec{w}) = \mathcal{L}(\vec{v}) + \mathcal{L}(\vec{w})$

Dabei sind sind V und W Vektorräume, z.B $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Skalar.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.454]

Beispiel 10.3 Linearität **IMSW1Y**

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear oder nicht linear sind.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

a) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{w}$ mit $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

b) $\mathcal{R}(x, y, z) = 5x - y + 1$

Beispiel 10.4 Bild des Nullvektors **RGK9W3**

Wir betrachten die lineare Abbildung $\mathcal{L} : V \to W$, die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

a) Berechnen Sie $\mathcal{L}(\vec{0})$

b) Stellen Sie $\mathcal{C}(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2)$ mit Hilfe von $\mathcal{C}(\vec{x}_1)$ und $\mathcal{C}(\vec{x}_2)$ dar.

Satz Eigenschaften linearer Abbildungen

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\mathcal{L} : V \to W$, die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

- Der Nullvektor $\vec{0}$ in V wird auf den Nullvektor $\vec{0}$ in W abgebildet:

$$\mathcal{L}\left(\vec{0}\right) = \vec{0}\,.$$

  Es kann aber weitere Vektoren $\vec{x} \neq 0$ mit $\mathcal{L}\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$ geben.

- Das Bild einer Linearkombination von Vektoren ist gleich der Linearkombination der Bildvektoren, oder

$$\mathcal{L}(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot \mathcal{L}(\vec{x}_1) + \lambda_2 \cdot \mathcal{L}(\vec{x}_2)$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.454]
Finden wir $L(\vec{0}) \neq \vec{0}$, dann ist die Abbildung sicher nicht linear.

Beispiel 10.5 Linearität **8AVYCE**

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

a) $\mathcal{L}(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}^1$.

b) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos(v_1) \\ \sin(v_2) \end{pmatrix}$ mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

c) $\mathcal{L}(x, y, z) = 5x - y + 1$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Infobox Beweis der Linearität

Beim Beweis der **Homogenität** macht man typischerweise folgende Schritte (hier gezeigt an der Funktion $\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{v}) \odot \vec{w}$, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ mit $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$):

i) Funktion auswerten

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \odot \vec{w}$$

ii) λ ausklammern $\lambda(\cdot \vec{v} \odot \vec{w})$

iii) für einen Ausdruck wieder $\mathcal{L}(\vec{v})$ schreiben

$$\lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v})$$

Für die **Additivität** sind dies ähnliche Schritte:

i) Funktion auswerten

$$\mathcal{L}(\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) \odot \vec{w}$$

ii) Ausdruck aufteilen (ausmultiplizieren): $\vec{u} \odot \vec{w} + \vec{v} \odot \vec{w}$

iii) Ausdrücke mit Hilfe von L schreiben

$$\mathcal{L}(\vec{u}) + \mathcal{L}(\vec{v})$$

Beispiel 10.6 Lineare Funktion **QKBUT2**

a) Wir betrachten die Funktion $f(x) = -3x$ also $f : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Funktionswerte für

$$a = 3,\ b = 2,\ c = 3 + 2,\ b = 5 \cdot 3$$

b) Betrachten Sie ihre Resultate und formulieren Sie eine Hypthese, wie man die Funktionswerte für $u = v + w$ und $p = \lambda \cdot v$ berechnen kann, wenn man die Bilder $f(v)$ und $f(w)$ kennt.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = m \cdot x$ linear ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = m \cdot x + c$ linear ist.

Beispiel 10.7 Matrix $\odot$ Vektor linear? **591417**

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathcal{L}(\vec{v}) := \mathbf{M} \odot \vec{a} =: \vec{b}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Durch die Multiplikation der Matrix mit einem Vektor haben wir also eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, denn $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob diese Abbildung linear ist, d.h. ob gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\lambda \cdot \vec{v}) & = & \lambda \cdot \mathcal{L}(\vec{v}) \\ \mathcal{L}(\vec{v}+\vec{w}) & = & \mathcal{L}(\vec{v})+\mathcal{L}(\vec{w}) \end{array}$$

also

$$\mathbf{M} \odot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}) \ .$$

und

$$\mathbf{M} \odot (\vec{v}+\vec{w}) = \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}$$

Betrachten Sie in diesem Beispiel vorläufig nur die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda = 3$$

Wir werden später sehen, dass es viele Beispiele gibt für lineare Abbildungen — auch bei Themen, wo wir es nicht vermutet hätten. Der nachfolgende Satz besagt, dass die Matrix-Multiplikation ein Beispiel für eine lineare Abbildung ist.

Satz Matrix-Vektor-Multiplikation als lineare Abbildung

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Die Abbildung

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

mit $\mathcal{L}(\vec{v}) := \mathbf{A} \odot \vec{v}$ **ist linear**.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.456]

Wir hätten die Abbildung im Satz 10.2 auch mit dem Ausdruck

$$\vec{v} \mapsto \mathcal{L}(\vec{v}) := \mathbf{A} \odot \vec{v}$$

definieren können.

Beispiel 10.8 Linearität **YHRNU8**

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix in der Standard-Basis an.

Wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

a) $\mathcal{L}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cdot x \\ \sin(\varphi)\cdot y \end{pmatrix}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$

b) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{v}$.

c) $\mathcal{L}(x,y) = (5y + 2x)$

d) $\mathcal{L}(\vec{v}) = -\vec{v}$

e) $\mathcal{L}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

f) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$

g) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$

h) $\mathcal{L}(\vec{v}) = v_1$

i) $\mathcal{L}(\vec{v}) = (v_1)^2$

j) $\mathcal{L}(\vec{v}) = v_1 + 1$

k) $\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3v_1 - 4v_2 \\ v_1 + 5v_2 \end{pmatrix}$

Beispiel 10.9 Überprüfe, ob die Abbildung L linear ist. **410717**

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{101}\begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix}$$

und $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Bestimme danach die Matrix M, für die gilt

$$L(\vec{v}) = \mathbf{M} \odot \vec{v} \,.$$

10.3 Matrix der Darstellung einer linearen Abbildung berechnen

Satz Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix

Zu jeder linearen Abbildung

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

gibt es genau eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so dass

$$\mathcal{L}\left(\vec{x}\right) = \mathbf{A} \odot \vec{x} \,.$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.457]
Der Satz bedeutet, dass es zu jeder linearen Abbildung eine Matrix gibt, die erlaubt das Bild zu berechnen mit Hilfe der Matrix **A** und der Matrixmultiplikation

$$\mathcal{L}\left(\vec{x}\right) = \mathbf{A} \odot \vec{x} \,.$$

Infobox Matrix der Darstellung

Zur linearen Abbildung $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und der Basis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2 \ldots\ \vec{e}_m$ gehört die Matrix

$$\mathbf{A} = [\mathcal{L}(\vec{e}_1),\ L(\vec{e}_2),\ \ldots]\ .$$

Sie enthält in den Spalten die Bilder der Basisvektoren. $\mathcal{L}(\vec{e}_j) \in \mathbb{R}^n$, also ist $\mathbf{A}$ eine $n \times m$-Matrix.

Beispiel 10.10 Matrix der Spiegelung GNJDG3

Bestimme die Matrix der Spiegelung an der y-Achse. Vorgehen:

a) Spiegle den Punkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ an der y-Achse

b) Spiegle die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an der y-Achse.

c) Bestimme die Matrix **S** der Spiegelung an der y-Achse

d) Überprüfe das Resultat indem du $\mathbf{S} \odot \vec{A}$ berechnest.

Beispiel 10.11 Bestimme die Matrix der Abbildung, falls sie linear ist. 155513

a) $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $\mathcal{L}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $\mathcal{L}(x, y) = 1$

c) $\mathcal{D}: \mathbb{P}(n) \mapsto \mathbb{P}(n)$ definiert durch $\mathcal{D}(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$. $\mathbb{P}$ sind alle Polynome von Grad n

d) $\mathcal{D}: \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}$ definiert durch $\mathcal{D}(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$. $\mathbb{T}$ ist zweidimesional mit der Basis $\vec{e}_1 = \cos(x)$ und $\vec{e}_2 = \sin(x)$

Beispiel 10.12 Projektionen EPVI4M

Wir betrachten die Projektion auf die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

a) Projizieren Sie folgende Punkte auf die Gerade.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \end{pmatrix},\quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix},\quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix}$$

b) Betrachten Sie Ihre Resultate und formulieren Sie eine Hypthese, wie man die Projektionen der Vektoren $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ und $\vec{y} = \lambda \cdot \vec{v}$ berechnen kann, wenn man die Bilder $P(\vec{v})$ und $P(\vec{w})$ kennt. Hier bedeutet $P(\vec{w})$, dass $\vec{w}$ auf den Punkt $P(\vec{w}) \in \mathbb{R}^2$ fällt durch die Projektion.

c) Geben Sie die Projektion auf die Gerade $h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\vec{a}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ an. Untersuchen Sie, ob diese Projektion linear ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Projektion auf die die Gerade $j: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{R} + \lambda\vec{a}$ $(\lambda \in \mathbb{R}$, und $\vec{R} \neq \vec{0})$ linear ist

Beispiel 10.13 Bestimme die Matrix der Projektion auf die Gerade $g: y = -10x$. **051137**

Beispiel 10.14 Matrix einer linearen Abbildung **WEWKTK**

Wir betrachten

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \text{ und } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} \end{bmatrix}$$

und und eine lineare Abbildung $L: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$.

a) Drücken Sie den Vektor $L(\vec{a})$ mit Hilfe von $L(\vec{e}_1)$ und $L(\vec{e}_2)$ aus.

b) Benutzen Sie die Spalten-Vektoren von $\mathbf{M}$ um das Produkt

$$\mathbf{M} \odot \vec{a}$$

auszudrücken.

c) Zeigen Sie damit, dass die Darstellung von L die Matrix $\mathbf{M} = [L(\vec{e}_1),\ L(\vec{e}_2)]$ ist.

Beispiel 10.15 Verkettung linearer Abbildungen **370598**

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC

b) Spiegeln Sie es an der x-Achse $A'B'C'$.

c) Strecken Sie dann das Bild um den Faktor 2 in x-Richtung.

d) Berechnen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{S} \odot \mathbf{M}$

Transformationen: Spiegelung x-Achse: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Streckung um Faktor 2 in x-Richtung: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Punkte:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 10.16 Verkettung linearer Abbildungen **844538**

Zeichen Sie, dass die Operatoren $L(p(x)) = x \cdot p(x)$ und $D(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x) = p(x)'$ linear sind.
Zeigen Sie anhand des Polynoms $p(x) = 4 + 3x + 2x^2 + x^3$, dass

$$L\left(D(p(x))\right) = D\left(L(p(x))\right)$$

nicht gilt.

Beispiel 10.17 Darstellung einer lineare Abbildung als Matrix **738430**

Es sei $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ferner bilden

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

das Dreieck ABC.

a) Berechnen Sie die Produkte $\vec{A'} = \mathbf{P} \odot \vec{A}$, $\vec{B'} = \mathbf{P} \odot \vec{B}$ und $\vec{C'} = \mathbf{P} \odot \vec{C}$. Zeichnen Sie die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in ein Koordinatensystem ein. Was ist der "Effekt der Matrix **P**" auf das Dreieck?

b) Bestimmen Sie die Matrix **M** die das Dreieck an der y-Achse spiegelt und bestimmen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung **M**.

c) Bestimmen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{M} \odot \mathbf{P}$.

d) Bestimmen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{P} \odot \mathbf{M}$.

e) Vergleichen Sie die Resultate aus den beiden letzten Teilaufgaben. Was schliessen Sie daraus? Wie erklären Sie sich das Resultat?

KAPITEL 11

Python

Lernziele Python

- Die Studierenden können Funktionen in Python benutzen.
- Sie können Listen und Arrays benutzen in Python.
- Sie können lineare Gleichugnssysteme lösen in Python (`rref`, `null`).
- Sie können mit Hilfe von Python Graphen von Funktionen erzeugen.
- Sie können in Python symbolisch rechnen.

11.1 Grundoperationen

Infobox Grundoperationen und Konstanten π, e

Wir benutzen die numpy-Bibliothek und nennen sie `np`, deshalb werden Funktionen aus dieser Bibliothek z.B. mit `np.sqrt(9)` aufgerufen.

`+`	Plus
`-`	Minus
`*`	Skalare-Multiplikation und elementweise Multiplikation von Matrizen
`/`	Skalare-Division und elementweise Division von Matrizen
`sqrt(x)`	Quadratwurzel $\sqrt{x}$
`pi`	π
`exp(1)`	Eulersche Konstante e

Infobox Betrag, Logarithmen und trigonometrische Funktionen

Wir benutzen die numpy-Bibliothek und nennen sie `np`, deshalb werden Funktionen aus dieser Bibliothek z.B. mit `np.sign(-3)` aufgerufen.

`abs(x)`	Betrag einer Zahl $\lvert x\rvert$
`sign(x)`	Vorzeichen einer Zahl $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
`log(x)`	Logarithmus zur Basis e
`log10(x)`	Logarithmus zur Basis 10
`log(x)/log(3)`	Logarithmus zur Basis 3

Trigonometrische Funktionen mit Bogenmass

`cos(x)`	Cosinus, x ist z.B. `pi/2`
`sin(x)`	Sinus
`tan(x)`	Tangens
`arccos(x)`	Arkuscosinus = $\cos^{-1}(x)$
`arcsin(x)`	Arkussinus = $\sin^{-1}(x)$
`arctan(x)`	Arkustangens = $\tan^{-1}(x)$

11.2 Vektoren und Matrizen

Python wurde urspüglich für die Matrizen-Rechnung entworfen. Deshalb ist vieles für die Matrizen-Rechnung optimiert und ausgelegt. Eine Liste (Vektor) ist z.B.

```
vv=np.array([1,3,5])
```

Mehrere Listen definieren die *Zeilen* einer Matrix:

```
A=np.array([[1,3],[1  ,0],[-1,7]])
B=np.array([[-1,1,-1],[-1,-1,1],[1,-1,-1]])
```

Infobox Grundoperationen für Vektoren **MXG6YS**

`vv.shape`	Dimensionen des Vektors $\vec{v}$
`len(vv)`	Anzahl Elemente, d.h. Anzahl der Einträge
`np.linalg.norm( vv)`	Norm des Vektors $\lVert\vec{v}\rVert$,
`np.dot(vv,ww)`	Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$
`np.cross(vv,ww)`	Vektorprodukt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$

Infobox Slicing MT5TM5

```
A=np.array([[1,3],[1 ,0],[-1,7]])
```

`A[0,1]`	Auf einzelne Elemente zugreifen
`A[0,1] =111`	Einzelne Elemente neu definieren
`A[1,:]`	2. Zeile
`A[:,1]`	2. Spalte
`A[2,-1]`	letzte Spalte, 3. Zeile
`A[-1,1]`	2. Spalte, letzte Zeile

Infobox Spezielle Matrizen MXG6YS

`eye(3)`	Einheitsmatrix, Matrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen
`ones([3,2])`	Matrix mit lauter Einsen, 3 Zeilen, 2 Spalte
`zeros([3,2] )`	Nullmatrix, 3 Zeile, 2 Spalten
`Dd=diag([3,1,2])`	Diagonalmatrix mit den Elementen 3, 1 und 2 auf der Diagonalen
`diag(Dd)`	Ist das Argument eine Matrix, wird die Diagonale extrahiert

Infobox Operationen mit Arrays QWJPJR

Hier wird die Bibliothek `np` angegeben, da die Funktionen mrref und mnull dort nicht enthalten sind.

`A.T`	Matrix transponieren
`np.dot(B ,A)`	Matrixprodukt
`bb/aa`	Elementweise Multiplikation
`aa* bb`	Elementweise Division
`np.power(aa,2)`	Elementweise Potenz
`np.linalg.det(B)`	Determinante einer Matrix
`np.linalg.inv(B)`	inverse Matrix
`mnull(C)`	Nullraum. Nimmt an, dass in den Zeilen von C die Normalenvektoren der Ebenen stehen. Sucht alle Vektoren, die senkrecht stehen auf allen Normalenvektoren.[a]
`mrref(B)`	Gauss-Jordan Elimination
`np.linalg.matrix_rank(C)`	Rang der Matrix `A`

11.3 Symbolisches Rechnen

Die Matrix-Funktionen wendet man an um lineare Probleme zu lösen. Es können aber auch nicht lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Dazu benutzt man die Bibliothek für symbolisches Rechnen `sympy`. Bisher haben wir zwar Variablen benutzt, aber wir haben darin nur Zahlen gespeichert. Beim `symbolischen Rechnen`,

können wir den Wert einer Variablen vorerst offen lassen.
Zuerst sagt man Python, dass man ein Variable als symbolische Variable benutzen will. Hier wollen wir x symbolisch benutzen

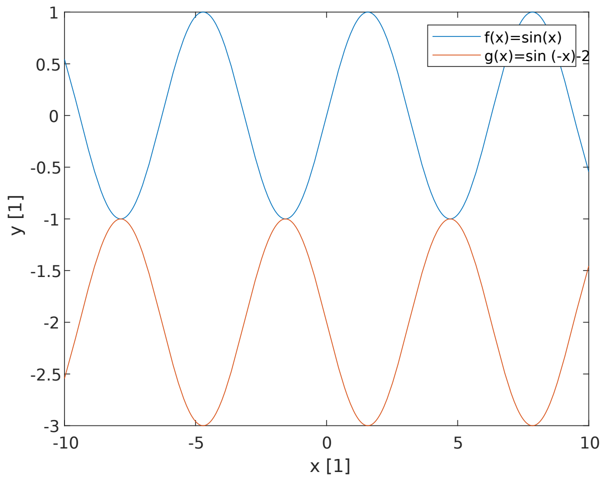
```
x = sym.Symbol('x', real=True)
```

Dann geben wir die Gleichung ein, hier $-90 + 15x + 15x^2 = 0$

```
sym.solve(-90 + 15*x + 15*x**2 , x, dict=True)
[{x: -3}, {x: 2}]
```

Beispiel 11.1 Graphen von Funktionen zeichnen **76B0UY**

Plotten Sie die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(-x) - 2$ im Bereich $x \in [-10, 10]$
Befehle aus `np`: `sin, map`
Befehle der `matplotlib.pyplot` (`plt`) Bibliothek: `plot, xlabel, ylabel, show`



Python-Code Bereich und Funktionen definieren:

```
xlist = np.arange(-10., 10., 0.2)
def fun(x):
    return np.sin(x)

def gun(x):
    return np.sin(-x)-2
```

Funktionen auswerten und Plotten:

```
ylist=list(map(fun,xlist))
yslist=list(map(gun,xlist))
# red dashes 'r--', yellow squares 'bs', green triangles 'g^', blue line 'b-'
plt.plot( xlist, ylist, 'b-',xlist, yslist, 'g^')
```

```
plt.ylabel('y [1]')
plt.show()
```

Beispiel 11.2 Hessesche Normalenform GPNI6N

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix},\ g:\ y(x) = -\frac{4}{3} \cdot x + 2$$

a) Erstelle eine Funktion h(x,y), die den Abstand eines Punktes [x,y] zu g berechnet

b) Berechne damit den Abstand der Punkte P , Q zu g

Befehle: `abs, norm , dot`

Python-Code

```
# a)
Pp=[ 10,4]  ; Qq= [ 11, 0]
def HesseNormal(x,y,coeff=[4,3,-6]):
    # Bestimmt Abstand zu Geraden
    # in:
    #     x,y: Koordinaten des Punktes
    #     coef: Koeffizienten der Gerade; default 4x+3y-6=0
    return np.dot( [x,y,1],coeff)/np.linalg.norm( coeff[0:2])
# b)
print(HesseNormal(10,4) )
#  9.2
print(HesseNormal(11,0) )
# 7.6
```

