an2U
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Serie 9, Musterlösung

Klasse: 2Ub   Semester: 2   Datum: 30. Mai 2017

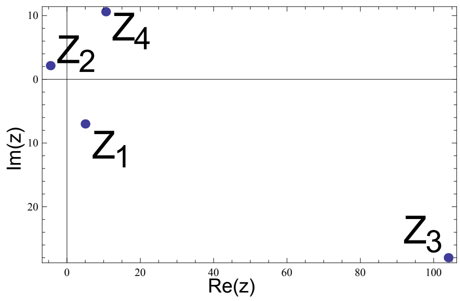
1. Die komplexe Zahlenebene

Stelle die Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene dar. Berechne dazu zuerst die kartesische Darstellung.
Sigg, S. 127-139

- $z_1 = 3 + 7i - 14i + 2$
- $z_2 = -5 + 10i + \frac{1}{2} - i\frac{5}{2}\pi$
- $z_3 = (3 + 7i) \cdot (-14i + 2)$
- $z_4 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Lösung

- $z_1 = 5 - 7i$
- $z_2 = -\frac{9}{2} + i\left(10 - \pi\frac{5}{2}\right)$
- $z_3 = 104 - 28i$
- $z_4 = \frac{15}{\sqrt{2}} + i\frac{15}{\sqrt{2}}$



2. Kartesische Darstellung von komplexen Zahlen

Schreibe die Zahlen z_i in der kartesischen Form:

- $z_1 = 4[\cos(1) + i\sin(1)]$
- $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$
- $z_3 = -8[\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})]$
- $z_4 = -1 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$
- $z_5 = e^{i\frac{7\pi}{4}+4}$

Lösung

- $z_1 = 4\cos(1) + 4i\sin(1) = 2.16121\ + i3.36588$
- $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + i2\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} = -0.618034 + i\,1.90211$
- $z_3 = 4\sqrt{2} - i4\sqrt{2} = 5.65685\ - i\,5.65685$
- $z_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = -0.707107 + i\,0.707107$

- $z_5 = e^4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 38.6067 - i\,38.6067$

3. Die komplex-konjugierte Zahle

Berechnen Sie

(a) $\bar{z}$ für $z = 5 + i12$

(b) $\bar{z}$ für $z = \frac{8\pi}{5} + i\frac{6\pi}{5}$

(c) $\bar{z}$ für $z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

(d) $\bar{z}$ für $z = -1 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$

(e) $(8 + i6) \cdot (8 - i6)$

(f) $(-3 + i4) \cdot (-3 - i4)$

(g) $z \cdot \bar{z}$ für $z = 5 + i12$

(h) $z \cdot \bar{z}$ für $z = \frac{8\pi}{5} + i\frac{6\pi}{5}$

(i) $z \cdot \bar{z}$ für $z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

(j) $z \cdot \bar{z}$ für $z = -1 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Lösung

(a) $\bar{z} = 5 - i12$

(b) $\bar{z} = \frac{8\pi}{5} - i\frac{6\pi}{5}$

(c) $\bar{z} = 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(d) $\bar{z} = -1 \cdot e^{-i\frac{7\pi}{4}}$

(e) $(8 + i6) \cdot (8 - i6) = 8^2 - i \cdot 8 \cdot 6 + i \cdot 8 \cdot 6 \cdot +6^2 = 100$

(f) $(-3 + i4) \cdot (-3 - i4) = 3^2 + 4^2 = 25$

(g) $z \cdot \bar{z} = 5^2 + 12^2 = 169$

(h) $z \cdot \bar{z} = (\frac{8\pi}{5} + i\frac{6\pi}{5}) \cdot (\frac{8\pi}{5} - i\frac{6\pi}{5}) = \left(\frac{8\pi}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\pi}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} \cdot (8^2 + 6^2) = \frac{100}{25} = 4$

(i) $z \cdot \bar{z} = (3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}) \cdot (3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}) = 3 \cdot 3 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} = 9$

