Analysis 2
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Serie 2 Musterlösung

Klasse: 2Ub Semester: 2 Datum: 29. Mai 2017

---

1. **Partielle Integration**
   Lösen Sie die folgenden Integrale.

   (a) $\int x \cdot \log(x) dx$

   (b) $\int x \cdot \cos(x) dx$

   (c) $\int_0^{0.8} x \cdot e^x dx$

   (d) $\int \sin^2(\omega \cdot x) dx$

   (e) $\int e^x \cdot \cos(x) dx$

   (f) $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$

   Lösung

   (a)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x \cdot \log(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \int \frac{x^2}{2} \cdot \log(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \left(\log(x) - \frac{1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

   Wir haben partiell integriert. Dabei ist:

$$\begin{aligned} \log(x) &\rightarrow \frac{1}{x} \\ x &\leftarrow \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x \cdot \cos(x) dx = \sin(x) \cdot x - \int 1 \sin(x) dx \\ &= \sin(x) \cdot x + \cos(x) + C \end{aligned}$$

   Wir haben partiell integriert. Dabei ist:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow 1 \\ \cos(x) &\leftarrow \sin(x) \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{0.8} x \cdot e^x dx = \left[x \cdot e^x \right]_0^{0.8} - \int e^x dx \\ &= \left[x \cdot e^x - e^x \right]_0^{0.8} = \left[x \cdot e^x - e^x \right]_0^{0.8} \\ &= \left[0.8 \cdot e^{0.8} - e^{0.8} - (0 - 1) \right] = 0.555 \end{aligned}$$

Wir haben partiell integriert. Dabei ist:

$$\begin{array}{rcl} x & \to & 1 \\ \exp(x) & \leftarrow & \exp(x) \end{array}$$

(d)

$$\begin{aligned} F &= \int 1-\cos^2(\omega\, x)dx = \int 1\, dx - \int \cos(\omega\, x)\cos(\omega\, x)dx \\ &= x - \left[\frac{\cos(\omega\, x)\sin(\omega\, x)}{\omega} + \int \sin^2(\omega\, x)dx\right] \\ &= x - \frac{\cos(\omega\, x)\sin(\omega\, x)}{\omega} - F \end{aligned}$$

Wir haben zwei Mal partiell integriert und ausgenutzt, dass $\sin^2(\omega\, x) = 1 - \cos^2(\omega\, x)$. Die letzte Zeile besagt nun $F = x + \frac{\cos(\omega\, x)\sin(\omega\, x)}{\omega} - F$. Aufgelöst nach F ergibt dies $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\omega}\cdot \sin(\omega\cdot x)\, \cos(\omega\cdot x) + C$

(e)

$$\begin{aligned} F &= \int e^x\cdot\cos(x)dx = e^x\sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx \\ &= e^x\cdot\sin(x) - \big[-e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\, dx\big] \\ &= e^x\cdot\big[\sin(x)+\cos(x)\big] - F \end{aligned}$$

Die letzte Zeile besagt nun $F = e^x\cdot\big[\sin(x)+\cos(x)\big] - F$. Aufgelöst nach F ergibt dies

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot e^x\cdot(\sin(x)+\cos(x)) + C$$

(f) $F(x) = -e^{-x}\cdot(x^2+2x+2) + C$

2. Gemischte Aufgaben 755823

(a) $\int (2-\sin^2(t))\cdot\cos(t)\, dt$

(b) $\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\, dx$

(c) $\int_0^1 2\cdot x^3\cdot e^{x^2}\, dx$

(d) $\int \frac{t-3}{(t^2-6t+1)^{3/2}}dt$

(e) $\int \frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1}{t}\, dt$

(f) $\int_1^e \big(6x^2-2\big)\cdot\log(x)dx$

Lösung:

(a) Substitution mit $u = \sin(t)$ (also $du/dt = \cos(t)$):

$$\begin{aligned} F(t) &= \int (2-u^2)\cdot\cos(t)\,\frac{du}{\cos(t)} = \int (2-u^2)\cdot du \\ &= 2u - \frac{u^3}{3} + C = 2\sin(t) - \frac{1}{3}\cdot\sin^3(t) + C \end{aligned}$$

(b) Partielle Integration:

$$\begin{aligned} x &\to 1 \\ \exp(-x) &\leftarrow -\exp(-x) \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} I &= [-x\cdot e^{-x}]_0^\infty - (-1)\cdot\int_0^\infty e^{-x}\,dx \\ &= [0-0]_0^\infty + [-e^{-x}]_0^\infty = -[0-1] = 1 \end{aligned}$$

(c) Substitution mit $u = x^2$ (also $du/dx = 2x$):

$$\begin{aligned} I &= \int_{u=0}^{u=1} 2\cdot u\cdot x\cdot e^u\,\frac{du}{2x} = \int_0^1 u\cdot e^u\,du \\ &= [u\cdot e^u]_0^1 - \int_0^1 e^u\,\frac{d}{u} = e - 0 - [e^u]_0^1 \\ &= e - [e-1] = 1 \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde eine partielle Integration durchgeführt mit

$$\begin{aligned} u &\to 1 \\ \exp(u) &\leftarrow \exp(u) \end{aligned}$$

(d) Substitution mit $u = t^2 - 6t + 1$ (also $du/dt = 2t - 6$):

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{t-3}{u^{3/2}}\frac{du}{2t-6} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u^{3/2}}du \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1/2}}{1/2} + C = -u^{-1/2} + C = -\frac{1}{\sqrt{t^2-6t+1}} + C \end{aligned}$$

(e) Substitution mit $u = \sqrt{1+t}$ (also $du/dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}$ und $t = u^2 - 1$):

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1}{u^2-1}\,du\cdot 2\cdot\sqrt{1+t} \\ &= 2\int\frac{1}{u^2-1}\,du = -2\cdot\frac{1}{2}\log\frac{u+1}{u-1} + C \\ &= \log\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1} + C \end{aligned}$$

(f) Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \log(x) &\rightarrow \frac{1}{x} \\ 6x^2 - 2 &\leftarrow 6\frac{x^3}{3} - 2x = 2x^3 - 2x \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} I &= \left[(2x^3 - 2x) \cdot \log(x)\right]_1^e - \int_1^e (2x^3 - 2x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 2\left[(e^3 - e) \cdot \log(e) - (1^3 - 1) \cdot \log(1)\right] - 2\int_1^e x^2 - 1\, dx \\ &= 2e^3 - 2e - 2\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^e = 2e^3 - 2e - 2\left[\frac{e^3}{3} - e - (\frac{1^3}{3} - 1)\right] \\ &= \frac{6}{3}e^3 - 2e - 2\frac{e^3}{3} + 2e + 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{4}{3}(e^3 - 1) \end{aligned}$$