Beispiel 11.3 Inhomogene LGS 8LTNE0

Bestimmen Sie die Schnittmengen der Ebenen E_1, E_2 und E_3

$$\left|\begin{array}{lcccc} E_1: & 0 & +3y & -2z & = & 3 \\ E_2: & 3x & +0 & -1 & = & 6 \\ E_3: & -2x & +y & +0 & = & -3 \end{array}\right|$$

Befehle: `mrref, mnull`

Python-Code

```
#                x  y  z  = const
Ae=np.array([ [ 0, 3, -2,  3 ]
             ,[ 3, 0, -1, 6],
              [-2, 1 ,0 , -3] ])
Aes=mrref( Ae) # Elimination
```

```
print(Aes) # d.h. Aufpunkt ist [ 2,1,0]
#[[ 1.    0.    -0.333 2.   ]
# [ 0.    1.    -0.667 1.   ]
# [ 0.    0.    0.    0.   ]]
print(Aes[:,0:-1]) # Koeffizientenmatrix
#[[ 1.    0.    -0.333   ]
# [ 0.    1.    -0.667   ]
# [ 0.    0.    0.       ]]
riv=mnull( Aes[:,0:-1])
# d.h. der Richtungsvektor ist  [ 1,2,3]
# Lösung  Schnittgerade [2;1;0]+la*[ 1,2,3]
# mit la eine reelle Zahl
```

Beispiel 11.4 Summen **Y4AR4U**

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{i=5}^{10} \frac{3 \cdot i}{(i+1)^{1/2}}$$

Befehle: `sum, arange, power`

Python-Code

```
tac=np.arange(5,10+1)
print(tac)
#    5      6      7      8      9     10
suc=(3*tac)/np.power(tac+1,1/2)
# 6.1237     6.8034     7.4246     8.0000     8.5381     9.0453
suc=sum(suc)
print(suc)
# 45.9352
```

Beispiel 11.5 Linearität einer Funktion **M27J2Z**

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung (falls L linear ist)

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5x \\ -y \end{pmatrix} \text{ und } L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

Befehle aus der **sympy** Bibliothek: `symbols, simplify, Array,`

Python-Code

```
# a)
u, v, w,x, y, z, lam = sym.symbols('u v w x y z lam')
sym.init_printing(use_unicode=True)
```

```
def lf(x,y,z):
    return sym.Array([ 5*x,-y])
# Homogenität;
print(sym.simplify(lf(lam*x,lam*y,lam*z)-lam*lf(x,y,z)))
# Resultat [0,0] bedeutet, dass beide Ausdrücke gleich sind
# Additivität;
print( sym.simplify(lf(x,y,z)+lf(u,v,w)-lf( x+u, y+v,z+w)))
# Resultat [0,0] bedeutet, dass beide Ausdrücke gleich sind
# b)
Ma=np.array([ lf(1,0),lf(0,1) ])
#[[5 0]
# [0 -1]
# [0 0]]
```

KAPITEL 12

Determinanten

Lernziele Determinanten

- Die Studierenden kennen die Linearität der Determinante.
- Sie können daraus Gesetze für die Berechnung der Determinante herleiten (Infobox 12.1)
- Sie können für $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Determinanate mit der Regel von Sarrus oder dem Spatprodukt berechnen.
- Sie kennen die geometrische Bedeutung der Determinante (Länge, Fläche, Volumen etc).
- Sie können mit Hilfe einer Dreiecksmatrix die Determinante effizient berechnen (Infobox 12.9).
- Sie können mit dem Satz von Laplace die Determinante einer Matrix nach einer Spalte oder einer Zeile entwickeln.
- Sie können mit der Regel von Cramer die Lösung eines LGS berechnen.

- Die Studierenden kennen weitere Gesetze zur Bestimmung der Determinanate, wie das Gesetz für das Matrix-Produkte und für die Transponierte einer Matrix.

Satz Gesetze für Determinanten von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$

Im Folgenden können die Vektoren $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots$ als Spalten oder als Zeilen aufgefasst werden.

- $\det\left(\lambda\,\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right) = \lambda\,\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{d}, \ldots\right) = \det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right) + \det\left(\vec{A}_1, \vec{d}, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{A}_1, \ldots\right) = \det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_2, \vec{A}_1, \ldots\right) = -\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{0}, \ldots\right) = 0$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_1, \ldots\right) = 0$
- $\det\left(\lambda\,\mathbf{A}\right) = \lambda^N\,\det\left(\mathbf{A}\right)$
- Dreiecksmatrizen: $\det(\mathbf{A}) = a_{11}\,a_{22}\,\ldots\,a_{NN}$
- $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

12.1 Linearität der Determinante

Wir verwenden die Definition der Determinante in zwei Dimensionen und leiten allgemeine Gesetzmässigkeiten der Determinante her. Wir machen das in zwei Dimensionen, weil wir das noch leicht aufzeichnen und uns gut vorstellen können. Die Gesetzmässigkeiten wie die Linearität und der Vorzeichenwechsel beim Vertauschen von Spalten einer Matrix sind aber für alle Matrizen in $\in \mathbb{R}^{N\times N}$ gültig, d.h. auch in mehr als zwei Dimensionen.

Infobox Determinante: Zeilen und Spalten

Wir beschränken uns darauf, das Vertauschen, Multiplizieren etc. von *Spalten* zu betrachten. Genau die selben Betrachtungen könnten aber ebenfalls für die *Zeilen* gemacht werden.

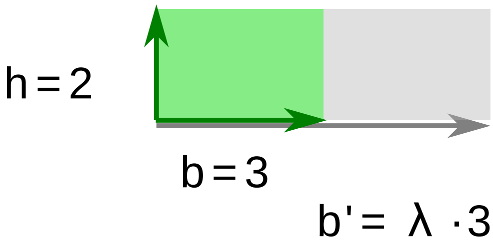
Beispiel 12.1 Aufkleber Q86D9C

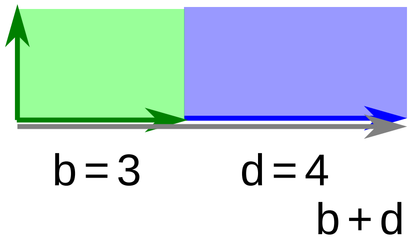
Wir bezeichnen mit $F(\vec{b}, \vec{h})$ die Fläche des Rechtecks oder des Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{h}$. Der Grüne Aufkleber hat also die

Fläche $F(\vec{b}, \vec{h}) = 6$.

a) Berechnen Sie alle Flächen

$$F(2 \cdot \vec{b}, \vec{h}),\ F(\vec{d}, \vec{h}),\ F(\vec{b} + \vec{d}, \vec{h})$$

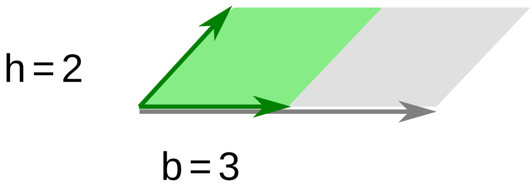


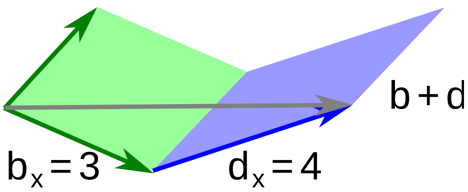


b) Vervollständigen Sie die Relationen

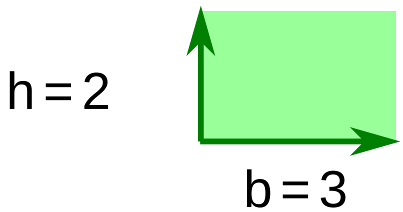
$$F(\lambda \cdot \vec{b}, \vec{h}) \qquad F(\vec{b}, \vec{h})$$
$$F(\vec{b} + \vec{d}, \vec{h}) \qquad F(\lambda \cdot \vec{b}, \vec{h}) \qquad F(\vec{d}, \vec{h}),$$

c) Stimmen die Relationen allgemein. Was ist, wenn die Vektoren nicht senkrecht zueinander stehen? Argumentieren Sie anhand der Zeichnungen.





d) Wieder im ursprünglichen Rechteck, betrachten Sie den Ausdruck $F(\vec{b}, \vec{h} + \lambda \cdot \vec{b})$



- Erstellen Sie eine Zeichnung für $\lambda = 1$ und für $\lambda = -1/2$. Bestimmen Sie die Flächen grafisch.
- Bestimmen Sie die Fläche allgemein für $F(\vec{b}, \vec{h} + \lambda \cdot \vec{b})$ mit Hilfe der Relationen, die sie oben hergeleitet haben.

Beispiel 12.2 Fläche eines Parallelogramms 2 **N1ERF3**

a) Berechne die Fläche eines Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Benutze dazu das Vektorprodukt.

b) Welches Resultat erhältst du allgemein für die Fläche

$$F(\vec{a}, \vec{b}) = F(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

c) Erfüllt der Ausdruck die Relationen

$$F(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}) = \lambda F(\vec{a}, \vec{b})$$

d) Erfüllt der Ausdruck die Relationen

$$F(\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}) = F(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}) + F(\vec{d}, \vec{b})$$

Definition Determinante für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist die *Determinante*

$$\det(\mathbf{A}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \ .$$

[Papula, 2009, Bd. 2 I 3.2]

Die Determinante berechnet den Flächeninhalt eines Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, siehe Fig. 12.1 a). Wenn wir eine Kante um den Faktor λ länger machen, dann muss auch die Fläche des Parallelogramms um diesen Faktor anwachsen. Wir nennen das die **Homogenität der Determinante**, siehe Fig. 12.1 b). Wenn eine Fläche aufgespannt wird durch $\vec{a}$ und $\vec{b} + \vec{c}$, dann muss sich aus geometrischen Gründen die Gesamtfläche zusammensetzen aus dem kleinen Flächen aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Wir nennen das die **Additivität der Determinante**, siehe Fig. 12.1 c).
Diese beiden Eigenschaften fassen wir zusammen als die **Linearität der Determinante**.

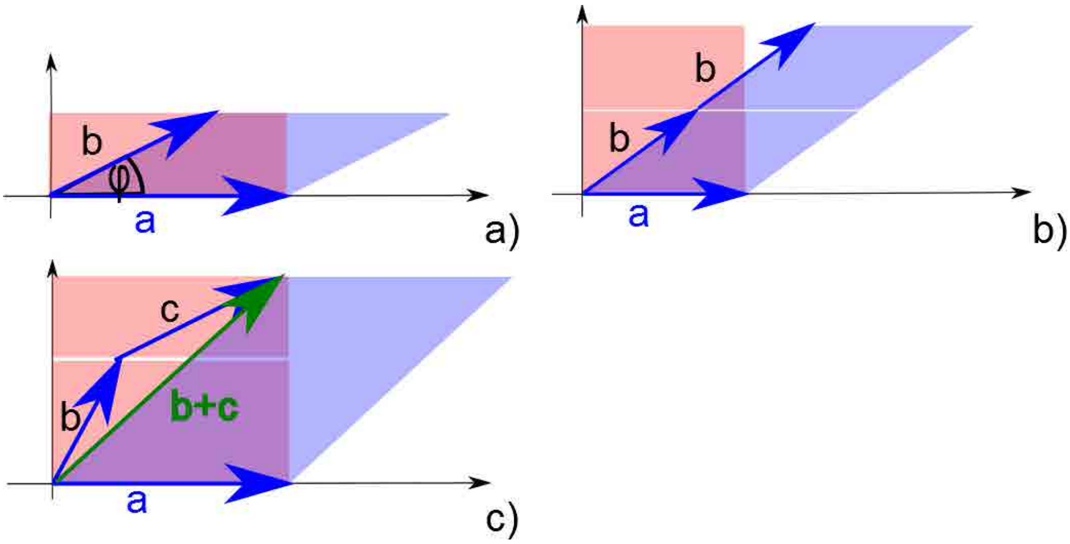


Abbildung 12.1: a) Die Determinante berechnet die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$. b) Homogenität der Determinante: Die Fläche muss sich verdoppeln, wenn wir $\vec{b}$ verdoppeln in der Länge. c) Additivität der Determinante: Wenn wir uns für die Fläche aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}+\vec{c}$ interessieren, dann kann die grosse blaue Fläche berechnet werden aus der Summe der kleineren roten Flächen, die aufgespannt werden durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

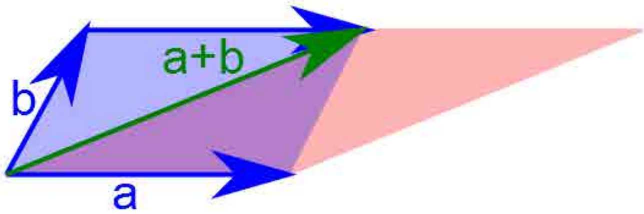


Abbildung 12.2: Die Fläche verändert sich nicht, wenn anstatt der Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (blau), die Fläche aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}+\vec{a}$ (rot) berechnet wird.

Infobox Linearität der Determinante

$$\det(\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 & b_1 \\ \lambda \cdot a_2 & b_2 \end{pmatrix}) = \lambda \cdot \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix})$$

$$\det(\begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix})$$

d.h. die Determinante ist linear, wenn wir ganze Spalten (oder ganze Zeilen) als Argumente auffassen.

Beachte, dass die Determinante aufgrund der Linearität auch negative Werte annehmen kann, d.h. die Determinante berechnet die Fläche plus ein Vorzeichen.

Infobox Additon von Spalten (oder Zeilen)

- Die Determinante ändert sich nicht, wenn eine Spalte zur anderen addiert wird. Siehe auch Fig. 12.2.
- Achtung: Die Multiplikation einer Spalte mit einer Zahl *verändert* die Determinante!
- $\det(\vec{a}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$

Beispiel 12.3 Determinante $\mathbb{R}^{2\times 2}$ **UKQDY6**

Berechnen Sie die Determinanant

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 37 & 35 \\ 57 & 55 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir machen die Einträge kleiner, indem wir von der ersten Spalte die zweite abziehen:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 35 \\ 2 & 55 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir aus der ersten Spalte die 2 ausklammern und berechnen die Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 1 & 55 \end{pmatrix}) = 2 \cdot (55 - 35) = 40$$

Übrigens: Man könnte die Multiplikationen noch weiter vermeiden, indem man in einem weiteren Schritt die erste Zeile von der zweiten abziehen würde:

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 1 & 55 \end{pmatrix}) = 2 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}) = 2 \cdot (20 - 0) = 40$$

Beispiel 12.4 Determinante $\mathbb{R}^{2\times 2}$ **SE7NDL**

Berechnen Sie die Determinananten

a) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 232 & 447 \\ 242 & 457 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 261 & 291 \\ 101 & 131 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 382 & 44 \\ 362 & 24 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 13247 & 13347 \\ 28469 & 28569 \end{pmatrix}$

12.2 Determinante von $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Definition Determinante in 3D

Sei $\mathbf{A}$ eine 3×3-Matrix, und $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ die Spalten von $\mathbf{A}$. Die Determinante ist dann definiert als

$$\det(\mathbf{A}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \text{ (Spatprodukt)}.$$

Infobox Linearität des Spatprodukts

Das Spatprodukt ist linear in allen Argumenten, d.h.

$$[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

und

$$[\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Diese Gleichungen gelten auch für die Addition und Multiplikation im zweiten Argument $\vec{b}$ und im dritten $\vec{c}$.

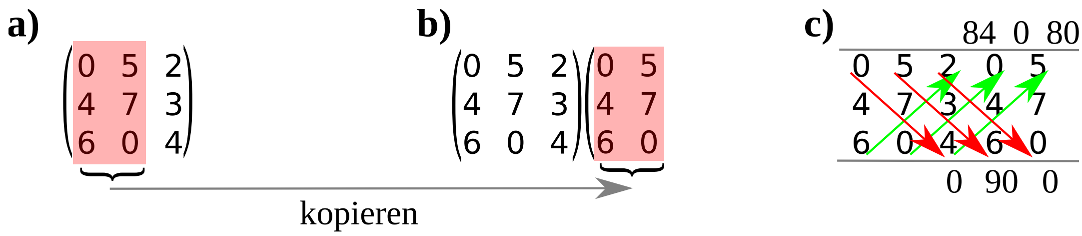


Abbildung 12.3: **a)** Die Regel von Sarrus ist ein graphisches Schema zur Berechnung der Determinante für $M \in \mathbb{R}^3$. **b)** Dabei werden die ersten beiden Spalten noch einmal als 4. und 5. Spalte kopiert. **c)** Entlang der 3 Diagonalen von oben nach unten (rot), werden die Produkte Berechnet (0, 90 und 0). Davon werden die Produkte der 3 Diagonalen von unten nach oben (grün) abgezogen (84, 0 und 80). Wir erhalten also $0 + 90 + 0 - 84 - 0 - 80 = -74$

Satz Regel von Sarrus

Sei $\mathbf{A}$ die Matrix mit den Einträgen $a_{i,j}$, dann ist

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}_{\text{Pfeile rot}} \\ &- \underbrace{a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}}_{\text{Pfeile grün}} \end{aligned}$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.174], [Papula, 2009, Bd. 2 I 3.1]

Beispiel 12.5 Spatprodukt und Regel von Sarrus

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Determinanten mit dem Spatprodukt

b) Berechnen Sie die Determinanten mit der Regel von Sarrus.

Lösung:

a) Spatprodukt: Wir benennen die Spalten

$$\mathbf{A} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{c}}\right]$$

$$\underbrace{\vec{b} \times \vec{c}}_{=:\vec{d}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a} \odot \vec{d} = 10$$

b) Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 2 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad -0 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Beispiel 12.6 Berechnen Sie die Determinanten mit dem Spatprodukt **IDV7PK**

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 10 \\ 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Beispiel 12.7 Determinanten 3D, Regel von Sarrus **T8SRHO**

Berechnen Sie die Determinanten aus der vorherigen Aufgabe mit der Regel von Sarrus.

12.3 Determinante einer Dreiecksmatrix

Satz Determinante einer Dreiecksmatrix

Für Dreiecksmatrizen (Diagonale von $a_{1,1}$ bis $a_{n,n}$) ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine Dreiecksmatrix, dann gilt

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{N,N} = \prod_{i=1}^{N} a_{i,i}$$

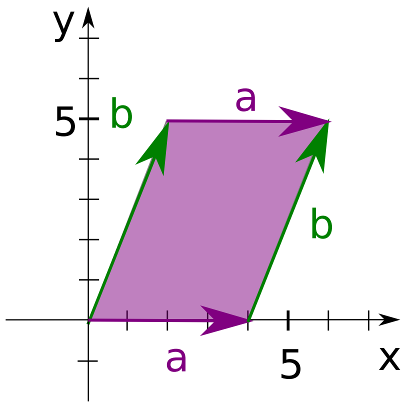
Für Matrizen mit der Diagonalen $a_{1,N}$ bis $a_{N,1}$ gilt

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \cdot a_{1,N} \cdot a_{2,N-1} \cdots a_{N,1}$$

$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ bedeutet abrunden. Wir erhalten z.B.

