Analysis 2
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Serie 8, Musterlösung

Klasse: 2Ub | Semester: 2 | Datum: 30. Mai 2017

---

1. **Lineare Differentialoperatoren**
Welche der folgenden Operatoren sind linear? Bringen Sie dafür die Operatoren in Normalform, falls möglich. Welche Auswirkung hat die Linearität auf die Form der Lösung?

(a) $\mathcal{P}\left[f(x)\right] = f''(x) + \frac{1}{1-x^2} \cdot f'(x)$

(b) $\mathcal{P}\left[f(x)\right] = f''(x) \cdot f'(x)$

(c) $\mathcal{P}\left[f(x)\right] = \big(f''(x) + xf(x)\big)^2$

(d) $\mathcal{P}\left[f(x)\right] = \big(\frac{d}{x} + x\big)^2 f(x)$

(e) $\mathcal{P}\left[f(x)\right] = \big(\frac{d}{x} + 2\big) f(x)$

(f) $\mathcal{P}\left[f(x)\right] = \tan(x) \cdot f''(x) + f(x)$

(g) $\mathcal{P}\left[f(x)\right] = \big(f''(x) + 2\big)^2$

Lösung
Wir bringen die Operatoren in Normalform:

(a) $\mathcal{P}\left[f(x)\right]$ ist in Normalform, also ist $\mathcal{P}$ linear.

(b) Der Operator $\mathcal{P}$ enthält ein Produkt $f'' \cdot f'$ und kann deshalb nicht in Normalform geschrieben werden. Er ist nicht linear.

(c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \big(f''(x) + xf(x)\big) \cdot \big(f''(x) + xf(x)\big) \\
&= f''(x) \cdot f''(x) + f''(x) \cdot xf(x) + xf(x)f''(x) + xf(x) \cdot xf(x)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält Produkte der Form $f''(x) \cdot f''(x)$ und $f''(x) \cdot xf(x)$ und kann deshalb nicht in Normalform geschrieben werden. Er ist nicht linear.

(d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \big(\frac{d}{x} + x\big)^2 f(x) \\
&= \big(\frac{d}{x}\frac{d}{x} + \frac{d}{x}x + x\frac{d}{x} + x^2\big) f(x) \\
&= f''(x) + \underbrace{\frac{d}{x}\big(x \cdot f(x)\big)}_{=x' \cdot f(x) + x \cdot f'(x)} + xf'(x) + x^2 f(x) \\
&= f''(x) + 2xf'(x) + (1 + x^2) \cdot f(x)
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile enthält den Operator in Normalform deshalb ist $\mathcal{P}$ linear.

(e)

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \big(\frac{d}{x}+2\big)f(x)\\ &= \big(\frac{d}{x}\frac{d}{x}+\frac{d}{x}2+2\frac{d}{x}+2\cdot 2\big)f(x)\\ &= f''(x)+4f'(x)+4f(x)\end{aligned}$$

Die letzte Zeile enthält den Operator in Normalform deshalb ist $\mathcal{P}$ linear.

(f) $\mathcal{P}[f(x)] = \tan(x)\cdot f''(x)+f(x)$. Der Operator lässt sich zwar nicht auf Normalform bringen, trotzdem gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[f(x)+g(x)] &= \mathcal{P}[f(x)]+\mathcal{P}[g(x)]\\ \mathcal{P}[C\cdot g(x)] &= C\cdot\mathcal{P}[g(x)]\end{aligned}$$

Der Operator ist also linear.

(g)

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \big(f''(x)+2\big)^2\\ &= f''(x)\cdot f''(x)+2\cdot f''(x)+f''(x)\cdot 2+2\cdot 2\\ &= f''(x)\cdot f''(x)+4\cdot f''(x)+4\end{aligned}$$

Der Operator enthält nicht nur Ausdrücke der Form $f''(x)\cdot f''(x)$ sondern auch eine Konstante 4. Deshalb ist $\mathcal{P}$ nicht linear.

2. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Bestimme die allgemeine Lösungen der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Lösungsformel.

(a)

$$x' + t\,x(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$$

(b)

$$\frac{1}{\sin(x)}y'(x) - y(x) = 1$$

(c)

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - y(x)$$

(d)
$$\tan(t)\,x(t) - \sin(t) + x' = 0$$

(e)
$$x' - 3x(t) = t^2$$

(f)
$$\frac{y'(x)}{3} + \frac{y(x)}{3x} = 1\ .$$

Sigg, S. 235 – 251 und Skript Kapitel 4 .

