Analysis 2
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Serie 1 Musterlösung

Klasse: 2Ub　　Semester: 2　　Datum: 29. Mai 2017

1. Ableiten

381140

Leiten Sie folgende Funktionen nach t ab.

(a) $\log \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}$

(b) $\sqrt{\frac{\alpha+\beta t}{\alpha-\beta t}}$

(c) $t^{1/3} \cdot (1-t)^{2/3} \cdot (1+t)^{1/2}$

(d) t^t

Lösung

a)

$$\begin{aligned}
\left[\log \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right]' &= \left.\frac{1}{u}\right|_{u=\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}} \cdot \left[\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right]' \\
&= \frac{t}{1+\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\left[1+\sqrt{1-t^2}\right]' \cdot t - (1+\sqrt{1-t^2}) \cdot [t]'}{t^2} \\
&= \frac{t}{1+\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1/2 \cdot (1-t^2)^{-1/2} \cdot (-2t) \cdot t - (1+\sqrt{1-t^2})}{t^2} \\
&= \frac{-1}{t} \cdot \frac{1+t^2/(1-t^2)^{1/2} + \sqrt{1-t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{-1}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}+t^2+(1-t^2)}{1+\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{-1}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt{\frac{\alpha+\beta t}{\alpha-\beta t}}\right]' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta t}{\alpha-\beta t}\right)^{-1/2} \cdot \left[\frac{\alpha+\beta t}{\alpha-\beta t}\right]' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta t}{\alpha-\beta t}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(\alpha+\beta t)' \cdot (\alpha-\beta t) - (\alpha+\beta t) \cdot (\alpha-\beta t)'}{(\alpha-\beta t)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta t}{\alpha-\beta t}\right)^{-1/2} \cdot \frac{\beta \cdot (\alpha-\beta t) - (\alpha+\beta t) \cdot (-\beta)}{(\alpha-\beta t)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha-\beta t}{\alpha+\beta t}} \cdot \frac{2\beta\alpha}{(\alpha-\beta t)^2} \\
&= \frac{\beta\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta t} \cdot (\alpha-\beta t)^{3/2}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
[\ldots]' &= \left[t^{1/3}\right]' \cdot (1-t)^{2/3} \cdot (1+t)^{1/2} + t^{1/3} \cdot \left[(1-t)^{2/3}\right]' \cdot (1+t)^{1/2} \\
&\quad + t^{1/3} \cdot (1-t)^{2/3} \cdot \left[(1+t)^{1/2}\right]' \\
&= \frac{1}{3}t^{-2/3} \cdot (1-t)^{2/3} \cdot (1+t)^{1/2} + t^{1/3} \cdot \frac{2}{3}(1-t)^{-1/3} \cdot (-1) \cdot (1+t)^{1/2} \\
&\quad + t^{1/3} \cdot (1-t)^{2/3} \cdot \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2} \cdot 1 \\
&= \left[t^{1/3} \cdot (1-t)^{2/3} \cdot (1+t)^{1/2}\right] \cdot \left[\frac{1}{3}\frac{1}{t} - \frac{2}{3}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+6}\right] \\
&= \left[t^{1/3} \cdot (1-t)^{2/3} \cdot (1+t)^{1/2}\right] \cdot \frac{2(1-t)\cdot(1+t) - 4t\cdot(1+t) + 3t\cdot(1-t)}{6\cdot t(1-t)\cdot(1+t)} \\
&= \left[t^{1/3} \cdot (1-t)^{2/3} \cdot (1+t)^{1/2}\right] \cdot \frac{-9t^2 - t + 2}{6\cdot t(1-t)\cdot(1+t)} \\
&= \frac{-9t^2 - t + 2}{6\cdot t^{2/3}(1-t)^{1/3}\cdot(1+t)^{1/2}}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\left[t^t\right]' &= \left[e^{\log(t)\cdot t}\right]' \\
&= e^{\log(t)\cdot t}\left[\log(t)\cdot t\right]' \\
&= e^{\log(t)\cdot t}\left[\frac{1}{t}\cdot t + \log(t)\cdot 1\right] \\
&= t^t\left[1+\log(t)\right]
\end{aligned}$$

2. Integration 702335

Lösen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_1^4 t^3 - 6t^2 + 11t - 2dt$

(b) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ mit $f(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$