N	$\frac{N}{2}$	$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$	$(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$
1	0.5	0	1
2	1.	1	-1
3	1.5	1	-1
4	2.	2	1
5	2.5	2	1

Beispiel 12.8 Determinante einer Dreiecksmatrix **VDJ9NX**



$$\mathbf{A} = (\vec{a}^{\mathsf{T}}; \vec{b}^{\mathsf{T}}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante. Benutze die geometrische Interpretation, dass nämlich die Determinante die Fläche des Parallelogramms berechnet.
In der Matrix $\mathbf{A}$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Zeilen angeordnet.

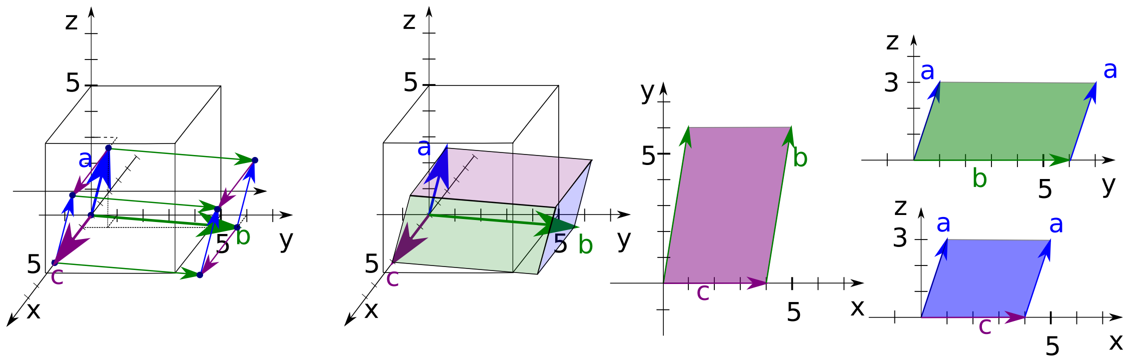
Lösung:

Die Grundkante berechnen wir aus der Länge von $\vec{a}$ in Richtung $a_1 = 4$. Die Höhe des Parallelogramms ist $b_2 = 5$.

$$\det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 5 = 20$$

Beachte: Wenn wir das Parallelogramm kippen, d.h. durch die Variation von $b_1 = 2$, ändert sich die Fläche nicht. Nur die Diagonal-Elemente der Matrix $\mathbf{A}$ haben einen Einfluss auf die Fläche.

Beispiel 12.9 Determinante einer Dreiecksmatrix **805275**



Berechnen Sie die Determinante. Benutze die geometrische Interpretation, dass nämlich die Determinante das Volumen des Spats berechnet.
In der Matrix $\mathbf{A}$ sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Zeilen angeordnet.

$$\mathbf{A} = (\vec{a}^{\intercal}; \vec{b}^{\intercal}; \vec{c}^{\intercal}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 6 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.10 Dreiecksmatrizen **1F6GZM**

Berechnen Sie wenn möglich die Determinanten mit der Regel von Sarrus und dann mit den Regeln für Dreiecksmatrizen. Vergleichen Sie die Resultate.

a) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 7 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 & 8 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel 12.11 Dreiecksmatrizen und Elimination **PSGF67**

Eliminieren Sie. Berechnen Sie dann die Determinanten den Regeln für Dreiecksmatrizen.

a) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -9 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 2 \\ 25 & 4 & 37 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 7 \\ -5 & -9 & -5 & -14 \\ 13 & 26 & 9 & 21 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel 12.12 Determinanten von Dreiecksmatrizen **341887**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Benutzen Sie Eliminationen und den Satz über die Determinante von Dreiecksmatrizen.

a) $\begin{pmatrix} 0 & b & -1 \\ -b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ -1 & x & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & x & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & x & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x+b_5 \end{pmatrix}$

12.4 Folgen der Linearität

Infobox Linearität Determinanten

Die Determinante ist linear in allen Argumenten, wenn wir Zeilen (oder Spalten) als Argument auffassen.

Infobox Vertauschen von Spalten (oder Zeilen)

Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn Spalten vertauscht werden.

Beispiel 12.13 Spalten vertauschen **X9E92Z**

Wir kennen die Determinante $\det(\mathbf{N}) = \det([\vec{x}, \vec{y}]) = 2$. Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{M} = [\vec{y}, \vec{x}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Bringen Sie dazu die Spalten von M in alphabetische Reihenfolge.

Lösung:

Mit der Linearität erhalten wir

$$\det([\vec{y}, \vec{x}]) = \det([\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}]) = \det([\vec{y} - (\vec{x} + \vec{y}), \vec{x} + \vec{y}]) = \det([-\vec{x}, \vec{x} + \vec{y} - \vec{x}]) = -\det([\vec{x}, \vec{y}])$$

Es werden hier immer ganze Spalten von einander abgezogen. Im letzten Schritt benutzen wir die Homogenität. Also $\det(\mathbf{M}) = -2$

Beispiel 12.14 Spalten vertauschen **NDW7G3**

$$\mathbf{M} = \left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right]$$

Wir wollen die Determinante von M berechnen, indem wir die Spalten in alphabetische Reihenfolge bringen — denn von $\mathbf{P} = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ kennen wir die Determinante. Arbeiten sie z.B. mit $\det(\mathbf{P}) = 5$

a) Bringen Sie die Spalten von M in alphabetische Reihenfolge. Benutzen Sie dazu ausschliesslich die Linearität der Determinante.

b) Verallgemeinern Sie: Wie ändert sich die Determinante, wenn wir Spalten (oder Zeilen) vertauschen?

Beispiel 12.15 Determinante der Transponierten

Berechne die Determinante von $\mathbb{A}^\intercal$ mit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir finden

$$\det(\mathbb{A}^\intercal) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}) = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 = \det(\mathbb{A})$$

Infobox Determinante der Transponierten

- $\det(\vec{a}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}) = 0$
- $\det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^\intercal) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix})$
  Dies gilt übrigens auch in mehr als 3 Dimensionen

Infobox Geometrische Bedeutung der Determinante

- Für 1D defniert man $\det(a_{11}) = a_{11}$
- 1D Länge + Vorzeichen
- 2D Fläche + Vorzeichen
- 3D Volumen + Vorzeichen
- 4D und ND: Die Determinante ist das Hypervolumen des Hyper-Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren in den Spalten der Matrix + Vorzeichen

Beispiel 12.16 Lineare Abhängigkeit **468897**

Bestimme x, so dass die Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & x & 2 \\ 6 & 5 & x \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.17 Lineare Abhängigkeit **0GB96D**

Bestimme x, so dass die Spaltenvektoren der Matrizen linear unabhängig sind.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 3 & -x \end{pmatrix}$

Beispiel 12.18 Äquivalenzumformungen für die Determinante, **670545**

Es soll die Determinante von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ bestimmt werden. Anton formt folgendermassen um:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \text{ also } \det(\mathbf{A}) = 0 \cdot (-6) + 9 = 9$$

mit den *Zeilenum*formungen:[a] $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$.
Berta formt folgendermassen um:

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ also } \det(\mathbf{A}) = 0 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-9) = -9$$

mit den Zeilenumformungen:$\mathbf{B}' = (\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_2)$.
Die Resultate für die Determinante unterscheiden sich durch das Vorzeichen. Anton und Berta sollten aber das gleiche Resultat erhalten. Wer hat den Feh-

ler gemacht? Untersuchen Sie, ob wirklich beide zulässige Zeilenumformungen vorgenommen haben.

[a] $\mathbf{A}_1$ ist z.B. die erste Zeile von $\mathbf{A}$

12.5 Übungen

Beispiel 12.19 Determinanten, **949369**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Verwenden Sie den Satz von Sarrus und den Satz über Determinante von Diagonalmatrizen. Nützen Sie ausserdem aus, dass die Addition von Zeilen (oder Spalten) die Determinante nicht verändert, dass aber die Vertauschung von Zeilen, das Vorzeichen der Determinante ändert. Überprüfen Sie Ihre Resultate mit Matlab (Befehl `det`(A)).

a) $\begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$

12.6 Regel von Cramer

Satz Regel von Cramer

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung $\vec{x}$ des Gleichungsystems

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

ist gegeben durch

$$x_k = \frac{\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{A}_n)}{\det(\mathbf{A})}$$

wobei $\vec{b}$ die k-te Spalte ersetzt.

[Papula, 2009, Bd. 2 I 5.4, p. 92], [Goebbels and Ritter, 2011, p.181]

Beispiel 12.20 Regel von Cramer **725615**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit der Regel von Cramer.

$$\left|\begin{array}{lcr} 5x_1 + 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ 3x_2 + 1x_3 & = & 4 \end{array}\right|$$

Lösung:

Wir nennen die Koeffizienten Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und die Inhomogenität } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich die Lösung des Gleichungssystems schreiben als

$$x_1 = \frac{\det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})}, \; x_2 = \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})}, \; x_3 = \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b})}{\det(\mathbf{A})}.$$

Die Determinanten sind

$$\begin{array}{rcl} \det(\mathbf{A}) & = & 10 + 0 + -9 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ \det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3) & = & 4 + 27 + 0 + -24 + 0 + 0 = 7 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) & = & 15 - 12 + 0 + 0 + 0 + 2 = 5 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b}) & = & 40 + -6 + 0 + 0 - 45 + 0 = -11 \end{array}$$

Damit ist die Lösung

$$x_1 = \frac{7}{1} = 7, \; x_2 = \frac{5}{1} = 5, \; x_3 = \frac{11}{1} = -11.$$

Beispiel 12.21 Herleitung des Satzes von Cramer **260103**

Leiten Sie den Satz von Cramer in drei Dimensionen her. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3\right) \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Dabei fassen wir die erste Spalten von $\vec{A}$ im Spaltenvektor $\vec{A}_1$ zusammen usw. Betrachten Sie vorerst nur die zweite Variable y.
Der Beweis ist nicht sehr intuitiv. Deshalb sind hier die Schritte angegeben:

- Nehmen Sie an, dass Sie die Lösung (x, y, z) des Gleichungssystems schon kennen würden und drücken Sie $\vec{b}$ mit dieser Lösung aus
- Ersetzen Sie die zweite Spalte von $\mathbf{A}$ mit diesem Ausdruck für $\vec{b}$
- Berechnen Sie die Determinante dieser Matrix
- Lösen Sie nach y auf

Für die weiteren Unbekannten x und z beweist man dies genau gleich.

Beispiel 12.22 Regel von Cramer **911705**

Lösen Sie die folgenden *inhomogenen quadratischen* linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Regel von Cramer:

a)

$$\left|\begin{array}{rcr} -x + 10y + 5z & = & 3 \\ 3x - 6y - 2z & = & -2 \\ -8x + 14y + 4z & = & 6 \end{array}\right|$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left|\begin{array}{lcr} 3y + 2x & = & z + 1 \\ 3x + 2z & = & 8 - 5y \\ 3z - 1 & = & x - 2y \end{array}\right|$$

Beispiel 12.23 Gleichung der Parabel **044328**

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel ($f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$) durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \end{pmatrix}$. Stellen Sie dazu ein Gleichungssystem auf und benützen Sie dann die Regel von Cramer.

12.7 Effiziente Berechnung der Determinante

Infobox Effiziente Berechnung der Determinante

In $N \geq 3$ wird die Determinante effizient berechnet, indem die Matrix mit dem Gauss-Verfahren auf Dreiecks-Form gebracht wird.

- Die Determinante verändert sich durch die Elimination $\mathbf{A}'_i = 1 \cdot \mathbf{A}_i + \nu \cdot \mathbf{A}_j$ $(i \neq j)$ nicht. Wichtig ist, dass der Koeffizient vor $1 \cdot \mathbf{A}_i$ nur eine 1 sein darf, während $\nu \in \mathbb{R}$.
- Berechnen wir die Determinante aus der Dreiecksmatrix und multiplizieren mit der Hilfszahl f.
- Der Vorfaktor (Hilfszahl) ist am Anfang der Elimination $f = 1$.

Er

- ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen vertauscht werden $f' = f \cdot (-1)$.
- er wird mit $1/\lambda$ multipliziert, falls eine Zeile mit λ multipliziert wird $f' = f \cdot \frac{1}{\lambda}$.

Beispiel 12.24 Effiziente Berechnung der Determinante **721944**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

mit den Umformungen $\mathbf{R}' = (\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1; \mathbf{R}_3 - 2\mathbf{R}_1)$. Damit wir besser eliminieren können, multiplizieren wir die 2. Zeile mit $1/3$. Das ändert den Vorfaktor $f' = \frac{1}{1/3} \cdot f = 3$.

$$\mathbf{R}'' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

Schliesslich eliminieren wir wieder: $\mathbf{R}'' = (\mathbf{R}'_1; \mathbf{R}'_2; \mathbf{R}'_3 + 4\mathbf{R}'_2)$ und erhalten

$$\mathbf{R}''' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot f' = -12 \cdot 3 = -36$$

Beispiel 12.25 Effiziente Berechnung der Determinante **BLI8CK**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 20 & 0 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.26 Effiziente Berechnung der Determinante **519361**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -11 & -17 \\ 2 & 6 & 13 & 39 & 55 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.27 Effiziente Berechnung der Determinante **X4BOZP**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.28 Effiziente Berechnung der Determinante **245158**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 25 & 33 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 44 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 14 \\ 1 & 3 & 5 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.29 Effiziente Berechnung der Determinante **519361**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -11 & -17 \\ 2 & 6 & 13 & 39 & 55 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

12.8 Multiplikationssatz und weitere Themen

Satz Multiplikationssatz

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt

$$\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

Satz Determinante der Inversen Matrix

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Beispiel 12.30 Determinante eines Matrix-Produkts 801837

Berechne die Determinante der Matrix $\mathbf{P}$.

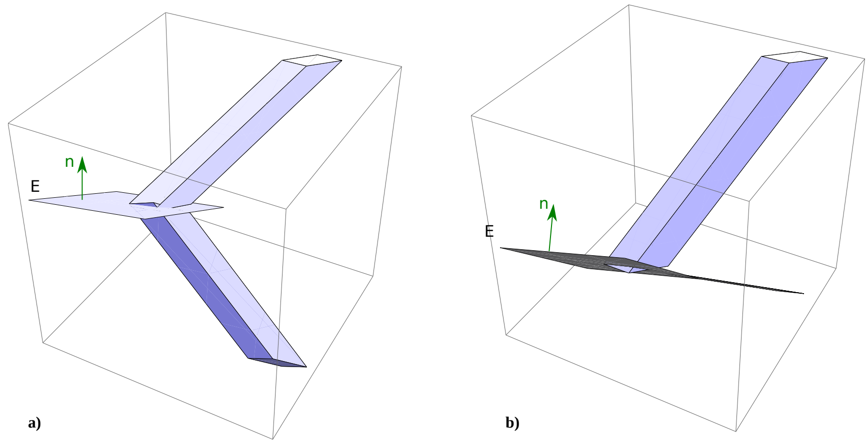
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{9} & \frac{19}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.31 Determinanten eines Matrix-Produkts 799761

Berechnen Sie die Determinante der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{T}$. Benutze den Multiplikationssatz für Matrizen.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{T}$$

Beispiel 12.32 Erhaltung der Struktur J7DCU5



a) b)

$$\mathbf{P} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 34 & 3 & 5 \\ 3 & 26 & -15 \\ 5 & -15 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 33 & 6 & 10 \\ 6 & 17 & -30 \\ 10 & -30 & -15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{P}$ stellt eine Projektion auf die Ebene $E: \; -x + 3y + 5z = 0$ dar und $\mathbf{S}$ eine Spiegelung an E.

a) Berechnen Sie die Determinanten von $\mathbf{P} \odot \mathbb{1}$, $\mathbf{S} \odot \mathbb{1}$ und $\mathbf{R}$.

b) Weshalb fallen die Werte so aus? Argumentieren Sie u.a. mit der Form und dem Volumen des Quaders aufgespannt durch die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wir interpretieren die Spalten von $\mathbf{R}$ als Seiten eines Parallelepipeds. Berechnen Sie das Volumen.

d) Überlegen Sie — ohne zu rechnen — welche Werte wir für die folgenden Determinanten erhalten sollten.

$$\det(\mathbf{P} \odot \mathbf{R}), \; \det(\mathbf{S} \odot \mathbf{R}), \; \det(\mathbf{S} \odot \mathbf{S} \odot \mathbf{R}), \; \det(\mathbf{P} \odot \mathbf{S} \odot \mathbf{R}), \; \det(\mathbf{R} \odot \mathbf{R}),$$

e) Verallgemeinern Sie: Welche Werte haben die Determinanten

$$\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}), \; \det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1}) \text{ und } \det(\mathbf{A}^{-1})$$

Beispiel 12.33 Determinanten der Transponierten **325124**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Benutzen Sie dazu den Satz von Sarrus und den Multiplikationssatz für Matrizen. Nutzen Sie zudem die Ähnlichkeit der Matrizen aus.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ 5 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 4 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

a) Für $\mathbf{E}$ gilt

$$\mathbf{E}^\intercal = -\mathbf{E}$$

b) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{2}\right) & 1 & 0 \\ \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{2}\right) & \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{2}\right) & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 12.34 Determinanten von linearen Abbildungen F9X8FP

Bestimme die Determinante der folgenden linearen Abbildungen. Hinweis: Bestimme zuerst die Matrix M der Darstellung in einer Orthonormalbasis. Bestimme dann $\det(M)$.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 9x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 9y \\ 3x - 5y \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_3 \\ 5x_2 + 7x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + 7y - 4z \\ 4x - 6y + 2z \end{pmatrix}$

Beispiel 12.35 Determinanten von linearen Abbildungen 366248

Bestimme die Determinante der Abbildung $D(f(t)) = \frac{df}{dt}$ für die gegebene Basis. Hinweis: Bestimme zuerst die Matrix $\mathbf{D}$, die der linearen Abbildung entspricht. Bestimme dann $\det(D)$

a) $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$

b) $\{1, t, \ldots, t^5\}$

c) $\{\sin(t), \cos(t)\}$

Beispiel 12.36 Überblick 7TJ6SK

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt

a) $\det(2\mathbf{A}) = 2 \cdot \det(\mathbf{A})$

b) $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^5$

c) $\det(\mathbf{A}) = a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot \ a_{1,n}$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Einträgen $a_{i,j} = 0$ falls $i + j > n + 1$.

d) $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$

e) $\det(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B} \odot \mathbf{A})$

f) $\det(\mathbf{B} \odot \mathbf{B}^\intercal \odot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})^3$

KAPITEL 13

Umkehrabbildung und inverse Matrix

Lernziele Inverse Matrix

- Die Studierenden können die inverse Matrix bestimmen mit dem Gauss-Jordan-Verfahren
- Sie können mit der inversen Matrix ein reguläres LGS lösen.
- Sie kennen Kriterien für die Existenz der inverse Matrix.
- Sie bestimmen ob ein injektiv, surjektiv oder bijektiv ist und wissen, dass bijektive Abbildungen invertiert weden können.
- Sie können lineare Netzwerke mit Matrizen beschreiben und darin Ströme und Spannungen berechnen.

13.1 Definitionen

Definition Matrix-Inverse

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix. Existiert eine Matrix $\mathbf{B}$ so, dass gilt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbb{1}$$

so nennt man $\mathbf{A}$ invertierbar und die Matrix $\mathbf{B}$ die Matrix-Inverse von $\mathbf{A}$.