Lösung

(a) Normalform
$$x' + t\,x = e^{\frac{-t^2}{2}}$$
d.h. $p(t) = t$ und $q(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$. Wir berechnen $P(t) = \frac{t^2}{2}$ und setzen in die Lösungsformel ein:
$$x(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \int e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$$
Dies vereinfacht sich zu
$$x(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}}\, t$$

(b) Normalform
$$y'(x) - \sin(x)\, y = \sin(x)$$
d.h. $p(x) = -\sin(x)$, $q(x) = \sin(x)$. Wir berechnen $P(t) = \cos(x)$ und setzen in die Lösungsformel ein:
$$y(x) = C\, e^{-\cos(x)} + e^{-\cos(x)} \underbrace{\int \sin(x) e^{\cos(x)} dx}_{:=I}$$
Das Integral lässt sich mit der Substitution ($u = \cos(x)$, $-\sin(x)dx = du$) lösen
$$I = -\int e^u\, du = -e^u = -e^{\cos(x)}$$
Also ist die Lösung
$$y(x) = C\, e^{-\cos(x)} + e^{-\cos(x)} \left(-e^{\cos(x)}\right) = C\, e^{-\cos(x)} - 1$$

(c) Normalform
$$y' + y = e^{-x}$$
d.h. $p(x) = 1$, $q(x) = e^{-x}$. Wir berechnen $P(x) = x$ und setzen in die Lösungsformel ein:
$$y(x) = C \cdot e^{-x} + e^{-x} \underbrace{\int e^x e^{-x} dx}_{=x}$$
also
$$y(x) = C \cdot e^{-x} + e^{-x}\, x$$

(d) Normalform

$$x' + \tan(t)\, x = \sin(t)$$

d.h. $p(t) = \tan(t)$, $q(t) = \sin(t)$. Wir berechnen $P(t) = -\log[\cos(t)]$ und setzen in die Lösungsformel ein:

$$y(x) = C\, e^{\log[\cos(t)]} + e^{\log[\cos(t)]} \int \sin(t) \cdot e^{-\log[\cos(t)]} dt$$

dies vereinfacht sich zu

$$y(x) = C\, \cos(t) + \cos(t) \underbrace{\int \sin(t) \cdot \frac{1}{\cos(t)} dt}_{=:I}$$

Das Integral kann mit der Substitution ($\cos(t) = u$, $-\sin(t)dt = du$) gelöst werden

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\log(u) = -\log\left[\cos(t)\right]$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = C\, \cos(t) - \cos(t) \log\left[\cos(t)\right]$$

(e) Normalform

$$x' - 3x = t^2$$

d.h. $p(t) = -3$, $q(t) = t^2$. Wir berechnen $P(t) = -3t$ und setzen in die Lösungsformel ein:

$$x(t) = C \cdot e^{3t} + e^{3t} \underbrace{\int t^2\, e^{-3t}\, dt}_{=:I}$$

Das Integral lässt sich mit zweimaligem partiellen Integrieren berechnen

$$\begin{aligned} I &= -t^2 \cdot \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{2}{3} \int t \cdot e^{-3t} dt \\ &= -t^2 \cdot \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3} \int e^{-3t} dt \right] \\ &= -\frac{1}{3} t^2 e^{-3t} - \frac{2}{9} t e^{-3t} - \frac{2}{27} e^{-3t} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$x(t) = C \cdot e^{3t} + e^{3t} e^{-3t} \left(-\frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{2}{27} \right) = C \cdot e^{3t} - \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{2}{27}$$

(f) Normalform

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 3\ .$$

Deshalb ist es eine lineare DGL ersten Grades und wir können die Lösungsformel anwenden. Sie lautet für die DGL

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y(x) = e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int e^{P(x)} \cdot q(x)\, dx$$

wobei $P(x)$ die Stammfunktion von $p(x)$ ist. Hier ist

$$p(x) = \frac{1}{x} \ \Rightarrow P(x) = \log(x)$$

Eingesetzt ergibt

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-log(x)} + e^{-log(x)} \int e^{log(x)} \cdot 3\, dx$$

Das Integral vereinfacht sich zu

$$3 \int x\, dx = 3\frac{x^2}{2} \ .$$

Also können wir schreiben

$$y(x) = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left(3\frac{x^2}{2}\right) = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{3}{2}x$$