Differentialgleichungen
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Serie 4, Musterlösung

Klasse: 2Ub | Semester: 2 | Datum: 29. Mai 2017

1. Lösung einer Differentialgleichung

Zeigen Sie, dass die Lösungen die entsprechenden Differentialgleichungen erfüllen. Setzen Sie dazu die Lösung in die Differentialgleichung ein und zeigen Sie, dass die beiden Seiten übereinstimmen.

(a) $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$ mit der Lösung $y(x) = \left(\frac{2}{3}\log|1+x^3| + C\right)^{\frac{1}{2}}$

(b) $y' - y^2\sin(t) = 0$ mit der Lösung $y(t) = \frac{1}{\cos(t)+C}$

(c) $y' = \frac{4x^3-1}{y}$ mit der Lösung $y(x) = \sqrt{2x^4 - 2x + C}$

(d) $x \cdot \frac{dy}{dx} = (1-y^2)^{\frac{1}{2}}$ mit der Lösung $y(x) = \sin(\log|x| + C)$

Lösung

(a) Wir wollen kontrollieren, ob $y(x) = \left(\frac{2}{3}\log|1+x^3| + C\right)^{\frac{1}{2}}$ eine Lösung der DGL $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$ ist. Dafür berechnen wir $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\log\left|1+x^3\right| + C\right)^{-1/2} \cdot \left[2\frac{\log|1+x^3|}{3} + C\right]' \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\log\left|1+x^3\right| + C\right)^{-1/2} \cdot \left[\frac{2}{3}\frac{1}{1+x^3} \cdot 3x^2\right] \\ &= \frac{1}{2y} \cdot \left[\frac{2x^2}{1+x^3}\right] \end{aligned}$$

Wird der letzte Ausdruck in die DGL eingesetzt

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{x^2}{1+x^3} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

sieht man, dass die DGL erfüllt ist, d.h. $y(x)$ ist eine Lösung.

(b) Wir berechnen zuerst $y'(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{-1}{(\cos(t)+C)^2} \cdot [\cos(t) + C]' \\ &= -y^2 \cdot [-\sin(t)] = y^2\sin(t) \end{aligned}$$

In die DGL eingesetzt ergibt dies

$$y^2\sin(t) - y^2\sin(t) = 0$$

also ist $y(t)$ eine Lösung.

(c) Wir berechnen zuerst $y'(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2x^4-2x+C}} \cdot \left[2x^4-2x+C\right]' \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{y} \cdot \left[8x^3-2\right] \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{y} \cdot 2\left(4x^3-1\right) = \frac{4x^3-1}{y} \end{aligned}$$

In die DGL eingesetzt ergibt dies

$$\frac{4x^3-1}{y} = \frac{4x^3-1}{y}$$

also ist $y(t)$ eine Lösung.

(d) Wir berechnen zuerst $y'(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \cos\left(\log|x|+C\right) \cdot \left[\log|x|+C\right]' \\ &= \cos\left(\log|x|+C\right) \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wandeln wir den Term $(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$ so um, dass er nicht mehr sin enthält sondern cos, weil wir cos erhalten haben beim Ableiten

$$\begin{aligned} \sqrt{1-y^2} &= \sqrt{1-\sin(\log|x|+C)^2} = \sqrt{1-(1-\cos(\log|x|+C)^2)} \\ &= \sqrt{\cos(\log|x|+C)^2} = \cos(\log|x|+C) \end{aligned}$$

In die DGL eingesetzt ergibt dies

$$x\,\cos\left(\log|x|+C\right) \cdot \frac{1}{x} = \cos\left(\log|x|+C\right)\ .$$

2. Separierbare Differentialgleichungen

Lösen Sie folgende separierbaren Differentialgleichungen

(a) $\frac{dy}{dx} - x^3 = 0$ mit $y(0) = 5$

(b) $\frac{dy}{dx} - \cos(x) = 0$ mit $y(0) = 1$

(c) $y\frac{dy}{dx} - x = 0$ mit $y(0) = 2$

(d) $\frac{dy}{dx} - x^3 - x^4 = 0$ mit $y(0) = 0$

(e) $\cos(y)\frac{dy}{dx} - x = 0$ mit $y(0) = 0$

(f) $e^y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ mit $y(0) = \log(2)$.[1]

[1]Wir verwenden ausschliesslich den Logarithmus zur Basis e, den wir als log schreiben.