Im Weiteren schreiben wir $\mathbf{A}^{-1}$ für die Matrix-Inverse von $\mathbf{A}$ und nicht wie oben $\mathbf{B}$, d.h. wir schreiben

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nennt man auch die inverse Matrix von $\mathbf{A}$.

Definition Reguläre Matrizen und LGS

Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst **regulär**, falls $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.
Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst **singulär**, falls die Inverse nicht existiert.
Eine LGS $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ heisst **regulär**, falls $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

13.2 Die inverse Matrix bestimmen

Beispiel 13.1 LGS lösen mit Gauss-Jordan **443930**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}$$

Schreibe das Gleichungssystem zuerst als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Wende dann das Gauss-Jordan Verfahren an.

Lösung:

Zuerst das Gauss Verfahren:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & -10 & 41 & 103 \end{array}\right] \rightarrow \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Mit der Zeilen-Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 + 10\mathbf{A}_2)$$

Dann zusätzliche Schritte für Gauss-Jordan:

$$\mathbf{A}'' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{A}''' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

mit den Zeilen-Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2; \mathbf{A}'_2; \mathbf{A}'_3) \\ \mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 + 3\mathbf{A}''_3; \mathbf{A}''_2 + 4\mathbf{A}''_3; \mathbf{A}''_3) \end{aligned}$$

Die Lösung kann jetzt direkt abgelesen werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das Gauss-Jordan Verfahren wird in Matlab mit `rref` aufgerufen. Wird es benutzt um LGSs in erweiterter Koeffizienten-Form zu lösen — wie hier in diesem Beispiel — ist es das flexibelste Instrument um LGSs zu lösen. Also: Immer `rref` verwenden, wenn ein LGS mit Matlab gelöst werden soll.

Beispiel 13.2 Die Inverse bestimmen. **332829**

Bestimme die Matrix-Inverse von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix}$ mit dem Gauss-Jordan Verfahren. Überprüfe das Resultat.

Lösung:

$$\begin{array}{rc|cl}
\mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = \mathbb{1} \\
& \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \\
& \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 30 & 6 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \\
\mathbb{1} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} & = \mathbf{A}^{-1}
\end{array}$$

Die Zeilen-Umformungen sind:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2) \\
\mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1 + 6\mathbf{A}'_3; \mathbf{A}'_2 - 2\mathbf{A}'_3; \mathbf{A}'_3) \\
\mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 + 2\mathbf{A}''_2; \mathbf{A}''_2; \mathbf{A}''_3)
\end{aligned}$$

Kontrolle: Die Matrix-Inverse wurde richtig berechnet, denn es gilt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1} \; .$$

Beispiel 13.3 LGS lösen mit Gauss-Jordan **VTDGZN**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}$$

a) Wende das Gauss-Jordan-Verfahren an um die Inverse $\mathbf{B}^{-1}$ zu berechnen. Kontrolle:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 31 & 3 \\ 0 & 41 & 4 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Überprüfe, ob $\mathbf{B}^{-1}$ die Inverse von $\mathbf{B}$ ist, indem du $\mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{B}$ berechnest.

c) Berechne $\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b}$. Was stellst du fest, wenn du mit der Lösung von Beispiel 13.1 vergleichst?

Beispiel 13.4 LGS lösen mit Gauss-Jordan **WSCFYM**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}$$

a) Schreibe das LGS als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Löse das LGS mit dem *Gauss-Verfahren*.

b) Wende dann das Gauss-Jordan-Verfahren an um die Inverse $\mathbf{B}^{-1}$ zu berechnen. Kontrolle:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -13 & -15 \\ -3 & -8 & -9 \\ -3 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

c) Überprüfe, ob $\mathbf{B}^{-1}$ die Inverse von $\mathbf{B}$ ist, indem du $\mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{B}$ berechnest.

d) Berechne $\mathbf{B}^{-1} \odot \vec{b}$. Was stellst du fest?

Beim Invertieren einer Matrix mit dem Gauss-Jordan Verfahren, werden die Umformungen auf die Einheitsmatrix angewendet. So werden die Zeilenumformungen auf der rechten Seite in der Einheitsmatrix "zwischengespeichert".
Betrachten wir dazu eine Umformungen aus den vorherigen Beispiels: Beim ersten Schritt

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2)$$

Entsteht auf der rechten Seite die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie speichert die Umformung “3. Zeile plus 5 mal die 2. Zeile”.

Beispiel 13.5 Berechne das Produkt P $\odot$ M. **657484**

$$\mathbf{P} \odot \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 1 & 2 & 3 \\ 100 & 200 & 300 \end{pmatrix}$$

Beschreibe den Effekt von **P** auf M in Worten.

Diese Überlegungen können wir für alle Äquivalenzumformungen machen: Welche Umformungen angewendet wurden auf der linken Seite, das wird auf der rechten Seite gespeichert. Deshalb “enthält” am Schluss die Matrix auf der rechten Seite ($\mathbf{A}^{-1}$) alle Umformungen um die ursprüngliche Matrix in die Einheitsmatrix umzuformen, deshalb gilt dann

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Infobox Zulässige Umformungen Gauss-Jordan-Verfahren

- das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren
- eine Zeile mit einer Zahl multiplizieren
- Zeilen vertauschen

Es sind die selben Umformungen wie beim Gauss-Verfahren (Definition 8.2 und Infobox 8.2), nur werden diese Schritte noch weiter ausgeführt, bis die Eins-Matrix $\mathbb{1}$ erzeugt wird.

Beispiel 13.6 Elementare Zeilenumformungen **CEPCBK**

Forme das System $[\mathbf{A}|\mathbb{1}]$ mit elementaren Zeilenumformungen in das System $[\mathbb{1}|\mathbf{B}]$ um. Wie verhalten sich **A** und **B** zueinander?

a) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

13.3 Ein reguläres LGS lösen mit A^{-1}

Inverse Matrizen erlaubt ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

wie folgt zu lösen. Wir multiplizieren von beiden Seiten $\mathbf{A}^{-1}$ von links, dann ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Gemäss Definition ist das Matrixprodukt auf der linken Seite gleich der Einheitsmatrix,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Da diese Matrix den Vektor $\vec{x}$ nicht verändert ($\mathbb{1} \odot \vec{x} = \vec{x}$), können wir sie weglassen und erhalten die Lösung

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}\,.$$

Beispiel 13.7 Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Inversen
786014

Berechne die Lösung $\vec{x}$ des LGS mit Hilfe der Inversen

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 33 & -10 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -1 & 11 \\ 61 & -3 & 32 \\ 83 & -4 & 43 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Weitere Erklärungen zu diesem Thema sind auch in [Papula, 2009, Bd. 2 I 5.5, p. 93] zu finden.

Beispiel 13.8 Gleichungssysteme lösen mit der Inversen **PDCPA1**

Bei allen Aufgaben ist die Inverse der Koeffizientenmatrix gegeben. Lösen Sie die LGSs. Betrachten Sie am Schluss die Aufgaben b) und e) noch einmal. Was stellen Sie fest?

a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left| \begin{array}{rrcr} -2x & -2y & = & 0 \\ -3x & -y & = & 0 \end{array} \right| \text{ und } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -14 & 6 \\ 1 & -19 & 5 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{C}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -66 \\ -78 \\ 18 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 71 & -50 & 44 \\ 34 & -24 & 21 \\ 115 & -81 & 71 \end{pmatrix}$$

d)

$$\left| \begin{array}{rrrcr} -x & +5y & +z & = & 55 \\ & 149y & +5z & = & 1267 \\ 5x & +154y & +z & = & 1247 \end{array} \right| \text{ und } \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} -621 & 149 & -124 \\ 25 & -6 & 5 \\ -745 & 179 & -149 \end{pmatrix}$$

e)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 6 & 8\\ 3 & 5 & 7\\ -1 & 11 & 9\end{pmatrix}}_{=:\mathbf{E}} \odot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \text{ und } \mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix}-8. & 8.5 & 0.5\\ -8.5 & 8.75 & 0.75\\ 9.5 & -9.75 & -0.75\end{pmatrix}$$

f)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 8x & & -z & = & 5\\ -3x & +6y & -2.5z & = & 43.5\\ 4x & -y & & = & -5\end{array}\right| \text{ und } \mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix}-2.5 & 1 & 6\\ -10 & 4 & 23\\ -21 & 8 & 48\end{pmatrix}$$

Beispiel 13.9 Bestimme die Inverse von A und löse das folgende LGS **183360**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} \odot \vec{x} = \begin{pmatrix}12\\ 8\\ -6\end{pmatrix}$$

Beispiel 13.10 Matrix-Inverse **536550**

Lösen Sie das folgende *inhomogenen* linearen Gleichungssysteme durch Invertierung der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ mit dem Gauss-Jordan-Verfahren. Geben Sie $\mathbf{A}^{-1}$ an.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Beispiel 13.11 Eindeutigkeit der Lösung **820317**

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS) $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{c}$ genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix}2 & \lambda & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & 1-\lambda & 3\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

Beispiel 13.12 Eindeutigkeit der Lösung, **254537**

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.13 Inverse bestimmen **SSWSXV**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -4 & -6 \\ -8 & 5 & 7 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & b & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie a und b so, dass $\mathbf{B}$ die Inverse von $\mathbf{A}$ ist.

b) Lösen Sie mit den Resultaten von oben das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{cccc} x & +2y & -2z & = & 5 \\ 3x & +by & +z & = & 0 \\ -x & +y & -3z & = & a-1 \end{array} \right|$$

13.4 Kriterien für die Existenz der Inversen

Satz Invertierbare lineare Abbildung

Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$. Dann ist sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbf{A}$ ist invertierbar
2. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
3. Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist n.
4. Für jedes $\vec{b}$ hat die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.
5. Die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Trifft eine der Aussagen aus dem vorhergehenden Satz zu, so existiert auch die inverse Abbildung $L^{-1}(\vec{x})$ und es gilt

$$L^{-1}(\vec{x}) = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{x}$$

.

Satz Matrix einer injektiven Abbildung

Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$. Dann ist L injektiv genau dann, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Beispiel 13.14 Projektion **Y9HXCF**

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{T} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Bilder der Punkte unter der Abbildung L mit der Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} 16x + 12y \\ 12x + 9y \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Inverse von $\mathbf{A}$.

c) Falls die Inverse nicht existiert, erklären Sie weshalb.

Lösung:

a) Die Bilder lauten

$$\vec{P}' = \vec{Q}' = \vec{R}' = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}, \vec{S}' = \vec{T}' = \vec{U}' = \begin{pmatrix} -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass verschiedene Bildpunkte gleich ausfallen.

b) Inversion von $\mathbf{A}$

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 16 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1/4 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{array}\right)$$

Hier kann die Elimination nicht weitergeführt werden, denn mit der zweiten Zeile $(0, 0)$ kann die 3 in der ersten Zeile nicht eliminiert werden. Die Inverse existiert nicht.

c) Wir haben oben gesehen, dass $\mathbf{A}$ die Wirkung hat

$$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \vec{P}'$$

und

$$\vec{S}, \vec{T}, \vec{U} \xrightarrow{\mathbf{A}} \vec{S}'$$

Die Umkehrfunktion müsst also zum Beispiel folgendes bewerkstelligen können

$$\vec{S}' = \begin{pmatrix} -100 \\ -75 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}^{-1}} \vec{S}, \vec{T}, \vec{U}$$

und das ist nicht möglich, denn das Matrix-Produkt $\mathbf{A}^{-1} \odot \vec{S}'$ erzeugt einen einzigen Punkt und nicht drei verschiedene.

Beispiel 13.15 Projektion auf eine Gerade **I8MWWY**

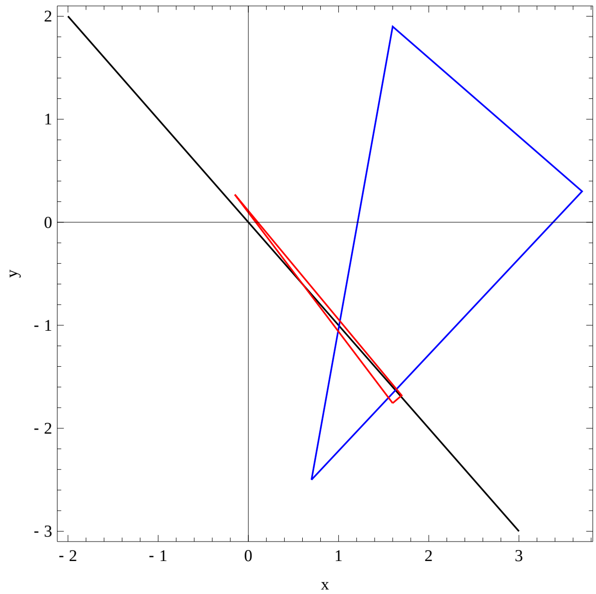
$$g: \; y = -x$$

a) Projezieren Sie den Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal auf g.

b) Wie lautet die Abbildung allgemein.

c) Bestimme die Projektions-Matrix

d) Bestimme die Inverse von $\mathbf{P}$.



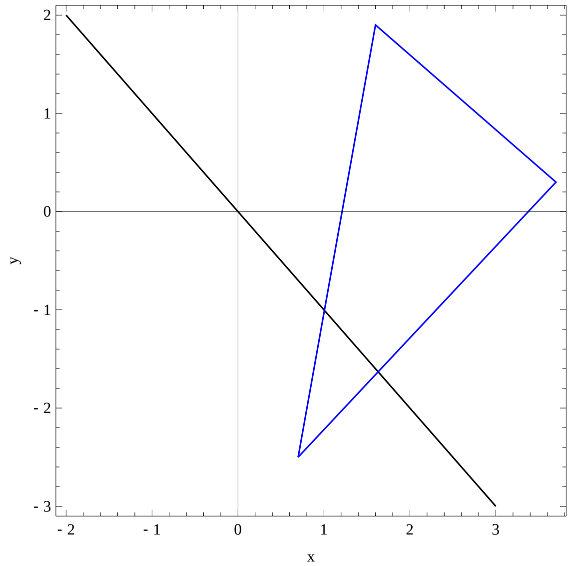
Beispiel 13.16 Fast eine Projektion **58II14**

a) Berechne die Bilder der Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -1.6 \\ 1.9 \end{pmatrix}$ unter der Abbildung

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Zeichne die Bildpunkte. Beschreibe das Bild des Dreiecks in Worten.

c) Invertiere $\mathbf{Q}$!



13.5 Injektiv, surjektiv und bijektiv Abbildungen

Definition Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

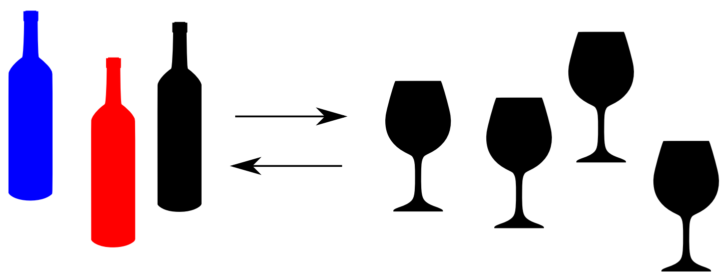
Sei L eine Abbildung[a] von D nach Z oder in Symbolen

$$L: \ D \mapsto Z \ .$$

- L heisst **injektiv**, falls für je zwei Elemente $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $L(x_1) \neq L(x_2)$.
- L heisst **surjektiv**, falls zu jedem $y \in Z$ mindestens ein $x \in D$ existiert mit $L(x) = y$.
- L heisst **bijektiv**, falls L injektiv und surjektiv ist.

[a]Das Wort Abbildung bedeutet bereits, dass jedem $x \in D$ ein $y \in Z$ zugeordnet wird.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]



Wir können die Begriffe injektiv und surjektiv in einem Bild veranschaulichen. Wir betrachten die Flaschen $x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots$ als Definitionismenge D und die gefüllten Gläser $L(x_1)$, $L(x_2)$, $L(x_3)$, $L(x_4)$ ... als Zielmenge. Injektiv bedeutet dann, dass verschiedene Flaschen nur in verschiedene Gläser geschüttet wurden (keine zwei Flaschen, wurden in das selbe Glas geschüttet). Und surjektiv bedeutet, dass es keine leeren Gläser gibt, nachdem eingeschenkt wurde.

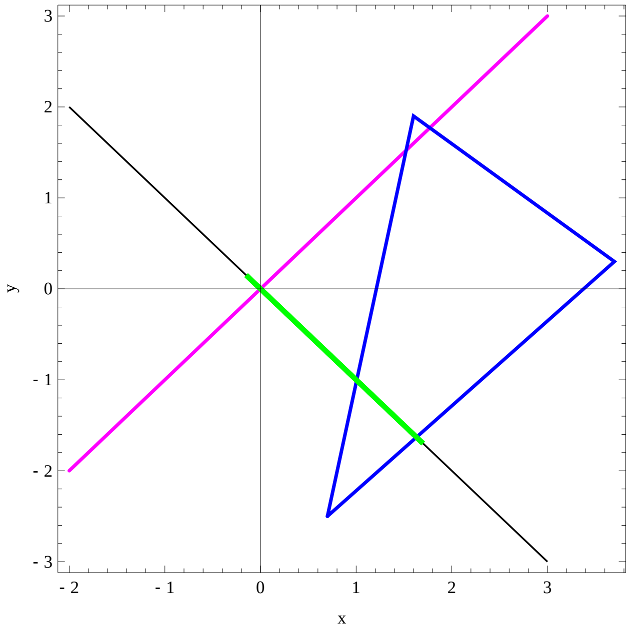
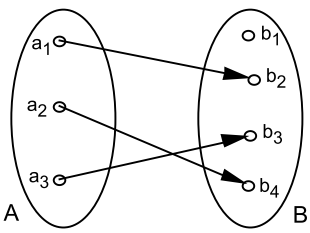


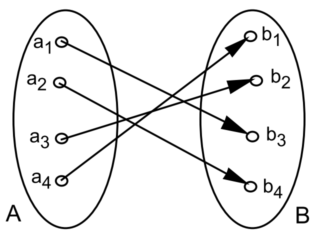
Abbildung 13.1: Bei der Projektion **P** wird die ganze violette Gerade auf den Ursprung abgebildet. Die Abbildung ist nicht injektiv. Deshalb gibt es keine Inverse.

Beispiel 13.17 Injektiv, surjektiv, bijektiv; **089077**

Beurteilen Sie welche Eigenschaften die aufgeführten Funktionen besitzen:



a)



b)

a) $f : x \in \mathbb{R}^- \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

b) $f : x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

Satz Existenz der Umkehrabbildung

Ist $L : D \mapsto Z$ bijektiv, so existiert eine eindeutige Abbildung $L^{-1} : Z \mapsto D$, die jedem $y \in Z$ ein $x \in D$ zuordnet mit $L(x) = y$. Diese Abbildung heisst Umkehr-Abbildung von L und wird als L^{-1} geschrieben.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]

In Abb. 13.1 wird gezeigt, dass die Abbildung **Q** die Abstände zur Geraden $g : y =$

$-1x$ nur kleiner macht. Die Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ wird zwar geschrumpft wird, aber es wird nicht projiziert. Dann fallen durch die Abbildung **Q** keine weiteren Punkte auf die Gerade g ausser die, die schon darauf sind. Deshalb ist **Q** injektiv[1] und hat auch eine Inverse.

Infobox Eigenschaften der Projektion

- Informationen über eine oder mehr Dimension(en) gehen verloren.
- Es gibt noch mehr Vektoren als $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ die auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ abgebildet werden.
- Die Matrix, die eine Projektion enthält, erkennt man daran, dass die Spalten-Vektoren linear abhängig sind.

