



Serie 7, Musterlösung

Klasse: 2Ub

Semester: 2

Datum: 30. Mai 2017

1. Lineare Differentialoperatoren

Welche der folgenden Operatoren sind linear? Bringen Sie dafür die Operatoren in Normalform, falls möglich. Welche Auswirkung hat die Linearität auf die Form der Lösung?

- (a) $\mathcal{P}[f(x)] = f''(x) + \frac{1}{1-x^2} \cdot f'(x)$ (e) $\mathcal{P}[f(x)] = \left(\frac{d}{x} + 2\right)f(x)$
(b) $\mathcal{P}[f(x)] = f''(x) \cdot f'(x)$ (f) $\mathcal{P}[f(x)] = \tan(x) \cdot f''(x) + f(x)$
(c) $\mathcal{P}[f(x)] = (f''(x) + xf(x))^2$ (g) $\mathcal{P}[f(x)] = (f''(x) + 2)^2$
(d) $\mathcal{P}[f(x)] = \left(\frac{d}{x} + x\right)^2 f(x)$

Lösung

Wir bringen die Operatoren in Normalform:

- (a) $\mathcal{P}[f(x)]$ ist in Normalform, also ist \mathcal{P} linear.
(b) Der Operator \mathcal{P} enthält ein Produkt $f'' \cdot f'$ und kann deshalb nicht in Normalform geschrieben werden. Er ist nicht linear.
(c)

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= (f''(x) + xf(x)) \cdot (f''(x) + xf(x)) \\ &= f''(x) \cdot f''(x) + f''(x) \cdot xf(x) + xf(x) \cdot f''(x) + xf(x) \cdot xf(x)\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält Produkte der Form $f''(x) \cdot f''(x)$ und $f''(x) \cdot xf(x)$ und kann deshalb nicht in Normalform geschrieben werden. Er ist nicht linear.

(d)

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \left(\frac{d}{x} + x\right)^2 f(x) \\ &= \left(\frac{d}{x} \frac{d}{x} + \frac{d}{x} x + x \frac{d}{x} + x^2\right) f(x) \\ &= f''(x) + \underbrace{\frac{d}{x}(x \cdot f(x))}_{=x' \cdot f(x) + x \cdot f'(x)} + x f'(x) + x^2 f(x) \\ &= f''(x) + 2x f'(x) + (1 + x^2) \cdot f(x)\end{aligned}$$

Die letzte Zeile enthält den Operator in Normalform deshalb ist \mathcal{P} linear.

(e)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \left(\frac{d}{x} + 2\right)f(x) \\
 &= \left(\frac{d}{x} \frac{d}{x} + \frac{d}{x} 2 + 2 \frac{d}{x} + 2 \cdot 2\right)f(x) \\
 &= f''(x) + 4f'(x) + 4f(x)
 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile enthält den Operator in Normalform deshalb ist \mathcal{P} linear.

(f) $\mathcal{P}[f(x)] = \tan(x) \cdot f''(x) + f(x)$. Der Operator lässt sich zwar nicht auf Normalform bringen, trotzdem gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}[f(x) + g(x)] &= \mathcal{P}[f(x)] + \mathcal{P}[g(x)] \\
 \mathcal{P}[C \cdot g(x)] &= C \cdot \mathcal{P}[g(x)]
 \end{aligned}$$

Der Operator ist also linear.

(g)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= (f''(x) + 2)^2 \\
 &= f''(x) \cdot f''(x) + 2 \cdot f''(x) + f''(x) \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\
 &= f''(x) \cdot f''(x) + 4 \cdot f''(x) + 4
 \end{aligned}$$

Der Operator enthält nicht nur Ausdrücke der Form $f''(x) \cdot f''(x)$ sondern auch eine Konstante 4. Deshalb ist \mathcal{P} nicht linear.

2. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Bestimme die allgemeine Lösungen der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Lösungsformel.

(a)

$$x' + tx(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(b)

$$\frac{1}{\sin(x)}y'(x) - y(x) = 1$$

(c)

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - y(x)$$

(d)

$$\tan(t)x(t) - \sin(t) + x' = 0$$

(e)

$$x' - 3x(t) = t^2$$

(f)

$$\frac{y'(x)}{3} + \frac{y(x)}{3x} = 1.$$

Sigg, S. 235 – 251 und Skript Kapitel 4 .

