Analysis 2U
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Serie 9, Komplexe Zahlen, homogene DGL 2. Grades, Richtungsfeld

Klasse: 2Ub | Semester: 2 | Datum: 30. Mai 2017

---

1. Die komplexe Zahlenebene

Stelle die Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene dar. Berechne dazu zuerst die kartesische Darstellung.
Sigg, S. 127-139

- $z_1 = 3 + 7i - 14i + 2$
- $z_2 = -5 + 10i + \frac{1}{2} - i\frac{5}{2}\pi$
- $z_3 = (3 + 7i) \cdot (-14i + 2)$
- $z_4 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2. Kartesische Darstellung von komplexen Zahlen

Jede komplexe Zahl lässt sich darstellen in der Form $z = x + iy$, wobei x und y reelle Zahlen sind. Häufig wird dazu die Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

benutzt. Zum Beispiel für $z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ gilt

$$z = 3\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right) = 3(0 + i) = 3i$$

Schreibe die Zahlen z_i in der kartesischen Form:

- $z_1 = 4[\cos(1) + i\sin(1)]$
- $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$
- $z_3 = -8[\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})]$
- $z_4 = -1 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$
- $z_5 = e^{i\frac{7\pi}{4}+4}$

3. Die komplex-konjugierte Zahle

Zu jeder komplexen Zahl gibt es eine komplex-konjugierte Zahl $\bar{z}$. Sie ist

- für $z = x + iy$: $\bar{z} = x - iy$
- für $z = r \cdot e^{i\phi}$: $\bar{z} = r \cdot e^{-i\phi}$
- für $z = r \cdot e^{\phi}$: $\bar{z} = r \cdot e^{\phi}$, d.h. für $z = r \cdot e^{i\theta+\phi}$: $\bar{z} = r \cdot e^{-i\theta+\phi}$, d.h.

für $z, r, \phi, \theta > 0$

Berechnen Sie

(a) $\bar{z}$ für $z = 5 + i12$
(b) $\bar{z}$ für $z = \frac{8\pi}{5} + i\frac{6\pi}{5}$
(c) $\bar{z}$ für $z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$
(d) $\bar{z}$ für $z = -1 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$
(e) $(8 + i6) \cdot (8 - i6)$
(f) $(-3 + i4) \cdot (-3 - i4)$
(g) $z \cdot \bar{z}$ für $z = 5 + i12$
(h) $z \cdot \bar{z}$ für $z = \frac{8\pi}{5} + i\frac{6\pi}{5}$
(i) $z \cdot \bar{z}$ für $z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$
(j) $z \cdot \bar{z}$ für $z = -1 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$

4. Realteil und Imaginärteil

Jede komplexe Zahl hat einen Realteil und einen Imaginärteil. Für $z = x + iy$ ist $\Re(z) = x$ und $\Im(z) = y$.
Wir können Realteil und Imaginärteil berechnen durch

- $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Berechnen Sie

(a) $\Re(z)$ für $z = 5 + i \cdot 12$

(b) $\Im(z)$ für $z = 5 + i12$

(c) $\Im(z)$ für $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(d) $\Re(z)$ für $z = e^{-i\frac{\pi}{3}+3}$

(e) $\Re(z)$ für $z = e^{1+i\frac{\pi}{2}}$

(f) $\Im(z)$ für $z = -1 \cdot e^{t\cdot(i\frac{7\pi}{4}+2)}$, $t > 0$

5. Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag der komplexen Zahl z berechnet sich wie folgt:

- Für $z = x + iy$ gilt $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Für $z = r \cdot e^{i\phi}$ gilt $|z| = |r|$

Ausserdem gilt u.a.

- $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$
- $\left|\frac{v}{w}\right| = \frac{|v|}{|w|} = \frac{|v \cdot \bar{w}|}{w \cdot \bar{w}}$

Berechnen Sie den Betrag von z_i:

(a) $-3 + i4$

(b) $2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$

(c) $\frac{8\pi}{5} + i\frac{6\pi}{5}$

(d) $-1 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$

(e) $\frac{-3+i4}{3+i\cdot 4}$

(f) $3e^{i\cdot 2\cdot t}$, $t > 0$

(g) $\frac{e^{i\cdot t}}{3+i\cdot 4}$, $t > 0$

(h) $\frac{e^{i\cdot t+2}}{i\cdot 4}$, $t > 0$

6. Gleichungen

Lösen Sie die Gleichungen in $\mathbb{C}$. Benutzen Sie u.a.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot ac}}{2a}$$

(a)
$$13 + 4x + x^2 = 0$$

(b)
$$16 = 4x - 4i$$

(c)
$$1 + x + \frac{1}{4} \cdot x^2 = 0$$

(d)
$$16 = x^2$$

(e)
$$16 = i \cdot x - 4$$

(f)
$$-25 = 6x + x^2$$

(g)
$$2 - 2x = -x^2$$

(h)
$$\frac{-9}{x + 4i} = x - 4i$$

7. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme:

(a)
$$y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(b)
$$y'' + 10y' + 34y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(c)
$$y'' + 16y' + 64y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(d)
$$y'' + 25y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(a) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom und die Nullstellen (im Komplexen).

(b) Charakterisieren Sie die gegebenen Differentialgleichungen gemäss den gefundenen Nullstellen.

(c) Bestimmen Sie jeweils die allgemeine und die partikuläre Lösung.

8. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung
Bestimme die allgemeine und die partikuläre Lösungen der linearen Differentialgleichungen.

(a)
$$\frac{d^2y}{d^2x} - 3\frac{dy}{dx} - 18 \cdot y(x) = 7\, e^{-x}$$

mit
$$y(0) = -1 \text{ und } y'(0) = 2$$

(b)
$$\frac{d^2y}{d^2x} + 4\frac{dy}{dx} + 13 \cdot y(x) = 9\, e^{-5x}$$

mit
$$y(0) = 1 \text{ und } y'(0) = -\frac{7}{2}$$

Sigg, S. 267 - 278 und Skript Kapitel 5 bis und mit Beispiel 5.3.

9. Richtungsfeld Zeichnen Sie die Lösung der DGL in das Richtungsfeld ein.