Beispiel 13.18 Umkehrfunktion **081061**

Betrachten Sie die Funktion $f(x) : x \in \mathbb{R} \mapsto y \in \mathbb{R}$ mit $y = m \cdot x + q$ $(m, q \in \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie für den Fall, dass f bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1}.

b) Bestimmen Sie, für welche Werte von m und q die Funktion f bijektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass die in b) bestimmte Funktion f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion von f ist, indem Sie nachprüfen, dass $f^{-1} \circ f = 1$ gilt.

Beispiel 13.19 Invertierbarkeit **980407**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der Determinante.

a) $\begin{pmatrix}3 & -3\\4 & -4\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\2 & -2 & 3\\2 & 0 & -2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}-10 & -5 & 2 & -6\\4 & 3 & -1 & 5\\1 & -1 & 0 & -4\\-7 & -4 & 0 & -4\end{pmatrix}$

Beispiel 13.20 Invertierbarkeit **312846**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der linearen Abhängigkeit der Zeilen.

[1] surjektiv ist die Abbildung sowieso

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Definition Kern einer Abbildung L, Nullraum einer Matrix A

Wir betrachten alle $\vec{x}$, die über $L(\vec{x})$ auf $\vec{0}$ abgebildet werden:

$$L(\vec{x}) = \vec{0}\ .$$

Diese Vektoren heissen **Kern** von L.
Die Matrix $\mathbf{A}$ hat einen **Nullraum**. Es sind die Vektoren $\vec{x}$ für die gilt

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}\ .$$

Wir werden nicht unterscheiden zwischen einer linearen Abbildung L und der entsprechenden Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$. Deshalb werden wir auch vom *Kern einer Matrix* sprechen.

Matrizen mit $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \neq \vec{0}$ lassen sich nicht invertieren. Um dies zu verstehen, halten Sie sich vor Augen, dass eine Abbildung einem Element der Bildmenge nur *ein* Element der Definitionsmenge zuordnen darf, damit sie invertierbar bleibt.
Betrachten wir kurz den Fall, wo eine Abbildung zwei Elementen g_1 und g_2 das selbe Element h in der Bildmenge zuordnet. Bei der Umkehrabbildung ist nicht klar, ob h auf g_1 oder g_2 abgebildet werden soll. Deshalb existiert keine Umkehrabbildung. Siehe auch Beispiel 13.14.
Gibt es ausser $\vec{0}$ noch andere Vektoren, die auf $\vec{0}$ abgebildet werden, ist die Abbildung $\mathbf{A}$ nicht umkehrbar.
Um den Nullraum zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$. In der erweiterten Matrix-Form, braucht man die Nullen in der letzten Spalten nicht zu schreiben, da die Äquivalentransformationen dort stets wieder Nullen ergeben.

Beispiel 13.21 Invertierbarkeit, 465999

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Bestimmen Sie dazu den Kern der Abbildungen mit Zeilenoperationen, d.h. löse $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 13.22 Singuläre Matrix **1I13CG**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k-3 & -3 & k \\ 3 & k+2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme k, so dass $\mathbf{A}$ singulär[a] ist.

b) Bestimme die Werte von k, so dass $\mathbf{B}$ die Inverse von $\mathbf{A}$ ist.

c) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & i \end{pmatrix}$$

überführt werden. Benutze die Resultate von oben.

[a] singulär=hat keine Inverse

13.6 Weitere Sätze über die Inverse

Beispiel 13.23 Linksinverse, Rechtsinverse **285208**

Da die Matrizen nicht kommutativ sind, ergibt sich die Frage ob aus

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

auch folgt

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1} \ ?$$

Multiplizieren Sie dafür den ersten Ausdruck mit $\mathbf{A}^{-1}$ und benutzen Sie die Gesetze für die Matrixmultiplikation (Satz 9.2)

Aus diesen Überlegungen (Beispiel) folgt, dass die Matrix mit ihrer Matrix-Inversen immer kommutiert.

Infobox Inverse für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dies gilt, falls **A** regulär ist, d.h. $\det(A) \neq 0$.

Beispiel 13.24 Inverse für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ **86AFC1**

Invertieren Sie folgende Matrizen

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Infobox Weitere Gesetze für die Inverse

Seien **A** und **B** regulär, dann gilt

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{\intercal})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}$

Die Beweise für die Sätze finden sich in Beispiel 13.25.

Beispiel 13.25 Beweise für die Gesetze der Inversen **TPXL3B**

Wir betrachten reguläre die Matrizen **A** und **B**.

a) Finden Sie Argumente, weshalb $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{B}^{-1}$

c) Zeigen Sie, dass gilt

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal} = (\mathbf{A}^{\intercal})^{-1}$$

Vorgehen:

i) Wir starten mit dem Ausdruck $\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$

ii) Transponieren auf beiden Seiten

iii) Benutze

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^\intercal = \mathbf{B}^\intercal \odot \mathbf{A}^\intercal$$

und vereinfache auf beiden Seiten

d) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck soweit wie möglich

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal)^{-1} \mathbf{A} \odot (\mathbf{B}^\intercal \odot \mathbf{A})^{-1} \odot [(\mathbf{B}^{-1})^\intercal]^{-1}$$

Beispiel 13.26 Formal auflösen **CTX1KQ**

Wir betrachten die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Löse Sie die Gleichungen formal nach $\mathbf{X}$ auf und geben Sie an, unter welcher Bedingung dies möglich ist.

a) $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

b) $3\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{B} \odot \mathbf{X}$

c) $(\mathbf{A} \odot \mathbf{X})^\intercal = 4\mathbf{X}^\intercal \odot \mathbf{B} - 5\mathbf{C}$

d) $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{X} \odot \mathbf{B}$

KAPITEL 14

RCL-Netzwerke mit Wechselstrom

Lernziele Impedanzen in Zeigerdarstellung

- Die Studierenden können Wechselströme und -spannungen in der Zeigerdarstellung angeben.
- Sie kennen die Zeigerdarstellung von Impedanzen für die Elemente R, C und L.
- Sie können stationäre Ströme und Spannungen für lineare Netzwerke mit Hilfe von Impedanzen berechnen.

Im Folgenden wollen wir RCL-Netzwerke mit linearen Elementen betrachten, die mit einer festen Wechselspannung der Frequenz oder (Kreisfrequenz)

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ oder } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

betrieben werden; also

$$u_Q(t) = \hat{u} \cdot \cos(t\,\omega)\ .$$

Beachten Sie, dass nur *eine* der Grössen ν, T und ω bekannt sein muss und sich die anderen beiden daraus ergeben, Oder anders ausgedrückt: ν, T und ω sind drei verschiedene Arten die Frequenz der Schwingung anzugeben.

> **Definition Transiente/stationäre Lösung**
>
> Ausserdem interessieren wir uns ausschliesslich für das Verhalten lange nach dem Einschaltvorgang. Dieses Verhalten wird **stationäre** Lösung genannt. Das Verhalten um den Zeitpunkt herum, wo die Wechselspannung ein- oder ausgeschalten wird, heisst **transiente** Lösung.[a]
>
> [a] lateinisch für "vorübergehend".

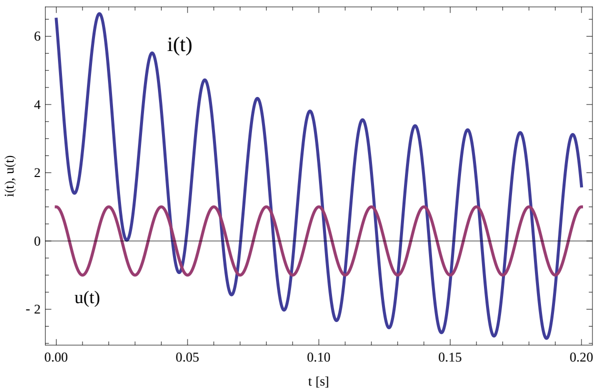


Abbildung 14.1: Ein RCL-Kreis wird an eine Wechselstromquelle angeschlossen. Zunächst schwingt sich der Keis ein [0-0.10 s]. In dieser Zeit ist die transiente Lösung wichtig. Danach schwingen Strom und Spannung mit der selben Frequenz aber mit verschiedenen Amplituden und phasenverschoben. Das ist die stationäre Lösung.

Die Erfahrung zeigt, dass physische lineare Netzwerke, die mit einer Wechselspannung der Frequenz ω betrieben werden, nach kurzer Zeit mit der Frequenz ω schwingen. D.h. die transiente Lösung fällt schnell ab (sie verschwindet exponentiell), und es bleibt die **stationäre** Lösung bestehen. Diese Lösung wollen wir in diesem Kapitel berechnen.
Da in der stationären Lösung Strom und Spannung mit Frequenz ω schwingen, führen wir für beide die Basis $\vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega t)$ und $\vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega t)$ ein. D.h. wir stellen Ströme, die aus einer Überlagerung von $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ bestehen, als Vektoren dar, z.B.

$$i(t) = 3\cos(\omega t) + 2\sin(\omega t) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{i}$$

Bevor wir weiterarbeiten, tragen wir die Grundlagen aus der Elektrotechnik zusammen.

Beispiel 14.1 Gesamtimpedanz **6KCCFY**

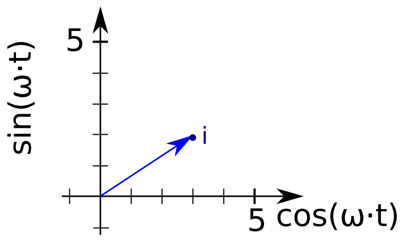
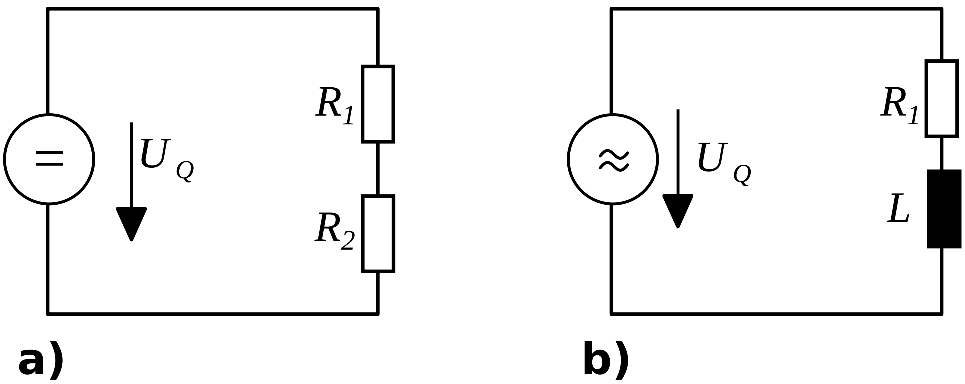


Abbildung 14.2: Wir wählen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ als Basisvektoren. In dieser Ebenen können wir Ströme der Frequenz ω darstellen als Pfeile.



a) Berechnen Sie den Gesamtwiderstand und geben Sie den resultierenden Strom an.

$$U_q = 6\ \mathrm{V},\ R_1 = 0.5\ \Omega,\ R_2 = 2.5\ \Omega,$$

b) Berechnen Sie die Gesamtimpedanz und geben Sie den resultierenden Strom an.

$$u_q(t) = 6 \cdot \cos(\omega \cdot t)\ \mathrm{V},\ \omega = \frac{2\pi}{6}\frac{1}{\mathrm{s}},\ R_1 = 0.5\ \Omega,\ L = 0.8\ \mathrm{H},$$

wobei für die Einheit Henry (H) gilt H=$\Omega \cdot s$

Lösung:

a) Der Gesamtwiderstand ist

$$R_{\mathrm{tot}} = R_1 + R_2 = 3\ \Omega$$

Der resultierende Strom berechnet sich aus dem Gesetz von Ohm

$$U = R_{\mathrm{tot}} \cdot I\ \Rightarrow I = \frac{U_q}{R_{\mathrm{tot}}} = 2\ \mathrm{A}$$

b) Die Gesamtimpedanz ist

$$\mathbf{Z}_{\text{tot}} = \mathbf{Z}_{R1} + \mathbf{Z}_L = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega L \\ -\omega L & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.83 \\ -0.83 & 0.5 \end{pmatrix} \,\Omega$$

Der resultierende Strom berechnet sich aus der Definition einer Impedanz

$$\vec{u} = \mathbf{Z}_{\text{tot}} \odot \vec{i} \;\Rightarrow \vec{i} = (\mathbf{Z}_{\text{tot}})^{-1} \odot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0.53 & -0.88 \\ 0.88 & 0.53 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\Omega} = \begin{pmatrix} 3.18 \\ 5.30 \end{pmatrix} \text{A}$$

Der resultierende Strom ist also

$$i(t) = [3.18 \cdot \cos(\omega \cdot t) + 5.30 \cdot \sin(\omega \cdot t)] \text{ A}$$

Für die Matrix-Inversionen benutzen wir folgendes:

14.1 Lineare Elemente

Wir wollen nun den Spannungsabfall an den linearen Elementen betrachten. Wir können dann die Kirchhoff'sche-Maschenregel benutzen um auch im Falle des Wechselstroms zu schreiben

Satz Kirchhoff'sche -Maschenregel

$$\sum_i u_i(t) = u_q(t)$$

dabei sind $u_i(t)$ die Spannungen an den jeweiligen Elementen und $u_q(t)$ ist die Quell-Spannung.

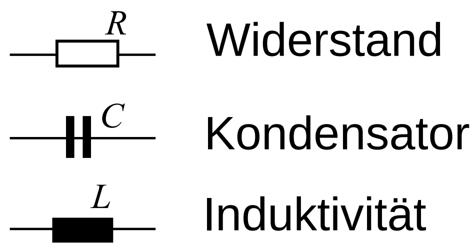


Abbildung 14.3: Die linearen Elemente in einem elektrischen Schaltkreis: Widerstand, Kapazität und Induktivität.

14.1.1 Die Kapazität C

Eine Kapazität C ist definiert durch

$$q = C \cdot u$$

d.h. je grösser die Kapazität C und je grösser die angelegte Spannung u, desto grösser die Ladung q auf der Kapazität.

Um den Strom in Verbindung mit der Spannung zu bringen, leiten wir auf beiden Seiten nach der Zeit ab und erhalten

$$\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{=i(t)} = \frac{d}{dt}C \cdot u + C \cdot \frac{d}{dt}u \,.$$

In den Wechselstromkreisen, die wir betrachten, ist eine feste Kapazität eingebaut. Sie ändert sich nicht mit der Zeit. Deshalb ist $\frac{d}{dt}C = 0$ und es bleibt

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt}u$$

Definition Kondensator

Der Spannungsabfall am Kondensator ist

$$\frac{d}{dt}u = \frac{i}{C}$$

oder integriert (d.h. auf beiden Seiten $\int\, dt$)

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{i(\tau)}{C} d\tau$$

d.h. wir können den Spannungsabfall nicht direkt berechnen, sondern nur die zeitliche Änderung des Spannungsabfalls $\frac{d}{dt}u$.

Der Widerstand R und die Induktivität L

Definition Widerstand

An einem Ohmschen Widerstand (R) fällt folgende Spannung ab

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

Hier ist der Spannungsabfall schnell berechnet.

Auch bei der Induktivität ergibt sich der Spannungsabfall aus der Definition:

Definition Induktivität

An einer Induktivität fällt die folgende Spannung ab

$$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt}i(t)$$

14.2 Herleitung Impedanzen in Zeigerdarstellung

Definition Impedanz

$$u(t) = Z(\omega) \cdot i(t)$$

dabei ist $u(t)$ eine Wechselspannung und $i(t)$ ein Wechselstrom. Beide haben die selbe Winkel-Frequenz ω.

Wir können die Impedanz aus der Analogie mit dem Widerstand verstehen. Für den Widerstand gilt $u(t) = R \cdot i(t)$, was erlaubt, aus dem Strom die Spannung zu berechnen und umgekehrt. In der Basis $\vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega t)$ und $\vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega t)$ lässt sich zumindest für die stationäre Lösung dieses Konzept auf C und L verallgemeinern. Wir ersetzen dafür R mit Z

$$u(t) = R \cdot i(t) \;\rightarrow\; u(t) = Z(\omega) \cdot i(t) \;.$$

Die Details folgen den den Aufgaben 14.3, 14.4, 14.5 und 14.6. Hier noch eine weitere Definition zur Vorbereitung dieser Aufgaben: Wir kennen den Leitwert G, mit dem wir den Strom aus der Spannung berechnen $i(t) = G \cdot u(t)$. Es gilt

$$G = \frac{1}{R}$$

In Analogie definieren wir die Admittanz.

Definition Admittanz

$$Y(\omega) = Z(\omega)^{-1}$$

dabei ist $Z(\omega)$ eine Impedanz.

Wir haben also folgende Entsprechungen. Die linke Seite gilt für Gleichstrom, die rechte für Wechselströme:

Widerstand R	$\leftrightarrow$	Impedanz Z
Leitwert G	$\leftrightarrow$	Admittanz Y

Beispiel 14.2 Ist L ein lineares Element? **IYTGLQ**

Wir betrachten den Operator $\mathcal{L}$. Er berechnet aus dem Strom durch die Induktivität L die resultierende Spannung.

$$\mathcal{L}\big(i(t)\big) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

ist dieser Operator linear?

Lösung:

i) Homogenität:

$$\mathcal{L}\big(\lambda \cdot i(t)\big) = L \cdot \frac{d}{dt} \lambda \cdot i(t) = \lambda \cdot L \cdot \frac{d}{dt} i(t) = \lambda \cdot \mathcal{L}\big(i(t)\big)$$

ii) Additivität:

$$\mathcal{L}\big(i_1(t)+i_2(t)\big) = L\cdot\frac{d}{dt}\big(i_1(t)+i_2(t)\big) = L\cdot\frac{d}{dt}i_1(t) + L\cdot\frac{d}{dt}i_2(t) = \mathcal{L}\big(i_1(t)\big)+\mathcal{L}\big(i_2(t)\big)$$

Es ist also ein linearer Operator.

Beispiel 14.3 Impedanz der Induktivität **V2URZT**

Basis:

$$\vec{e}_1 \mathrel{\hat{=}} \cos(\omega t) \text{ und } \vec{e}_2 \mathrel{\hat{=}} \sin(\omega t)$$

Berechnen Sie

a) $\mathcal{L}\big(\cos(\omega t)\big)$,

b) $\mathcal{L}\big(\sin(\omega t)\big)$.

c) Bestimmen Sie schliesslich die Matrix des Operators $\mathcal{L}\big(i(t)\big)$ in der Zeigerdarstellung.

Definition Impedanz der Induktivität

$$\mathbf{Z}_L = \begin{pmatrix} 0 & \omega L \\ -\omega L & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 14.4 Impedanz des Widerstandes **XMBTPW**

a) Bestimmen Sie den Operator, der aus dem Strom durch den Widerstand die resulierende Spannung über den Widerstand R berechnet

$$\underbrace{\mathcal{R}\big(i(t)\big)}_{=u(t)} = \ ?$$

b) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren $\mathcal{R}\big(\cos(\omega t)\big)$ und $\mathcal{R}\big(\sin(\omega t)\big)$.

c) Bestimmen Sie schliesslich die Matrix des Operators $\mathcal{R}\big(i(t)\big)$ in der Zeigerdarstellung.