Lösung

(a) Normalform

$$x' + tx = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

d.h. $p(t) = t$ und $q(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Wir berechnen $P(t) = \frac{t^2}{2}$ und setzen in die Lösungsformel ein:

$$x(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \int e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

Dies vereinfacht sich zu

$$x(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} t$$

(b) Normalform

$$y'(x) - \sin(x)y = \sin(x)$$

d.h. $p(x) = -\sin(x)$, $q(x) = \sin(x)$. Wir berechnen $P(t) = \cos(x)$ und setzen in die Lösungsformel ein:

$$y(x) = C e^{-\cos(x)} + e^{-\cos(x)} \underbrace{\int \sin(x) e^{\cos(x)} dx}_{:=I}$$

Das Integral lässt sich mit der Substitution ($u = \cos(x)$, $-\sin(x)dx = du$) lösen

$$I = - \int e^u du = -e^u = -e^{\cos(x)}$$

Also ist die Lösung

$$y(x) = C e^{-\cos(x)} + e^{-\cos(x)} (-e^{\cos(x)}) = C e^{-\cos(x)} - 1$$

(c) Normalform

$$y' + y = e^{-x}$$

d.h. $p(x) = 1$, $q(x) = e^{-x}$. Wir berechnen $P(x) = x$ und setzen in die Lösungsformel ein:

$$y(x) = C \cdot e^{-x} + e^{-x} \underbrace{\int e^x e^{-x} dx}_{=x}$$

also

$$y(x) = C \cdot e^{-x} + e^{-x} x$$

(d) Normalform

$$x' + \tan(t)x = \sin(t)$$

d.h. $p(t) = \tan(t)$, $q(t) = \sin(t)$. Wir berechnen $P(t) = -\log[\cos(t)]$ und setzen in die Lösungsformel ein:

$$y(x) = C e^{\log[\cos(t)]} + e^{\log[\cos(t)]} \int \sin(t) \cdot e^{-\log[\cos(t)]} dt$$

dies vereinfacht sich zu

$$y(x) = C \cos(t) + \cos(t) \underbrace{\int \sin(t) \cdot \frac{1}{\cos(t)} dt}_{=:I}$$

Das Integral kann mit der Substitution ($\cos(t) = u$, $-\sin(t)dt = du$) gelöst werden

$$I = - \int \frac{1}{u} du = -\log(u) = -\log[\cos(t)]$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = C \cos(t) - \cos(t) \log[\cos(t)]$$

(e) Normalform

$$x' - 3x = t^2$$

d.h. $p(t) = -3$, $q(t) = t^2$. Wir berechnen $P(t) = -3t$ und setzen in die Lösungsformel ein:

$$x(t) = C \cdot e^{3t} + e^{3t} \underbrace{\int t^2 e^{-3t} dt}_{=:I}$$

Das Integral lässt sich mit zweimaligem partiellen Integrieren berechnen

$$\begin{aligned} I &= -t^2 \cdot \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{2}{3} \int t \cdot e^{-3t} dt \\ &= -t^2 \cdot \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3} \int e^{-3t} dt \right] \\ &= -\frac{1}{3} t^2 e^{-3t} - \frac{2}{9} t e^{-3t} - \frac{2}{27} e^{-3t} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$x(t) = C \cdot e^{3t} + e^{3t} e^{-3t} \left(-\frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{2}{27} \right) = C \cdot e^{3t} - \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{2}{27}$$

(f) Normalform

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 3.$$

Deshalb ist es eine lineare DGL ersten Grades und wir können die Lösungsformel anwenden. Sie lautet für die DGL

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y(x) = e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int e^{P(x)} \cdot q(x) dx$$

wobei $P(x)$ die Stammfunktion von $p(x)$ ist. Hier ist

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow P(x) = \log(x)$$

Eingesetzt ergibt

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-\log(x)} + e^{-\log(x)} \int e^{\log(x)} \cdot 3 dx$$

Das Integral vereinfacht sich zu

$$3 \int x dx = 3 \frac{x^2}{2}.$$

Also können wir schreiben

$$y(x) = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \left(3 \frac{x^2}{2} \right) = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{3}{2} x$$