(c) $\int \left(\frac{1}{3}t - 2\right)^2 dt$

(d) $\int \left(4x+3\right)^3 dx$

Lösung

(a) $\int_1^4 t^3 - 6t^2 + 11t - 2dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{6t^3}{3} + \frac{11t^2}{2} - 2t\right]_1^4 = \left[\frac{4^4}{4} - \frac{6\cdot 4^3}{3} + \frac{11\cdot 4^2}{2} - 2\cdot 4\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{6\cdot 1}{3} + \frac{11\cdot 1}{2} - 2\cdot 1\right] = \frac{57}{4}$

(b) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 (1+x)\,dx + \int_0^1 e^x\,dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + [e^x]_0^1 = 0 - \left[-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right] + e^1 - e^0 = -\frac{1}{2} + e$

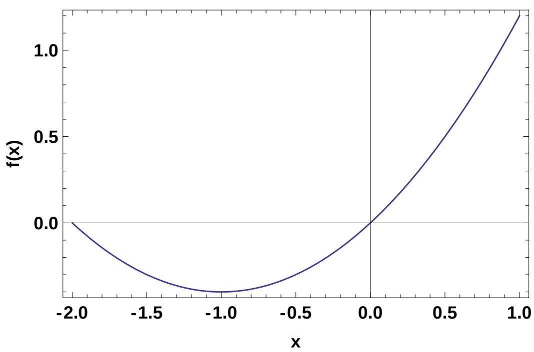
(c) $\int \left(\frac{1}{3}t - 2\right)^2 dt = \int \frac{1}{9}t^2 - 4\frac{1}{3}t + 4dt = \frac{1}{9\cdot 3}t^3 - \frac{4}{3\cdot 2}t^2 + 4\cdot t + C = \frac{t^3}{27} - \frac{2t^2}{3} + 4t + C$

(d) $\int \left(4x + 3\right)^3 dx = \int 64x^3 + 144x^2 + 108x + 27dx = \frac{1}{16}(4x+3)^4 + C$

3. Fläche **705773**

Berechnen Sie die Fläche, die der Graph von $f(x) = \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x$ auf dem Intervall $[-2; 1]$ mit der x-Achse einschliesst.

Lösung



Bei 0 ist eine Nullstelle. Deshalb muss die Fläche stückweise berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-2}^{0} \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x\,dx + \int_0^1 \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x\,dx \\ &= -\Big[\frac{2x^3}{15} + \frac{2x^2}{5}\Big]_{-2}^0 + \Big[\frac{2x^3}{15} + \frac{2x^2}{5}\Big]_0^1 \\ &= -\Big[0 - \frac{2\cdot(-2)^3}{15} + \frac{2\cdot(-2)^2}{5}\Big] + \Big[\frac{2\cdot 1^3}{15} + \frac{2\cdot 1^2}{5} - 0\Big] \\ &= \frac{8}{15} + \frac{8}{15} = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

4. Integration durch Substitution **688314**

Lösen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$

(b) $\int (5x+12)^{\frac{1}{2}}dx$

(c) $\int -3\cdot\sqrt{3}(1-t)^3 dt$

(d) $\int \frac{\arctan z}{1+z^2}dz$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{u}} \frac{1}{3x^2} \cdot du \\ &= \int \frac{1}{3 \cdot \sqrt{u}} \cdot du = \frac{1}{3} \frac{u^{1/2}}{1/2} + C \\ &= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1+x^3} + C \end{aligned}$$

mit der Substitution

$$u = 1 + x^3 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 3x^2 \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{3x^2} \cdot du$$

(b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (5x+12)^{\frac{1}{2}} dx = \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{5} \\ &= \frac{1}{5} u^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3/2} + C = \frac{2}{15} \cdot \sqrt{(5x+12)^3} + C \end{aligned}$$

mit der Substitution

$$u = 5x + 12 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 5 \;\Rightarrow\; dx = \frac{du}{5}$$