Definition Impedanz des Widerstandes

$$\mathbf{Z}_R = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

Beispiel 14.5 Matrix des Admittanz der Kapazität **AVAFHJ**

a) Bestimmen Sie den Operator, der aus der Spannung $u(t)$ den Strom durch eine Kapazität C berechnet

$$\underbrace{\mathcal{C}\big(u(t)\big)}_{=i(t)} = \;?$$

b) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren $\mathcal{C}\big(\cos(\omega t)\big)$ und $\mathcal{C}\big(\sin(\omega t)\big)$.

c) Bestimmen Sie schliesslich die Matrix des Operators $\mathcal{C}\big(u(t)\big)$ in der Zeigerdarstellung.

Beispiel 14.6 Admittanz→Impedanz (Leitwert→Widerstand) **13PU3X**

Berechnen Sie aus

$$\mathbf{Y}_C = \begin{pmatrix} 0 & \omega C \\ -\omega C & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix der Impedanz der Kapazität C in der Zeigerdarstellung.

Definition Impedanz der Kapazität

$$\mathbf{Z}_C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega C} \\ \frac{1}{\omega C} & 0 \end{pmatrix}$$

14.3 Gesamt-Impedanz eines Netzwerks

Wir benutzen die Maschenregel um die Impedanz einer Serienschaltung von zwei Impedanzen zu berechnen. Für Widerstände würde gelten

$$u_Q(t) = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t)$$

und da die Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ in einer Serienschaltung gleich sind würde auch gelten

$$u_Q(t) = R_1 \cdot i(t) + R_2 \cdot i(t) = (R_1 + R_2) \cdot i(t)\ ,$$

d.h. Widerstände können addiert werden. Analog gilt daher auch für Impedanzen

$$\vec{u}_Q = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) \cdot \vec{i}\ .$$

Satz Gesamt Impedanz

Serie-Schaltung:

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2\ ,$$

Parallelschaltung:

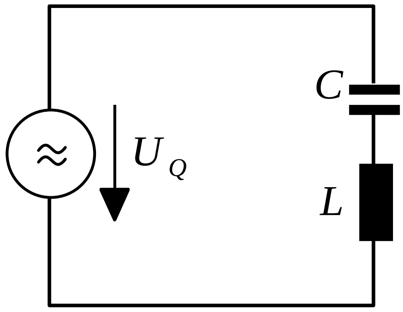
$$\mathbf{Z}_t = \big[\,(\mathbf{Z}_1)^{-1} + (\mathbf{Z}_2)^{-1}\,\big]^{-1}\ ,$$

Vergleichen Sie auch mit der Darstellung des Gesamtwiderstands einer Parallelschaltung von Widerständen:

$$R_{\text{tot}} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2}$$

Der Beweis für die Parallelschaltung wird hier ausgelassen. Er ist analog zur Herleitung des Gesamtwiderstandes einer Parallelschaltung von Widerständen.

Beispiel 14.7 CL Schaltkreis **RYWQZG**



Berechne den elektrischen Strom im eingeschwungenen Zustand für den Schaltkreis, der mit einer Wechselspannung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(t\,\omega)$$

der Frequenz ω betrieben wird. Rechnen Sie

a) mit den Werten

$$u_q(t) = 6 \cdot \cos(\omega \cdot t)\ \text{V},\ \omega = \frac{2\pi}{6}\frac{1}{\text{s}},\ L = 0.5\ \text{H},\ C = 0.8\ \text{F},$$

b) allgemein für die Anregung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(t\,\omega)$$

mit der Frequenz ω und den Elementen L und C.

Für die Einheit Farad (F) gilt übrigens F=$\frac{\text{A}\cdot\text{s}}{V}$.

Beispiel 14.8 RL-Kreis **G832E4**

Berechne die Amplitude und den Phasenwinkel des Stromes

$$i(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

am Schaltkreis im eingeschwungenen Zustand. Anregung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(t\,\omega)$$

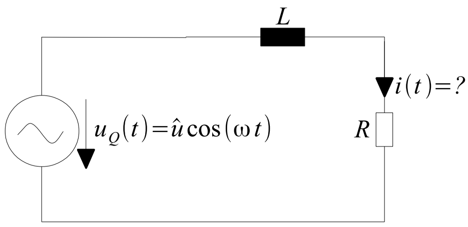
i) mit den Werten

$$\omega = 2\pi \cdot 10\,\frac{1}{\mathrm{s}},\ \hat{u} = 12\,\mathrm{V},\ L = 0.08\ \mathrm{H},\ R = 0.5\ \Omega$$

ii) mit den Werten

$$\omega = 2\pi \cdot 10^4\,\frac{1}{\mathrm{s}},\ \hat{u} = 5\,\mathrm{V},\ L = 5\ \mu\mathrm{H},\ R = 3\ \Omega$$

iii) allgemein.



Infobox Matlab-Bibliothek Impedanzen

```
% Impedanzen (Zeigerdarstellung)
% Basis: e1=cos(w*t) ; e2=sin(w*t)
Zr=@(R)[ R 0 ; 0 R ]
Zc=@(w,C)[  0 -1/(w*C) ; 1/(w*C) 0]
Zl=@(w,L) [ 0 w*L ; -w*L 0  ]

% Phasenverschiebung
% aa*cos(x)+bb*sin(x)= A*cos(x+cosphas)
% A=sqrt(aa^2+bb^2)
cosphas=@(aa,bb) (aa<0)*pi-atan(bb/aa)
% aa*cos(x)+bb*sin(x)= A*sin(x+sinphas)
sinphas=@(aa,bb) (bb<0)*pi+atan(aa/bb)
```

14.4 Übungen

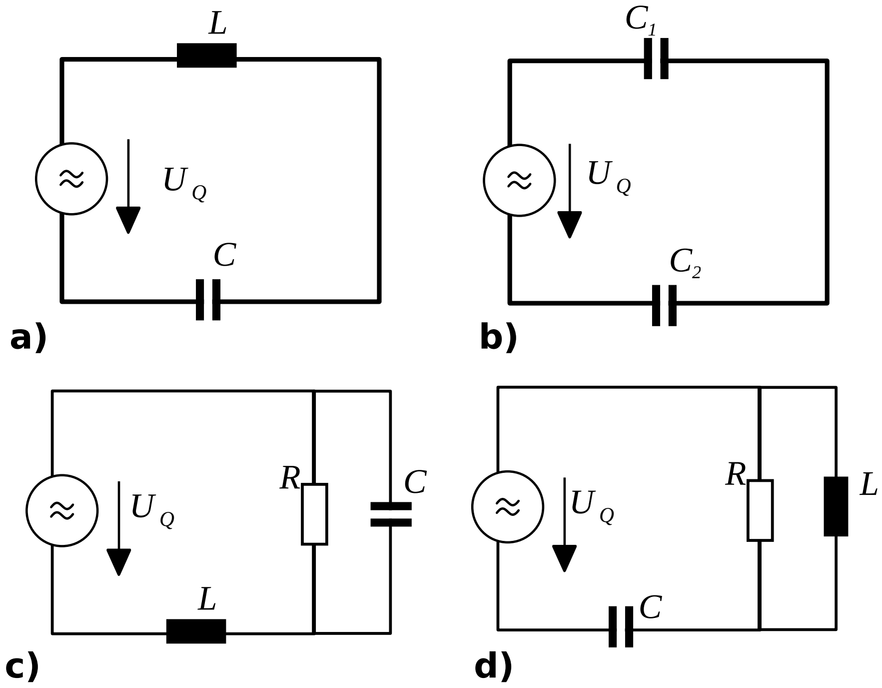
Beispiel 14.9 Gesamt-Impedanz **86MM2L**

Bestimmen Sie die Gesamt-Impedanz des Netzwerks. Rechnen Sie

i) mit den Werten

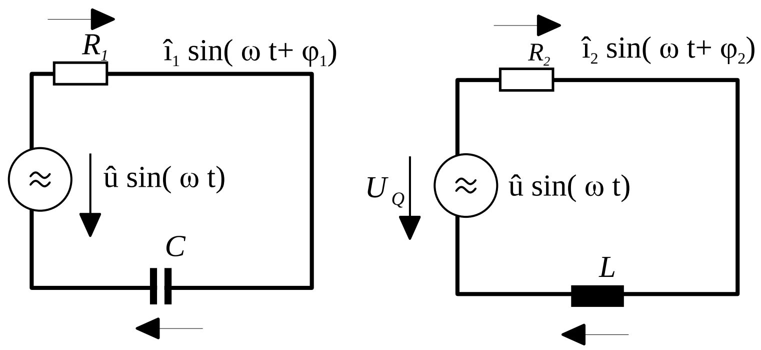
$$\omega = \frac{2\pi}{10}\,\frac{1}{\mathrm{s}},\ L = 0.8\ \mathrm{H},\ C = 0.5\ \mathrm{F},\ C_1 = 0.1\ \mathrm{F},\ C_2 = 0.3\ \mathrm{F},\ R = 1\ \Omega,$$

ii) allgemein.



Beispiel 14.10 Zeigerdiagramm **P5DDG1**

Gegeben sind die beiden Netzwerke mit den Komponenten $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $C = 300\,nF$, und $L = 3\,\mu$ H. Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gelten $\hat{u} = 10$ V und $f = 100$ kHz.
Bestimmen Sie die Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ mit Hilfe der Zeigerdarstellung.



Beispiel 14.11 Zeigerdiagramm **MZ8213**

Gegeben ist das Netzwerke mit den Komponenten $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $C = 300\,nF$, und $L = 3\,\mu$ H.

a) Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gilt

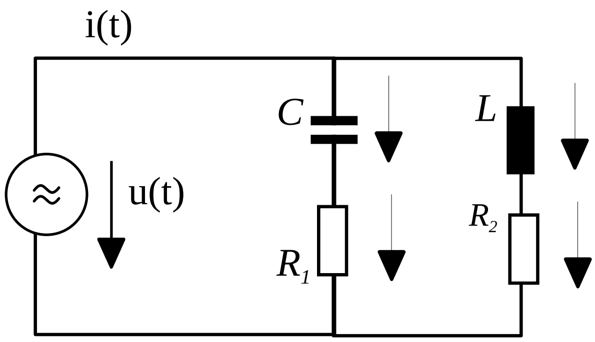
$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \text{ mit } \hat{u} = 10 \text{ V und } f = 100 \text{ kHz} .$$

Bestimmen Sie den Strom $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi')$ mit Hilfe der Zeigerdarstellung.

b) Für die Amplitude und Frequenz des sinusförmigen Quellen-Stroms gilt

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t) \text{ mit } \hat{i} = 5 \text{ A und } f = 100 \text{ kHz} .$$

Bestimmen Sie die Spannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi'')$ mit Hilfe der Zeigerdarstellung.



Beispiel 14.12 Tiefpassfilter **D1A5N3**

Gegeben ist das Netzwerke mit den Komponenten R, C. Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gelten $\hat{u}$ V und ω Hz. Bestimmen Sie die Ausgangsspannung $u_o(t) = \hat{u}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_C)$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

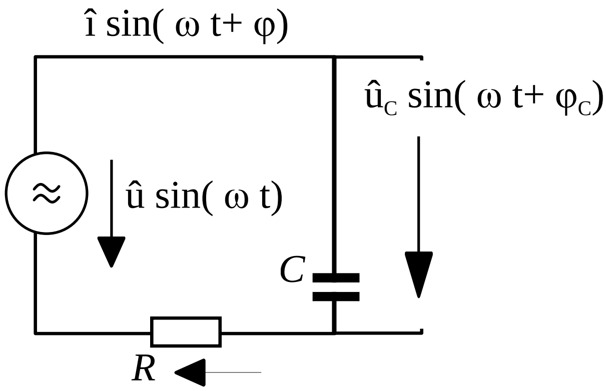
a) Bestimmen Sie die Impedanz der Kapazität und des gesamten Netzwerks in Zeigerdarstellung.

b) Berechnen Sie damit den Strom $i(t)$ im Netzwerk in Zeigerdarstellung.

c) Benutzen Sie $\vec{u} = \mathbf{Z} \odot \vec{i}$ um aus dem Strom die Spannung über der Kapazität C zu berechnen.

d) Wandeln Sie den Zeiger für die Spannung in die Form $\hat{u}_C \cdot \sin(\omega t + \varphi_C)$ um.

e) Berechnen Sie die Ausgangsspannung $\hat{u}_C$ bei $f_0 = 0$ und $f_1 = 230$ kHz, $\hat{u} = 10$ V und ein Netzwerk mit $R = 4\,\Omega$ und $C = 300$ nF.



Beispiel 14.13 Hochpassfilter **EBBCWE**

Gegeben ist das Netzwerke mit den Komponenten R, C. Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gelten $\hat{u}$ V und ω Hz. Bestimmen Sie die Gangs-Spannung $u_o(t) = \hat{u}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_C)$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

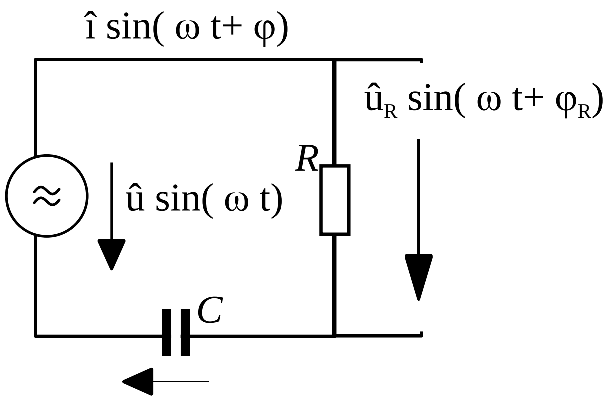
a) Das Netzwerk ist hat die selbe Struktur wie in der vorherigen Aufgababe. Deshalb können wir den resultierenden Strom in Zeigerform

$$\vec{i} = \frac{\hat{u}}{R^2 + 1/(C\omega)^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{C\omega} \\ R \end{bmatrix}$$

verwenden. Benutzen Sie $\vec{u} = \mathbf{Z} \odot \vec{i}$ um aus dem Strom die Spannung über dem Widerstand R zu berechnen.

b) Wandeln Sie den Zeiger für die Spannung in die Form $\hat{u}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_R)$ um.

c) Berechnen Sie die Ausgangsspannung $\hat{u}_C$ bei $f_0 = 0$ und $f_1 = 274$ kHz, $\hat{u} = 10$ V und ein Netzwerk mit $R = 4\,\Omega$ und $C = 300$ nF.



Teil III

Komplexe Zahlen

KAPITEL 15

Komplexe Zahlen

Lernziele Komplexe Zahlen

- Die Studierenden kennen die komplexe Zahlen ($\mathbb{C}$).
- Sie können komplexe Zahlen in der karthesichen und in der Polarform darstellen.
- Sie kennen die Zahlenebene von Gauss.
- Sie können komplexen Zahlen addieren und multiplizieren (also auch subtrahieren und dividieren).
- Sie können für $z \in \mathbb{C}$ und $q \in \mathbb{Q}$, die Potenz berechnen, z.B. $(1+i)^{14}$ und $(1+i)^{\frac{1}{5}}$ (5. Wurzel)
- Sie kennen die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten ($e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)$, Euler Formel).
- Sie können Amplitude und Phase berechnen bei der Superposition von gleichfrequenzen harmonischen Schwingungen mit Hilfe von komplexen Zahlen.

Beispiel 15.1 Gleichungen lösen

Lösen sie die Gleichungen. Diskutieren Sie: Wieviele Lösungen hat eine quadratische Gleichung hat?

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $x^2 + 25 = 0$

e) $x^2 - 10x + 34 = 0$

15.1 Komplexe Zahlen, $\mathbb{C}$, Zahlenebene von Gauss

Keine reelle Zahl erfüllt die Gleichung $x^2 = -1$, denn Quadrate von reellen Zahlen sind immer positiv.

Definition Imaginäre Einheit

Für i gilt

$$i^2 = -1$$

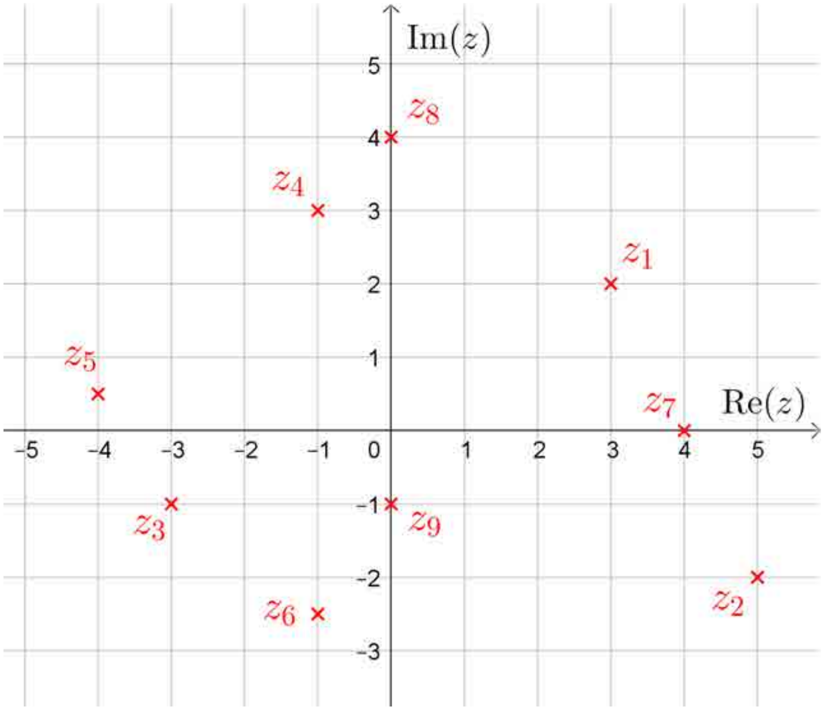
Beispiel 15.2 Komplexe Zahlenebene **KICGBV**

a) Lesen Sie $z_1, \ldots, z_9$ aus und geben Sie die Zahlen in der karthesischen Darstellung an.

b) Wie gross ist der Abstand von z_1, z_7 und z_9 vom Ursprung?

c) Geben Sie eine allgemeine Formel an um für $z = x + i\,y$ den Abstand vom Ursprung $|z|$ zu berechnen.

d) Wir nennen $|z|$ den Betrag. Was ist der Betrag von z_2, z_3 und z_4?



