Analysis 2
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Serie 3, Musterlösung

Klasse: 2Ub | Semester: 2 | Datum: 29. Mai 2017

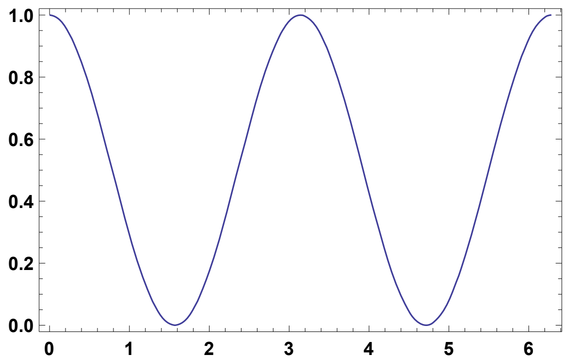
1. Flächenberechnung

Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurven und der x-Achse im gegebenen Interval

(a) $f(x) = \cos^2(x)$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$.

(b) $f(x) = 4x \cdot (x^2 - 4)$ mit $-4 \leq x \leq 4$.

Lösung



a) Der Graph hat keinen Anteil unter der x-Achse, deshalb kann man über das ganze Intervall integrieren:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \cos(x) \cdot \cos(x) dx = [\sin(x) \cdot \cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \sin(x) dx \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(x) dx = [x]_0^{2\pi} - A \end{aligned}$$

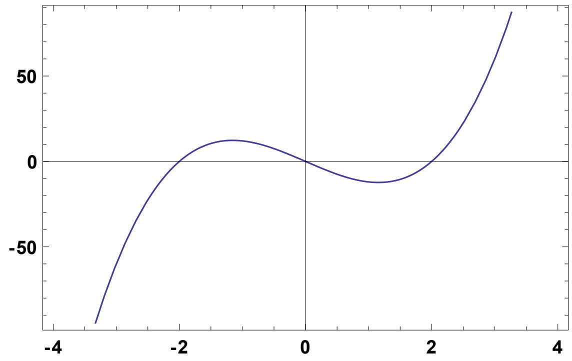
Aus

$$A = 2\pi - A$$

folgt

$$2A = 2\pi \quad \Rightarrow \quad A = \pi$$

b)



Der Graph hat Nullstellen bei $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.

Die Flächen werden deshalb separat berechnet

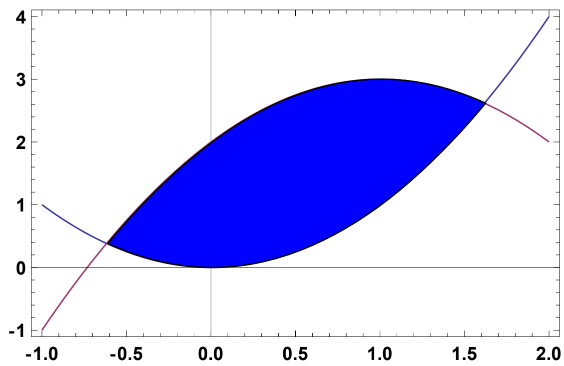
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} 4x \cdot (x^2-4)dx - \int_{0}^{2} 4x \cdot (x^2-4)dx = \int_{-2}^{0} 4x^3 - 16xdx - \int_{0}^{2} 4x^3 - 16xdx \\ &= \left[\frac{4x^4}{4} - \frac{16x^2}{2}\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{4x^4}{4} - \frac{16x^2}{2}\right]_{0}^{2} \\ &= 0 - (16-32) - [16-32-0]_0^2 = 32 \end{aligned}$$

2. Flächenberechnung

Berechnen Sie die Fläche, die die beiden Parabeln miteinander einschliessen.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(x) &= -x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

Lösung



Die beiden Graphen schneiden sich bei

$$x^2 = -x^2 + 2x + 2$$

d.h.

$$2x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$$

mit den Lösungen

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Die eingeschlossene Fläche ist also

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} -x^2 + 2x + 2 - (x^2) dx = \int_{x_1}^{x_2} -2x^2 + 2x + 2dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} -2x^2 + 2x + 2dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= 1 + \sqrt{5} + \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(1 + \sqrt{5}\right)^3 - \left[1 - \sqrt{5} + \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(1 - \sqrt{5}\right)^3\right] \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{3} \approx 3.73 \end{aligned}$$

3. Rotationsvolumen

Berechnen Sie das Rotationsvolumen eines Körpers, der durch die Drehung des Kurvenstücks $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ $(4 \leq x \leq 10)$ entsteht.

Lösung

$$\begin{aligned} V &= \int_4^{10} \pi \cdot \left[\sqrt{x^2 - 16}\right]^2 dx = \pi \cdot \int_4^{10} x^2 - 16dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 16x\right]_4^{10} = \pi \cdot \left[\frac{1000}{3} - 160 - (\frac{64}{3} - 64)\right] \\ &= \pi \cdot 216 \approx 678.58 \end{aligned}$$

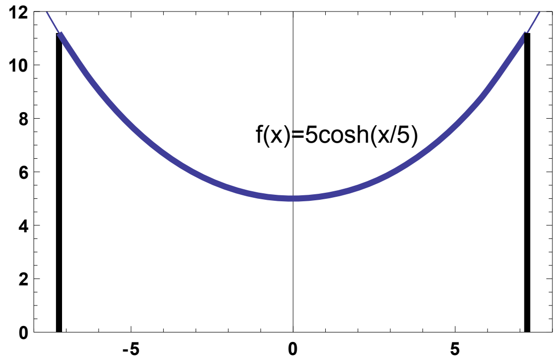
Rechnung in SI, d.h. Volumen in m^3.

4. Bogenlänge, Kettenlinie

Eine Kette hängt normalerweise durch und kann mit einer cosh-Funktion beschrieben werden. Berechnen Sie die Länge der Kette, die zwischen zwei Pfosten der selben Höhe im Abstand 14.44 m aufgehängt ist.

$$f(x) = 5 \cdot \cosh(x/5) \ .$$

Lösung



Wir führen die Rechnung in SI Einheiten durch, d.h. die Längen messen wir in m:

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\frac{14.44}{2}}^{\frac{14.44}{2}} \sqrt{1 + ([5 \cdot \cosh(x/5)]')^2} dx \\ &= \int_{-7.22}^{7.22} \sqrt{1 + [\sinh(x/5)]^2} dx = \int_{-7.22}^{7.22} \cosh(x/5) dx \\ &= \left[\frac{1}{1/5} \cdot \sinh(x/5) \right]_{-7.22}^{7.22} = 5 \cdot [2.00 + 2.00] = 20 \end{aligned}$$