(c)

$$\begin{aligned} F(t) &= \int -3 \cdot \sqrt{3}(1-t)^3 dt = -3\sqrt{3} \int (u)^3 \cdot -du \\ &= 3\sqrt{3} \frac{u^4}{4} + C = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}(1-t)^4 + C \end{aligned}$$

mit der Substitution

$$u = 1 - t \;\Rightarrow\; \frac{du}{dt} = -1 \;\Rightarrow\; dt = -du$$

(d)

$$\begin{aligned} F(z) &= \int \frac{\arctan z}{1+z^2} dz = \int \frac{u}{1+z^2}(1+z^2) \cdot du \\ &= \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\arctan z)^2 + C \end{aligned}$$

mit der Substitution

$$u = \arctan z \;\Rightarrow\; \frac{du}{dz} = \frac{1}{1+z^2} \;\Rightarrow\; dz = (1+z^2) \cdot du$$

Zusatzaufgaben

1. Integration durch Substitution 173677

Lösen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^\pi \cos^3(x)\sin(x)dx$

(b) $\int \frac{2x+6}{x^2+6x-12}dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$

(d) $\int_{-1}^1 \frac{5+x}{5-x}dx$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \cos^3(x)\sin(x)dx = \int_{u=\cos(0)}^{u=\cos(\pi)} u^3 \cdot \sin(x) \cdot -\frac{du}{\sin(x)} \\ &= -\int_1^{-1} u^3\,du = -\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^{-1} = 0 \end{aligned}$$

mit der Substitution

$$u = \cos(x) \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = -\sin(x) \;\Rightarrow\; dx = -\frac{du}{\sin(x)}$$

Wir merken uns (beide Sätze sind gleichbedeutend):

- Wird eine ungerade Funktion integriert, und die Integrationsgrenzen sind $-a$ und a, dann verschwindet das Integral.
- Wird eine gerade Funktion $f(x)$ ausgewertet mit $\big[f(x)\big]_{-a}^{a}$, dann verschwindet der Ausdruck.

(b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{2x+6}{x^2+6x-12}dx = \int \frac{2x+6}{u}\frac{du}{2x+6} \\ &= \int \frac{1}{u}du = \log|u| + C = \log\left|x^2+6x-12\right| + C \end{aligned}$$

mit der Substitution

$$u = x^2+6x-12 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 2x+6 \;\Rightarrow\; dx = \frac{du}{2x+6}$$

(c)

$$I = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_{u=1+(-1)^2}^{u=1+(1)^2} \frac{t}{\sqrt{u}}\frac{du}{2t} = 0$$

mit der Substitution

$$u = 1+t^2 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dt} = 2t \;\Rightarrow\; dt = \frac{du}{2t}$$

Die obere und die untere Grenze des Integrals sind gleich, deshalb ist der Wert des Integrals 0.

(d)

$$\begin{aligned} I &= \int_{u=5-(-1)=6}^{u=5-1=4} \frac{5+(5-u)}{u}(-du) = -\int_{u=6}^{4} \frac{10-u}{u} du \\ &= [-10\log|u| + u]_6^4 \\ &= [-10\log|4| + 4] - [-10\log|6| + 6] = -10\log(4/6) - 2 = 2.055 \end{aligned}$$

Die Substitution ist $u = 5-x$. Beidseitiges Ableiten nach x führt auf $\frac{du}{dx} = 0-1$. Das kann nach $dx = -du$ aufgelöst werden. Anderseits kann $u = 5 - x$ auch nach $x = 5 - u$ aufgelöst werden. Diese drei Relationen werden gebraucht um x bei der Subtitution zu eliminieren.

2. Integration, gemischte Aufgaben 513982

Lösen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int \sqrt{4t-2}dt$

(b) $\int \frac{1}{(3t-4)^2}dt$

(c) $\int 2x + 4x^{-2}dx$

(d) $\int_1^5 \frac{x^5+x}{x^2}dx$

(e) $\int \frac{4x^2-4}{2x-2}dx$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{4x+3}}dx$

(g) $\int_{-1}^{10} \frac{1}{(5x+10)^4}dx$

Lösung

(a) $\frac{1}{6}(4t-2)^{3/2} + C$

(b) $\frac{1}{12-9t} + C$

(c) $x^2 - \frac{4}{x} + C$

(d) $\int_1^5 \frac{x^5+x}{x^2}dx = \left[\frac{x^4}{4} + \log(x)\right]_1^5 = 156 + \log(5) \approx 157.609$

(e) $x^2 + 2x + C$

(f) $\frac{1}{2}\sqrt{4x+3} + C$

(g) $\left[-\frac{1}{15(5x+10)^3}\right]_{-1}^{10} = \frac{1727}{3240000} \approx 0.000533025$