Beispiel 15.3 Gausschen Zahlenebene **KGX8MQ**

Wo liegen in der Gausschen Zahlenebene jeweils alle komplexen Zahlen z mit folgender Eigenschaft?

a) Der Realteil ist 2.

b) Der Imaginarteil ist 2.

c) Der Realteil und der Imaginarteil sind gleich.

d) Der Realteil ist das Doppelte des Imaginarteils.

e) $\mathrm{Im}(z) > 0$

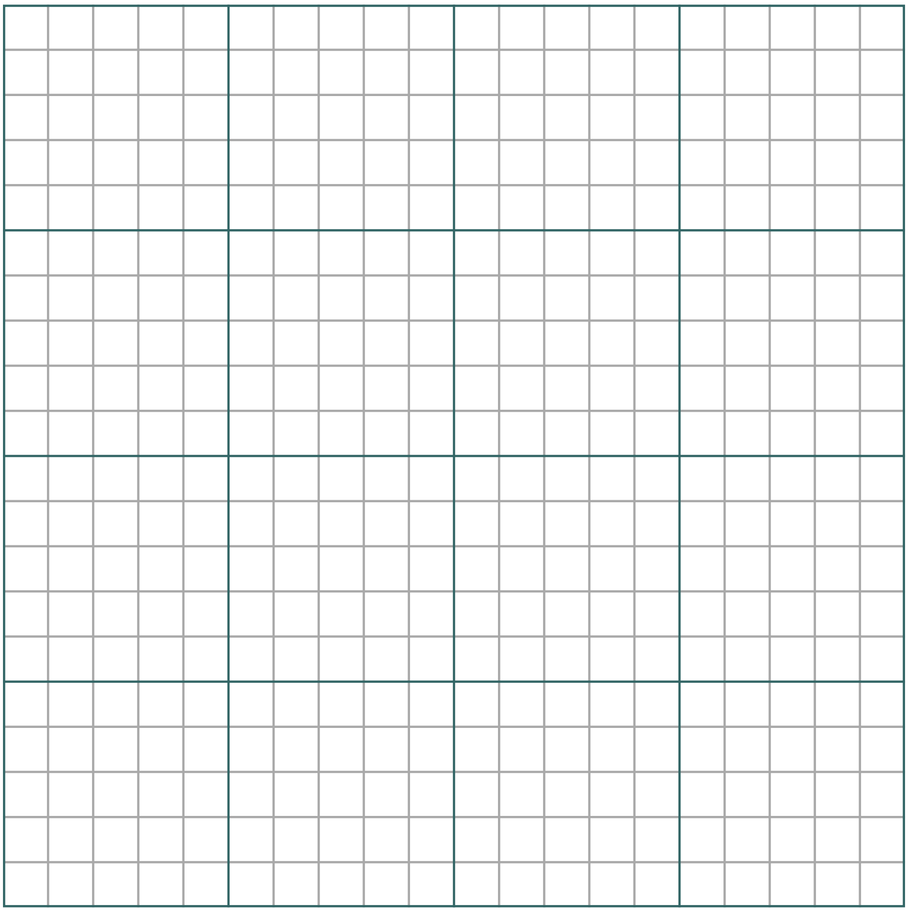
f) $\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) < 0$

g) $3 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 4$

h) $\mathrm{Im}(z)^2 < 0$

i) $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1$

j) $\big(\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\big)^2 = 1$



15.2 Addieren und Multiplizieren

Beispiel 15.4 Addition, Multiplikation **1EUM2V**

- Wie können Sie folgende Ausdrücke vereinfachen?
- Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil.
- Welche Gesetze benutzen Sie dafür?

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) i^2

b) $-i^3$

c) $-i^4$

d) i^5

e) $i^{100} - i^{98}$

f) $i + i + i$

g) $(2 + i) + (4 + 2i)$

h) $2 \cdot (1 + 3i)$

i) $a \cdot (c + i\,d)$

j) $(2 + i) \cdot (4 + 2i)$

k) $(2 + i) \cdot (2 - i)$

l) $(a + i\,b) \cdot (c + i\,d)$

Infobox Reelle Zahlen Addition, Multiplikation

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt u.a.

i) $a + (b + c) = (a + b) + c$,

ii) $a + b = b + a$,

iii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

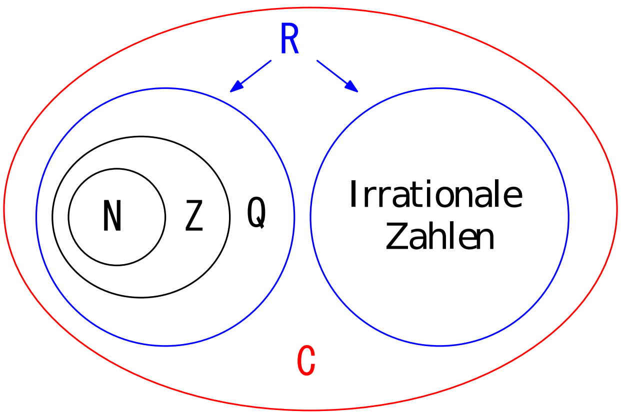
iv) $a \cdot b = b \cdot a$,

v) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

vi) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

Wir wollen die bisher bekannten Zahlenmenge in $\mathbb{C}$ einbetten.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$



Dann sollten alle Rechengesetze, die in $\mathbb{R}$ gelten, auch in $\mathbb{C}$ gelten.

Infobox Multiplikation, Addition

Multiplikation und Addition in $\mathbb{C}$ erfolgen durch

i) Zusammenfassen von Realteil und Imaginärteil (Addition)

ii) Ausmultiplizieren (Multiplikation)

Beispiel 15.5 Addition, Multiplikation **2FXNNA**

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

a) $i + 2i + 3i + 4i$

b) $i \cdot 2i$

c) $i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i$

d) $(3i)^2$

e) $(\sqrt{3}i)^2$

f) $(1+i)^2$

g) $(1+2i) \cdot (3+4i)$

h) $(2-5i) + (5+2i)$

i) $(1+i)^4$

15.2.1 Subtraktion und Division

Beispiel 15.6 Komplexe Zahlen Dividieren **R3LX15**

Stimmt die Gleichung $\frac{3+4i}{1-2i} = -1+2i$? Wie könnte man dies überprüfen?

Beispiel 15.7 Addition, Multiplikation **1IDMNV**

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

a) $i - 2i$

b) $(2-5i) - (5+2i)$

c) $\frac{i}{2i}$

d) $\frac{1}{2i}$

e) $\frac{1+2i}{3+4i}$

f) $\frac{2-5i}{5+2i}$

Beispiel 15.8 Subtraktion, Division **9KJS56**

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil.

a) $5i - 6i$

b) $(8-15i) - (15+12i)$

c) $(1+i) + (1-i) + (-1+i) + (-1-i)$

d) $(1+i) - (1-i) - (-1+i) - (-1-i)$

e) $\frac{2i}{i}$

f) $\frac{2}{2+2i}$

g) $\frac{1}{i}$

h) $\frac{4+5i}{3-4i}$

i) $\frac{1+i}{1-i}$

j) $1 + \frac{1}{i}$

k) $\frac{2/3-i5/6}{1/2-i7/3}$

l) $\frac{7/6+5/2i}{1/3-2/3i}$

m) $\frac{7i}{\sqrt{2}} + i\sqrt{5}$

n) $\frac{9+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i9}$

Infobox $1/i$

$$\frac{1}{i} = -i$$

Infobox Subtraktion, Division

i) Subtraktion = Addition der Gegenzahl, d.h. $a - b = a + (-1) \cdot b$

ii) Division: Ein Bruch wird in Real- und Imaginärteil zerlegt, indem mit dem Nenner erweitert wird. D.h. für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)}$$

wobei im rechten Ausdruck der Zähler reell ist.

Definition Die konjugiert-komplexe Zahl

Die komplexe Zahl

$$\overline{z} := x + i\,(-y) = x - i\,y$$

heisst die zu $z = x + iy$ konjugiert-komplexe Zahl.

Beispiel 15.9 Komplex konjugierte Zahl **WEFYB9**

Berechnen Sie die konjugiert komplexe Zahl. Was bedeutet die komplexe Konjugation in der Zahlenebene?

a) $z_1 = -7 - 8i$

b) $z_2 = 4i$

c) $z_3 = -17$

d) $z_4 = -2 + 3i$

Beispiel 15.10 Real- und Imaginärteil **5UF7TR**

$$z_0 = 1 - 2i$$

a) Berechnen Sie: $\mathrm{Re}\,(z_0)$, $\mathrm{Im}\,(z_0)$, $\overline{z_0}$, $\mathrm{Im}\,(i \cdot z_0)$, $\overline{\mathrm{Im}\,(z_0)}$, $\overline{i \cdot \mathrm{Re}\,(z_0)}$, $\mathrm{Re}\,(1/z_0)$.

b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z = x + i\,y$ mit $\mathrm{Im}\,(2z + 7 - 5i) = 1$.

c) Für $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = -5 + 2i$ berechnen Sie

$$\mathrm{Re}\,(z_1 + 4z_2)\,,\ \mathrm{Im}\,\left((z_1)^2 \cdot z_2\right)\,,\ \mathrm{Re}\,\left(z_1 \cdot (z_2)^2\right)\,,\ \mathrm{Im}\,(2z_1 - 3z_2)$$

d) Für $z = x + iy$ schreiben Sie $\mathrm{Re}\,(z)$ und $\mathrm{Im}\,(z)$ nur mit Hilfe von z und $\overline{z}$.

Beispiel 15.11 Betrag bei der Multiplikation FDE1CP

Überprüfen Sie, ob bei der oben gefundenen Multiplikation von komplexen Zahlen, das Gesetz für den Betrag

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

erhalten ist. Benutzen Sie, dass auch gilt

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2$$

a) $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = 6 + 8i$

b) $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = 5 + 12i$

c) $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id$

Infobox Rechenregeln für konjugiert-komplexe Zahlen

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iv) $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$

Beispiel 15.12 Betrag bei der Multiplikation (Beweis 2) GEH2DQ

Überprüfen Sie allgemein, ob bei der oben gefundenen Multiplikation von komplexen Zahlen, das Gesetz für den Betrag

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

erhalten ist. Benutzen Sie, dass dann auch gilt

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2 \text{ und } |z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

Infobox Betrag bei der Multiplikation

i) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

15.3 Polarform

Satz Satz von Euler

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Der Satz kann z.B. mit der Reihenentwicklungen der drei Funktionen gezeigt werden.

Beispiel 15.13 Sinus und Cosinus **F663GL**

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \text{ und } e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$$

b) Stellen Sie $\cos(\varphi)$ mit Hilfe von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ dar.

c) Stellen Sie $\sin(\varphi)$ mit Hilfe von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ dar.

15.3.1 Von der Polardarstellung zur karthesischen Darstellung

Beispiel 15.14 Polardarstellung **246ZKY**

Stellen Sie folgende Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und markieren Sie sie in der Zahlenebene (φ ist das Argument von z).
Zeichnen Sie auch $\overline{z}$ ein.

a) $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{7\pi}{36}$

b) $|z| = 4$, $\varphi = \frac{25\pi}{36}$

c) $|z| = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{9}$

d) $|z| = a$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

15.3.2 Von der karthesischen Darstellung zur Polardarstellung

Beispiel 15.15 Polardarstellung aus der karthesischen Darstellung Y4PQ8E

a) Wir betrachten $z = r \cdot \big(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\big)$ mit $\varphi, r \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$$

und lösen Sie den Ausdruck formal nach φ auf.

b) Berechnen Sie $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ für $z_1 = 3+4i$ und für $z_2 = -3-4i$. Welche Schwierigkeiten erwarten Sie bei der Berechnung von φ?

c) Berechnen Sie nun das Argument für die Paare

$$\begin{aligned} z_3 &= 5 + 12i, & z_4 &= -5 - 12i \\ z_5 &= 5 - 12i, & z_6 &= -5 + 12i \\ z_7 &= -4 - 13i, & z_8 &= 4 + 13i \end{aligned}$$

d) Wie kann man allgemein das Argument berechnen für $z = a + i\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$?

Beispiel 15.16 Polarform A2ELY3

Geben Sie in Polarform an (ohne Taschenrechner).

a) $2+2i$

b) $-2+2i$

c) $-2-2i$

d) $2-2i$

e) $1+\sqrt{3}i$

f) $-1+\sqrt{3}i$

g) $1-\sqrt{3}i$

h) $-1-\sqrt{3}i$

Beispiel 15.17 Polarform 2 DWGXLH

Stellen Sie folgende Zahlen in Polarform dar und markieren Sie sie in der Zahlenebene:

a) i

b) -1

c) $1+i$

d) $3+\sqrt{3}i$

e) $-1-\sqrt{3}i$

f) $0.6-0.8i$

g) $4e^{i\pi/2}$

h) $2e^{i7\pi/6}$

i) $2e^{i\cdot 0}$

j) $6e^{-i\frac{\pi}{3}}$

k) $3e^{i\pi}$

l) $6e^{i3\pi/4}$

m) $\frac{2}{3}\cdot e^{i3\pi/2}$

n) $8e^{-\pi i}$

15.3.3 Die Grundrechenarten in der Polardarstellung

Beispiel 15.18 Polardarstellung **2FG7T1**

Führen Sie die Multiplikation aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{7\pi}{5}} \cdot 7 \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$

b) $z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{3\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{9\pi}{10}}$

c) $z_1 \cdot z_2 = 10 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 5 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

d) $z_1 \cdot z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

e) $z_1 \cdot z_2 = e^{i} \cdot e^{i3}$

f) $z_1 \cdot z_2 = e^{-i\frac{21\pi}{40}} \cdot e^{-i\frac{9\pi}{40}}$

g) $(z)^3 = \left(2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3$

h) $(z)^5 = \left(3 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5$

Führen Sie die Divisionen aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

i) $z_1/z_2 = \frac{36\cdot e^{i5\pi}}{6\cdot e^{i3\pi}}$

m) $z_1/z_2 = \frac{-42\cdot e^{i4}}{6\cdot e^{i}}$

j) $z_1/z_2 = \frac{56\cdot e^{i\frac{15\pi}{4}}}{8\cdot e^{i\frac{9\pi}{4}}}$

n) $z_1/z_2 = \frac{-21\cdot e^{i\frac{5\pi}{8}}}{-3\cdot e^{i\frac{11\pi}{8}}}$

k) $z_1/z_2 = \frac{24\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{48\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

o) $z_1 \cdot (z_2)^{-1} = 24 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \left(16 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^{-1}$

l) $z_1/z_2 = \frac{63\cdot e^{i\frac{5\pi}{2}}}{-7\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}}$

p) $(z_1)^{-1} = \left(30 \cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}\right)^{-1}$

Beispiel 15.19 Grundrechenoperationen, Verallgemeinerung **5WJR7Y**

Betrachten Sie die Beispiele oben. Versuchen Sie jetzt zu verallgemeinern

a) Wie werden komplexe Zahlen in der Polardarstellung multipliziert?

b) Wie werden komplexe Zahlen in der Polardarstellung dividiert?

c) Wie berechnet man die n-te Potenz einer komplexe Zahl in der Polardarstellung?

d) Wie berechnet man die n-te Wurzel einer komplexe Zahl in der Polardarstellung?

e) Wir haben am Anfang des Kapitels besprochen, dass $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ eingebettet werden soll. Welche Gesetze aus $\mathbb{R}$ haben wir auf $\mathbb{C}$ übertragen?

Beispiel 15.20 Polarform **9G8NBZ**

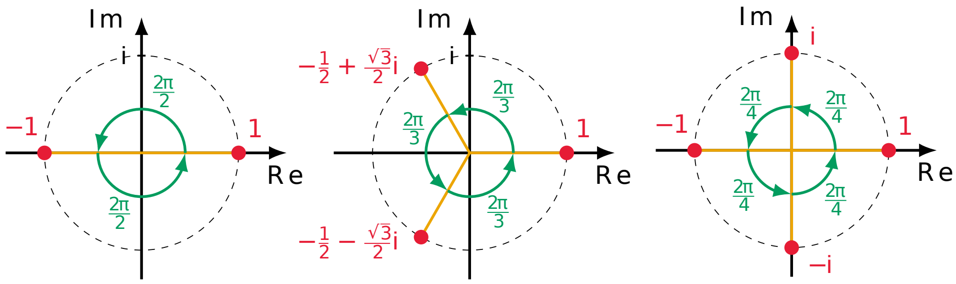
Geben Sie für $-z$, $\bar{z}$ und z^{-1} in der Polarform an (ohne Taschenrechner). Wie können Sie ihr Resultat überprüfen?

a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $z_2 = \frac{1}{3} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

c) $z_3 = 8 \cdot e^{-i\frac{5\pi}{9}}$

15.4 Potenzen und Wurzeln



Infobox Lösung (Wurzeln von komplexen Zahlen)

Die Gleichung

$$z^n = r \cdot e^{i\varphi}$$

mit $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ hat die Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Es sind n Lösungen.

Beispiel 15.21 Potenzen und Wurzeln JN82T5

a) Berechnen Sie $u = e^{i(\frac{2\pi}{3}+2\pi)}$ und $v = e^{i(\frac{2\pi}{3}+4\pi)}$

b) Geben Sie w^0, w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6 an für $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Was beobachten Sie?

c) Können Sie auch w^7, w^8 angeben?

d) Was folgt daraus für die Lösung von $z^3 = 1$?

e) Berechnen Sie $(-1)^3$ und $(e^{i\frac{\pi}{3}})^3$

f) Was folgt daraus für die Lösung von $z^3 = -1$?

g) Wie berechnen Sie die Lösungen der Gleichungen $z^6 = -1$ und $z^4 = -1$?

h) Wie können Sie Lösungen der folgenden Gleichungen bestimmen: $z^6 = -125$, $z^6 = -64$ und $z^4 = 81$.

Beispiel 15.22 Wurzeln HCH7NG

Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichungen erfüllen

a) $z^5 = -1$

b) $z^8 = 256$

c) $z^3 = 125i$

d) $z^3 = 1000 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

15.5 Gleichung n-ten Grades, Fundamentalsatz der Algebra

Beispiel 15.23 Gleichung n-ten Grades 8AIP6W

a) Wenden Sie auf die Gleichung $13 - 6x + x^2 = 0$ die Mitternachtsformel an.

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Was beobachten Sie?

b) Berechnen Sie die dritte Potenz von i, $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ und von $e^{i\frac{11\pi}{6}}$

c) Lösen Sie nun die Gleichung $z^3 = -i$.

d) Wie viele Lösungen finden Sie bei der Berechnung der Wurzel? Was vermuten Sie aufgrund dieser Resultate?

Beispiel 15.24 Quadratische Gleichungen **1TGWY4**

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$.

a) $z^2 + 6z + 9 = 0$

b) $2z^2 + 9z - 5 = 0$

c) $4z^2 + 25 = 0$

d) $4z^2 + 8z + 29 = 0$

e) $z^2 - 2iz - 10 = 0$

f) $iz^2 - (9 + 16i) = -\frac{144}{z^2}$

Satz Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom n-ten Grades ($n > 0$)

$$P(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z^1 + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_n \neq 0$ kann zerlegt werden:

$$P(z) = a_n \cdot (z + z_n) \cdot (z + z_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (z + z_2) \cdot (z + z_1)$$

Die Zahlen $z_1, z_2, \ldots z_n$ sind die Nullstellen von $P(z)$. Sie sind nicht immer verschieden voneinander, d.h. manchmal tritt eine Nullstelle mehrfach auf.

Beispiel 15.25 Gleichung 6. und 8. Grades **NANZ5I**

Lösen Sie mit Hilfe einer Substitution.

a) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

b) $z^8 + 12z^4 - 64 = 0$

Infobox Komplex konjugierte Nullstellen

Solange ein Polynom reelle Koeffizienten hat, treten komplexe Nullstellen immer komplex konjugiert auf, d.h. falls z eine Nullstelle ist ist auch $\overline{z}$ eine Nulllstelle.

Beispiel 15.26 Nullstellen **DJUTAZ**

Berechnen Sie alle Nullstellen.

a) $P(z) = z^2 - 2z + 5$

b) $P(z) = (z^2 - 2)(z - 3)(3z + 2)$

c) $P(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 1)$

d) $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$, Tipp: $z_1 = 1 - 2i$.