Lösung

(a) Auflösen, d.h. alle y, dy links, alle x, dx rechts:
$\frac{dy}{dx} = x^3 \mid \cdot dx$
$dy = x^3\,dx$. Jetzt wird auf beiden Seiten das Integralzeichen geschrieben und integriert

$$\begin{aligned} \int dy &= \int x^3\,dx \\ y &= \frac{1}{4}x^4 + C\ . \end{aligned}$$

In der Integrationskonstanten C werden die Integrationskonstanten von beiden Seiten zusammengefasst. Damit ist die DGL gelöst. Jetzt setzen wir noch die Anfangsbedingungen ein, um die Integrationskonstante zu bestimmen

$$y(0) = \frac{1}{4}0^4 + C = 5; \Rightarrow\ C = 5$$

Die Lösung lautet also $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + 5$

(b) mit $y(0) = 1$ Auflösen, d.h. alle y, dy links, alle x, dx rechts:
$\frac{dy}{dx} = \cos(x) \mid \cdot dx$
$dy = \cos(x)\,dx$. Jetzt wird auf beiden Seiten das Integralzeichen geschrieben und integriert

$$\begin{aligned} \int dy &= \int \cos(x)\,dx \\ y &= \sin(x) + C\ . \end{aligned}$$

Anstatt auf beiden Seiten je eine Integrationskonstante zu schreiben, fassen wir die beiden zusammen $C_1 + C_2 = C$. Das ist nun die allgemeine Lösung der DGL. Um die spezielle Lösung der DGL zu finden, setzen wir die Anfangsbedingungen ein

$$y(0) = \sin(0) + C = 1; \Rightarrow\ C = 1$$

Die Lösung lautet also $y(x) = \sin(x) + 1$

(c) Das Vorgehen ist wie oben, die wichtigen Zwischenresultate sind

$$\begin{aligned} y\,dy &= x\,dx \\ \int y\,dy &= \int x\,dx \\ \frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ y(x) &= \pm\sqrt{x^2 + D} \\ y(0) &= \pm\sqrt{0^2 + D} = 2\ \Rightarrow\ D = 4 \\ y(x) &= \pm\sqrt{x^2 + 4} \end{aligned}$$

Achtung, die beim Ziehen der Wurzel muss meistens rechts $\pm$ eingeführt werden. Ausserdem dürfen die Wurzeln der Summanden nicht separat gezogen werden. Um dies zu verstehen, gibt es zwei Wege:

i. $\sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3.17$. Würden wir die Würzel separat ziehen würden wir $\sqrt{1} + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$ erhalten. Indem die Wurzeln separat gezogen werden, wird das Resultat verändert.

ii. Die Graphen von $g(x) = \sqrt{x^2+4}$ und $f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{4} = |x| + 2$ beschreiben verschiedene Kurven. Die erste gleicht einem Kelch, die zweite besteht aus zwei Geraden, die sich bei $x = 0$ schneiden.

Visualisierung mit Matlab:

```
g=@(x) sqrt(x^2+4) ; f=@(x) sqrt(x^2)+2
fplot(g,[-2,2]) ; hold on
fplot(f,[-2,2]) ; hold off
```

(d)

$$\begin{aligned}
\int dy &= \int x^3 + x^4\, dx \\
y &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + C \\
y(0) &= \frac{1}{4}0^4 + \frac{1}{5}0^5 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \\
y(x) &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\int \cos(y) dy &= \int x\, dx \\
\sin(y) &= \frac{x^2}{2} + C \\
y &= \arcsin\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \\
y(0) &= \arcsin\left(\frac{0^2}{2} + C\right) = 0 \Rightarrow C = 0 \\
y(x) &= \arcsin\left(\frac{x^2}{2} + C\right)
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\int e^y\, dy &= \int 2\, x\, dx \\
e^y &= x^2 + C \\
y &= \log\left(x^2 + C\right) \\
y(0) &= \log\left(0^2 + C\right) = \log(2) \Rightarrow C = 2 \\
y(x) &= \log\left(x^2 + 2\right)
\end{aligned}$$