Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

D. Adams
IMN
Büro: 5.1C19
Differentialgleichungen

Musterlösung Serie 6

Klasse: 2Ub Semester: 2 Datum: 25. April 2017

---

1. Trennbare und lineare DGLs

Lösen Sie die nachfolgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung (Anfangswertprobleme).
Bestimmen Sie danach die allgemeinen und die partikulären Lösungen.

Lösung

(a)

$$x' + tx = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad x(0) = 1$$

Lineare DGL mit $p(t) = t$ und $q(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.
Homogene DGL:

$$x' + tx = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int -t dt \Rightarrow \log|x| = -\frac{t^2}{2} + C \Rightarrow x_{\text{hom}} = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Inhomogene DGL (Variation der Konstanten):
Ansatz:

$$x = C(t)e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow x' = C'(t)e^{-\frac{t^2}{2}} - tC(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Einsetzen:

$$C'(t)e^{-\frac{t^2}{2}} - tC(t)e^{-\frac{t^2}{2}} + tC(t)e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow C(t) = \int 1 dt = t + C$$

$$\Rightarrow x(t) = (t + C)\, e^{-\frac{t^2}{2}} = te^{-\frac{t^2}{2}} + Ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Partikuläre Lösung:

$$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = 0e^{-\frac{0^2}{2}} + Ce^{-\frac{0^2}{2}} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow x = (t + 1)\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(b)

$$x'x = t, \quad x(0) = 3$$

Separierbare DGL:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} \Rightarrow xdx = tdt$$

Allgemeine Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} \Rightarrow \int xdx = \int tdt \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow x = \pm\sqrt{C + t^2}$$

Partikuläre Lösung:

$$x(0) = 3 \Rightarrow 3 = \sqrt{C + 0^2} \Rightarrow C = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9 + t^2}$$

(c)

$$x' - \sin(t)x = 0, \quad x(0) = 3$$

Separation:

$$x' - \sin(t)x = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int \sin(t) dt \Rightarrow \log|x| = -\cos(t) + C$$

Allgmeine Lösung:

$$\Rightarrow x = Ce^{-\cos(t)}$$

Anfangsbedingungen:

$$x = Ce^{-\cos(0)} = 3 \ \Rightarrow \ C = 3 \cdot e$$

Partikuläre Lösung:

$$x = 3 \cdot e \cdot e^{-\cos(t)} = 3 \cdot e^{1-\cos(t)} \ .$$

(d)

$$x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0$$

Lineare DGL mit $p(t) = 1$ und $q(t) = e^{-t}$ (lineare DGL mit konstanten Koeffizienten).
Homogene DGL:

$$x' + x = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int -1 dt \Rightarrow \log|x| = -t + C \Rightarrow x_{\text{hom}} = Ce^{-t}$$

Inhomogene DGL (Variation der Konstanten):
Ansatz:

$$x = C(t)e^{-t} \Rightarrow x' = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t}$$

Einsetzen:

$$C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = e^{-t}$$

$$\Rightarrow C(t) = \int 1 dt = t + C$$

$$\Rightarrow x(t) = (t + C)\, e^{-t} = te^{-t} + Ce^{-t}$$

Partikuläre Lösung:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0e^{-0} + Ce^{-0} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x = te^{-t}$$

(e)

$$x' + \tan(t)x = \sin(t), \quad x(0) = 0$$

Lineare DGL mit $p(t) = \tan(t)$ und $q(t) = \sin(t)$.
Homogene DGL:

$$x' + \tan(t)x = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \int -\tan(t)dt \Rightarrow \log|x| = \log(\cos(t)) + C$$

$$\Rightarrow x_{\text{hom}} = C\cos(t)$$

Inhomogene DGL (Variation der Konstanten):
Ansatz:

$$x = C(t)\cos(t) \Rightarrow x' = C'(t)\cos(t) - C(t)\sin(t)$$

Einsetzen:

$$C'(t)\cos(t) - C(t)\sin(t) + \tan(t)C(t)\cos(t) = \sin(t)$$

$$\Rightarrow C(t) = \int \tan(t)dt = -\log(\cos(t)) + C$$

$$\Rightarrow x(t) = (-\log(\cos(t)) + C)\cos(t)$$

Partikuläre Lösung:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = (-\log(\cos(0)) + C)\cos(0) \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x = -\cos(t)\log(\cos(t))$$

(f)

$$x' = \frac{t^2}{x^2}, \quad x(0) = 1$$

Separierbare DGL:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x^2} \Rightarrow x^2dx = t^2dt$$

Allgemeine Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x^2} \Rightarrow \int x^2dx = \int t^2dt \Rightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{t^3}{3} + C \Rightarrow x = \sqrt[3]{C + t^3}$$

Partikuläre Lösung:

$$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt[3]{C + 0^3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1 + t^3}$$

(g)

$$x' - 3x = t^2, \quad x(0) = -\frac{2}{27}$$

Lineare DGL mit $p(t) = -3$ und $q(t) = t^2$ (lineare DGL mit konstanten Koeffizienten).
Homogene DGL:

$$x' - 3x = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \int 3dt \Rightarrow \log|x| = 3t + C \Rightarrow x_{\text{hom}} = Ce^{3t}$$

Inhomogene DGL (Variation der Konstanten):
Ansatz:

$$x = C(t)e^{3t} \Rightarrow x' = C'(t)e^{3t} + 3C(t)e^{3t}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} C'(t)e^{3t} + 3C(t)e^{3t} - 3\left(C(t)e^{3t}\right) &= t^2 \\ \Rightarrow C(t) &= \int t^2 e^{-3t} dt = -\frac{1}{27}\left(2 + 6t + 9t^2\right)e^{-3t} + C \\ \Rightarrow x(t) &= -\frac{1}{27}\left(2 + 6t + 9t^2\right) \cdot \underbrace{1}_{=e^{-3t}\cdot e^{3t}} + Ce^{3t} \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung:

$$x(0) = -\frac{2}{27} \Rightarrow -\frac{2}{27} = \left(-\frac{1}{27}\left(2 + 6 \cdot 0 + 9 \cdot 0^2\right)e^{-3\cdot 0} + C\right)e^{3\cdot 0}$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{27}\left(2 + 6t + 9t^2\right)$$

(h)

$$x' - \sqrt{t} = \sqrt{t}x^2, \quad x(0) = 0$$

Separierbare DGL:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{t}\left(1 + x^2\right) \Rightarrow \frac{1}{1 + x^2}dx = \sqrt{t}dt$$

Allgemeine Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{t}\left(1 + x^2\right) \Rightarrow \int \frac{1}{1 + x^2}dx = \int \sqrt{t}dt \Rightarrow \arctan(x) = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$$

$$\Rightarrow x = \tan\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C\right)$$

Partikuläre Lösung:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = \tan\left(\frac{2}{3}\sqrt{0^3} + C\right) \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x = \tan\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)$$

Hinweis:

$$\int \tan(t)dt = -\log(\cos(t))$$