15.6 Zerlegen in Real- und Imaginärteil

Beispiel 15.27 Real- und Imaginärteil bei Brüchen **QP7Y08**

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen (evtl. auch Betrag und Argument).

a) $z = \frac{7+24j}{3+4j}$

b) $z = \frac{33+56j}{5-12j}$

c) $z = \frac{36-77j}{-3+4j}$

d) $z = \frac{e^{2i}}{3+4j}$

e) $z = \frac{e^{-j}}{5-12j}$

f) $z = \frac{e^{4+2j}}{-3+4j}$

g) $z = \frac{e^{-2-j}}{5-12j}$

h) $z = \frac{e^{4+\frac{\pi}{3}j}}{-3+4j}$

15.7 Harmonischen Schwingungen

Beispiel 15.28 Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen

a) Gehen Sie die Schritte unten durch. Was wird jeweils gemacht?

b) Versuchen Sie das Vorgehen zu verallgemeinern.

- Überlagerung von $f_1(t) = 3\sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 5\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$, d.h.

$$f_1(t) = 3\cos(\omega t - \pi/2) \text{ und } f_2(t) = 5\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

- Wir schreiben
$$\underline{f_1(t)} = 3e^{i(\omega t - \pi/2)} \text{ und } \underline{f_2(t)} = 5e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})}$$
- Addition
$$\underline{f_T(t)} = \underline{f_1(t)} + \underline{f_2(t)} = 3e^{i(\omega t - \pi/2)} + 5e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})} = (3e^{-i\pi/2} + 5e^{i\frac{\pi}{6}}) \cdot e^{i\omega t}$$
- Wir berechnen zunächst
$$(3e^{-i\pi/2} + 5e^{i\frac{\pi}{6}}) = -i/2 + (5\sqrt{3})/2$$
und damit
$$f_T(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{f_T(t)}\right) = \mathrm{Re}\left((-i/2 + (5\sqrt{3})/2) \cdot (\cos(\omega t) + i\,\sin(\omega t))\right)$$
Wir erhalten
$$f_T(t) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(\omega t)$$

Beispiel 15.29 Überlagerung harmonischer Wellen **GDIMWT**

Schreiben Sie die Superposition in der Form $f_T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

a) Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t)$

b) Überlagerung von $f_1(t) = 6 \cdot \sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \sin(\omega t)$

c) Überlagerung von $f_1(t) = 5 \cdot \sin(\omega t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t)$

d) Überlagerung von $f_1(t) = 7 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{10})$ und $f_2(t) = 6 \cdot \cos(\omega t + \frac{4\pi}{5})$

e) Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ und $f_2(t) = \cdot 7\cos(\omega t + \frac{9\pi}{7})$

f) Überlagerung von $f_1(t) = 7 \cdot \sin(\omega t - \pi)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t + \frac{5\pi}{8})$

g) Überlagerung von $f_1(t) = 2 \cdot \sin(\omega t - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2})$ und $f_2(t) = 7 \cdot \cos(\omega t + 1)$

h) Überlagerung von $f_1(t) = 8 \cdot \cos(\omega t + \frac{3}{8})$ und $f_2(t) = 8 \cdot \cos(\omega t + \frac{3}{7})$

KAPITEL 16

Anwendungen der linearen Algebra in der Informatik

16.1 Maschinelles Lernen und KI

Infobox Linalg für Maschinelles Lernen und KI

- Datenrepräsentation: Daten werden als Vektoren/Matrizen gespeichert und verarbeitet.
- Neuronale Netze: Gewichtsmatrizen, Aktivierungen und Gradienten werden mit Matrixoperationen berechnet.
- Optimierung: Gradientenverfahren beruhen auf linearen Algebraoperationen (Jacobi-, Hesse-Matrizen).
- PCA (Hauptkomponentenanalyse): Reduktion der Dimensionalität mittels Eigenwertzerlegung.

Beispiel 16.1 Datenrepräsentation und neuronale Netze, eine lineare Schicht
YLNC29

In der Informatik werden Daten häufig als Vektoren oder Matrizen gespeichert. z. B. ein Bild mit 3 Pixelwerten als Graustufen:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Wir wollen ein neuronalales Netzwerk baufbauen, das aus diesen Eingabedaten (Eingabevektor), entscheidet z.B. ob auf dem Bild ein Huhn oder ein Ei abgebildet ist.
Wir wollen die Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$ einer linearen Schicht eines neuronalen Netzwerkes verbessern durch eine Rückwärtspropagation.

a) Vorwärtsdurchlauf: Mit der Gewichtsmatrix wird eine Vorhersage berechnet.

In diesem Beispiel transformiert eine *lineare Schicht* die Eingabe $\vec{x}$ mittels einer Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$ und eines Bias-Vektors $\vec{b}$:

$$\hat{\vec{y}} = \mathbf{W}\vec{x} + \vec{b}$$

Berechne die Vorhersage.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.3 & 0.8 \\ -0.2 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

b) Verlustfunktion: Sie sagt, wie gut das Netz ist, indem es die Voraussage mit dem und wahren Ziel $\vec{y}$ vergleicht $L = \frac{1}{2}\left\|\hat{\vec{y}} - \vec{y}\right\|^2$.

Vergleiche $\hat{\vec{y}}$ mit dem wahren Zielwert $\vec{y}$, d.h. berechne den Fehler/Loss $L(\hat{\vec{y}}, \vec{y})$ und dessen Gradienten

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\vec{y}}} = \hat{\vec{y}} - \vec{y}$$

c) Rückwärtsdurchlauf (Backpropagation): Dieser Fehler rückpropagiert, um den Gradienten der Gewichtsmatrix zu berechnen

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = \frac{\partial L}{\partial \hat{\vec{y}}} \odot \vec{x}^{\mathsf{T}}$$

d) Gradienten-Update (Lernen): Der Gradient zeigt die Richtung, wie man die Gewichte verändern muss, d.h. mit dem Gradienten-Update passt das Netz seine Gewichtsmatrix an – und “lernt” so aus seinen Fehlern. Berechne die Ableitung (Gradient) des Fehlers mit Bezug auf die Gewichte mit der Lernrate $\eta = 0.1$:

$$\mathbf{W}_{\text{neu}} = \mathbf{W}_{\text{alt}} - 0.1\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}}$$

e) Berechnen Sie die neue Vorhersage. Wie bestimmen sie, ob sie besser oder schlechter ist als die vorherige? :

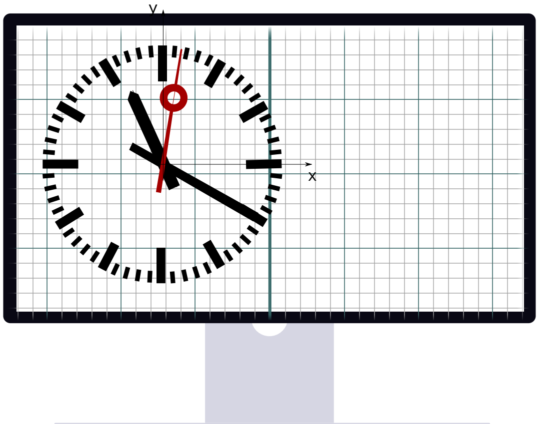
$$\hat{\vec{y}}_{\text{neu}} = \mathbf{W}_{\text{neu}} \odot \vec{x} + \vec{b}$$

16.2 Computergrafik und Bildverarbeitung

Infobox Linalg für Computergrafik und Bildverarbeitung

- Transformationen: Objekte werden durch Matrizen rotiert, skaliert, verschoben.
- Kameramodelle: Projektionsmatrizen für Abbildungen (2D und 3D).
- Rendering: Licht- und Sichtstrahlenberechnungen mit Vektoralgebra.
- Bildfilter: Faltungen (Convolutions) werden oft als Matrixoperationen dargestellt.

16.2.1 Einführung in die Computergrafik



Definition Pixel und Bildschirmkoordinaten

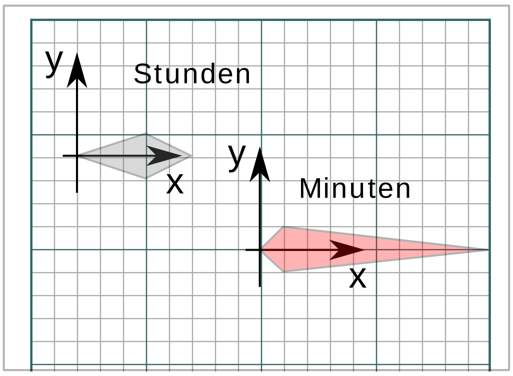
Ein Bildschirm besteht aus einzelnen Bildpunkten, den sogenannten **Pixeln**. Jedes Pixel kann eine bestimmte Farbe annehmen. Für die Computergrafik betrachten wir den Bildschirm als eine *Leinwand* (Canvas), auf der geometrische Objekte durch Einfärben geeigneter Pixel dargestellt werden.

Die Grundfrage lautet also: *Welcher Pixel erhält welche Farbe?* Um dies zu beantworten, müssen wir die Position der Objekte auf dem Bildschirm berechnen.[1]

Darstellung einer Uhr

Zur Illustration beginnen wir mit einem einfachen Beispiel: der Darstellung einer Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Die Zeiger werden mit ihren Eckpunkten dargestellt, die wir mit Hilfe von Vektoren und Drehmatrizen beschreiben können.

Beispiel 16.2 Stunden- und Minutenzeiger **9U39KE**



Wir betrachten die Zeiger, wie in der Grafik dargestellt. Das Uhrenzentrum liegt im Ursprung $(0, 0)$. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte für den Stundenzeiger und für den Minutenzeiger an.

[1] Dieser und die folgenden Abschnitte basieren auf Foley et al. [1996].

Beispiel 16.3 Zeiger drehen LYS5KY

Wir betrachten die Zeiger aus der vorherigen Aufgabe.

a) Was steht die Spitze des Stundenzeigers, wenn der Zeiger um $10°$ im Gegenuhrzeigersinn (GUZS) gedreht wird?

b) Wo liegen die weiteren Punkte?

c) Wo liegen die Punkte des Minutenzeigers?

d) Es ist $15{:}15$ Uhr. Welchen Winkel misst der Stundenzeiger zur x-Achse (GUZS)?

e) Wo liegt dann die Spitze des Minutenzeigers, und wo die weiteren Punkte?

Dreiecke und Sichtbarkeit von Flächen

Es geht darum, Pixel auf dem Bildschirm einzufärben – je nachdem, wo die Objekte, die wir darstellen wollen, liegen. Typischerweise werden die Objekte in Flächen (Faces) zerlegt.

Definition Fläche/Face

Eine **Fläche** (engl. Face) besteht aus drei Punkten $\vec{A}, \vec{B}$, und $\vec{C}$. Wenn man auf eine Fläche schaut und jeweils zum nächten Punkt geht[a], dann bewegt man sich im GUZS. Dadurch ist die Vorderseite der Fläche eindeutig definiert.

[a] zyklisch und in der Reihenfolge der Aufzählung; also von $\vec{A}$ zu $\vec{B}$, oder von $\vec{B}$ zu $\vec{C}$, oder von $\vec{C}$ zu $\vec{A}$.

Wollen wir die Fläche abbilden auf dem Bildschirm, müssen wir entscheiden, welche Pixel von der Fläche eingefärbt wird. Wir fragen uns also, Pixel innerhalb des Dreiecks liegen. Dazu prüfen wir, ob der Mittelpunkt eines Pixels $\vec{P}$ links von den Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und CA liegt.

Beispiel 16.4 Punkt im Dreieck J4DYBS

Gegeben seien die Ecken

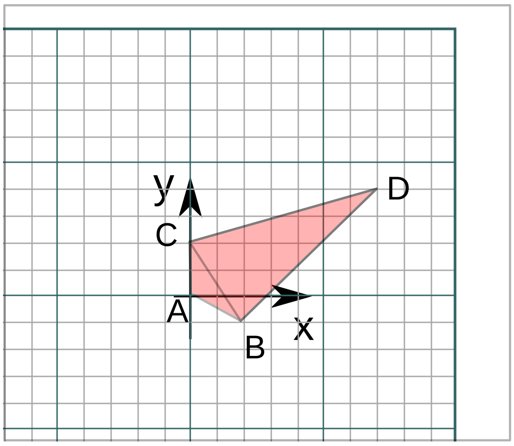
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sie definieren zwei Flächen, $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ und $(\vec{B}, \vec{D}, \vec{C})$.

a) Wir berechnen $\vec{c} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den Vektor, der senkrecht dazu steht $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.[a] Dann ist $(\vec{P} - \vec{A}) \odot \vec{n} > 0$ für Pixel $\vec{P}$, die links von $\vec{AB}$ liegen. Überprüfen Sie so, ob der Pixel $\vec{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ innerhalb von (ABC) liegt.

b) Färben Sie alle Pixel ein, die nach den obigen Kriterien im Dreiecke (ABC) liegen.

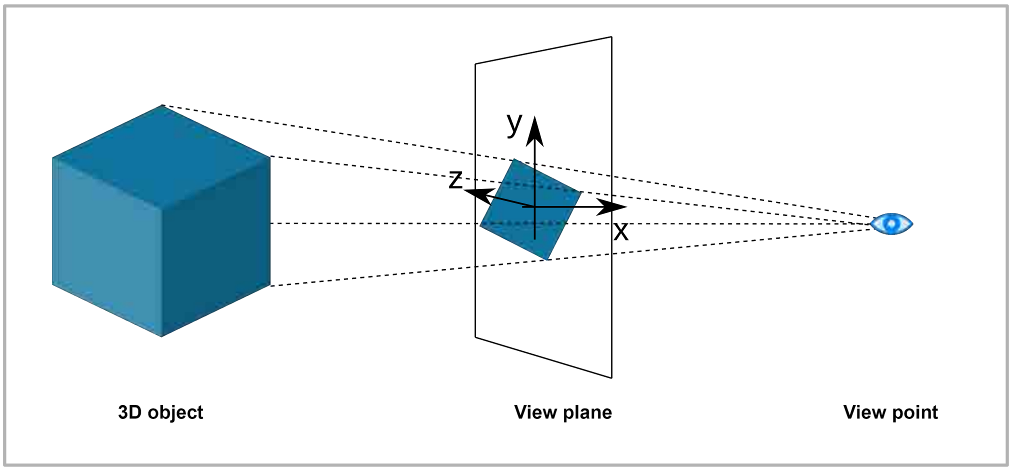
c) Färben Sie unten alle Pixel ein, die im Dreiecke (BDC) liegen.



[a]Hier legen wir uns fest, dass wir das Vorzeichen immer in der *ersten Komponente* ändern.

Übrigens: Die Zeichung in der vorherigen zeigt gut den 'Treppeneffekt' (Aliasing). Die Zeiger erscheinen ziemlich grob wenn nicht sogar verzerrt. Um schrägen Linien oder Kanten zu besser darzustellen wurde das Anti-Aliasing eingeführt in die Computergrafik. Aliasing entsteht, weil digitale Bilder aus Pixeln bestehen. Eine schräge Linie muss in dieses Raster gepresst werden, wodurch Kanten gezackt aussehen ('Treppeneffekt'). Anti-Aliasing glättet diese Kanten, indem Zwischenfarben berechnet werden. Statt dass eine Kante hart von schwarz zu weiss springt, setzt man Grautöne (oder Mischfarben) an den Übergängen ein. Dadurch wirkt die Linie glatter fürs Auge. Mehr in Ref. Foley et al. [1996].

3D-Projektionen und Sichtbarkeit



Dreidimensionale Grafik entsteht, wenn in einem ersten Schritt ein Objekt in Flächen mit drei Punkten zerlegt wird. Diese Flächen werden anschliessend auf die Leinwand projiziert. Dafür verwendet man entweder die **orthographische Projektion**, bei der Objekte senkrecht auf die Ebene des Betrachters (canvas) prjiziert werdden, oder die **stereographische Projektion**, bei der alle Punkte durch das Auge des Betrachters (z. B. Punkt Z) laufen und auf der Leinwand einen Schnittpunkt erzeugen.

Um ein 3D-Objekt auf dem Bildschirm darzustellen, projiziert man zuerst die Flächen in die 2D-Ebene der Leinwand und wendet dann die 2D-Methoden von oben an.

Was tut man, wenn sich die Flächen überlagern? Dafür wurde das **Z-Buffer-Verfahren** entwickelt, das die z-Komponente des Punktes berücksichtigt. Ein Pixel wird nur dann eingefärbt, wenn das zugehörige Objekt näher am Bildschirm liegt als das bereits gezeichnete. Auf diese Weise wird gewährleistet, dass Flächen, die näher beim Betrachter liegen, die weiter entfernten Flächen überdecken.

Beispiel 16.5 Projektionen **WEMNP7**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 20 \\ 32 \\ 13 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 22 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 16 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{E} = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix}, \vec{F} = \begin{pmatrix} 8 \\ 28 \\ 19 \end{pmatrix}, \vec{G} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{H} = \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Die Punkte oben stellen einen Würfel dar.

a) Berechnen Sie die orthographische Projektion der Punkte $\vec{A}$ bis $\vec{D}$ auf Ebene.

b) Wir nehmen an, dass das Auge bei $\vec{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ steht. Wohin würde dann der Punkt $\vec{A}$ auf die Ebene fallen?

c) Verallgemeinern Sie das Resultat von oben und berechnen Sie die Bilder der Punikte $\vec{B}$ bis $\vec{D}$ in der Ebene.

16.3 Computer Vision

Infobox Linalg für Computer Vision

- Merkmalserkennung: Bilddaten werden als Matrizen analysiert (z. B. Kanten-, Mustererkennung).
- 3D-Rekonstruktion: Verwendung linearer Gleichungssysteme zur Tiefenbestimmung.
- Homographien & Epipolargeometrie: Anwendungen von Eigen- und Singulärwertzerlegung.

16.4 Data Science und Statistik

Infobox Linalg für Data Science

- Regressionsanalyse: Lineare Regression basiert direkt auf linearen Gleichungssystemen.
- Clustering & Klassifikation: z. B. k-Means oder Support-Vector-Machines nutzen Vektorräume.
- Singulärwertzerlegung (SVD): Zentrale Methode für Textanalyse (LSA), Empfehlungssysteme etc.

16.5 Kryptographie und Codierungstheorie

Infobox Linalg für Kryptographie

- Lineare Blockcodes: Fehlerkorrektur mit Hilfe von Generator- und Paritätsprüfmatrizen.
- RSA & ECC: Arithmetik auf Vektorräumen über endlichen Körpern.
- Hashfunktionen: Mathematische Konstrukte mit linearen Operationen.

16.6 Numerische Simulation und Algorithmen

Infobox Linalg für Simulation

- Lösen linearer Gleichungssysteme: z. B. bei physikalischen Simulationen oder Optimierungsproblemen.
- Graphentheorie: Adjazenzmatrizen, Laplace-Matrizen in Netzwerken.
- PageRank-Algorithmus: basiert auf Eigenvektoren der Übergangsmatrix.

16.7 Robotik und Steuerung

Infobox Linalg für Robotik und Steuerung

- Kinematik & Dynamik: Beschreibung von Bewegungen mit Matrizen.
- Sensordatenfusion: z. B. Kalman-Filter nutzen Matrixoperationen.
- SLAM (Simultaneous Localization and Mapping): Rechenintensiv, stark auf lineare Algebra basiert.

Literaturverzeichnis

James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, and John F. Hughes, editors. *Computer Graphics: Principles and Practice*. Addison-Wesley, third edition, 1996.

S. Goebbels and S. Ritter. *Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation*. Spektrum Akademischer Verlag, 2011. ISBN 9783827427618.

Günther Malle. *Mathematik verstehen. 5*. öbv, Wien, 1. auflage edition, 2010. ISBN 978-3-209-09569-5.

Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*, volume 1 und 2. Vieweg + Teubner, Braunschweig/Wiesbaden, 12 edition, 2009.