(j) $z \cdot \bar{z} = (-1 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}) \cdot (-1 \cdot e^{-i\frac{7\pi}{4}}) = (-1) \cdot (-1) = 1$

4. Realteil und Imaginärteil

Berechnen Sie

(a) $\Re(z)$ für $z = 5 + i \cdot 12$

(b) $\Im(z)$ für $z = 5 + i12$

(c) $\Im(z)$ für $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(d) $\Re(z)$ für $z = e^{-i\frac{\pi}{3}+3}$

(e) $\Re(z)$ für $z = e^{1+i\frac{\pi}{2}}$

(f) $\Im(z)$ für $z = -1 \cdot e^{t\cdot(i\frac{7\pi}{4}+2)}$, $t > 0$

Lösung

(a) $\Re(z) = 5$, ablesen

(b) $\Im(z) = 12$, ablesen

(c)

$$\begin{aligned}\Im(z) &= \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - \overline{e^{-i\frac{\pi}{6}}}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\Re(z) &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-i\frac{\pi}{3}+3} + \overline{e^{-i\frac{\pi}{3}+3}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{3} + e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot e^{3}\cdot\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\\ &= e^{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{3}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\Re(z) &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{1+i\frac{\pi}{2}} + \overline{e^{1+i\frac{\pi}{2}}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{1} + e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot e\cdot\left(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\\ &= e\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\Im(z) &= \frac{1}{2i}\cdot\left(-1\cdot e^{t\cdot(i\frac{7\pi}{4}+2)} - \overline{-1\cdot e^{t\cdot(i\frac{7\pi}{4}+2)}}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\cdot\left(-e^{i\cdot t\cdot\frac{7\pi}{4}}\cdot e^{2t} + e^{-i\cdot t\cdot\frac{7\pi}{4}}\cdot e^{2t}\right)\\ &= e^{2t}\sin\left(-t\frac{7\pi}{4}\right) = -e^{2t}\sin\left(t\frac{7\pi}{4}\right) = e^{2t}\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5. Betrag einer komplexen Zahl

Berechnen Sie den Betrag von z_i:

(a) $-3+i4$
(b) $2\cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$
(c) $\frac{8\pi}{5}+i\frac{6\pi}{5}$
(d) $-1\cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$
(e) $\frac{-3+i4}{3+i\cdot 4}$
(f) $3e^{i\cdot 2\cdot t}$, $t>0$
(g) $\frac{e^{i\cdot t}}{3+i\cdot 4}$, $t>0$
(h) $\frac{e^{i\cdot t+2}}{i\cdot 4}$, $t>0$

Lösung

(a) $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$
(b) $|z|=|2|\cdot|1|=2$
(c) $|z|=\sqrt{\left(\frac{8\pi}{5}\right)^2+\left(\frac{6\pi}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{25}\cdot(64)+(36)}\frac{1}{5}\cdot 10=2$
(d) $|z|=|-1|=1$
(e) $\left|\frac{-3+i4}{3+i\cdot 4}\right|=\frac{|-3+i4|}{|3+i\cdot 4|}=\frac{5}{5}=1$
(f) $|3e^{i\cdot 2\cdot t}|=|3|\cdot|e^{i\cdot 2\cdot t}|)=3\cdot 1=3$
(g) $\left|\frac{e^{i\cdot t}}{3+i\cdot 4}\right|=\frac{\left|e^{i\cdot t}\right|}{|3+i\cdot 4|}=\frac{1}{5}$
(h) $\left|\frac{e^{i\cdot t+2}}{i\cdot 4}\right|=\frac{\left|e^{i\cdot t+2}\right|}{|i\cdot 4|}=\frac{\left|e^{i\cdot t}\right|\cdot\left|e^2\right|}{4}=\frac{e^2}{4}$

6. Gleichungen

Lösen Sie die Gleichungen in $\mathbb{C}$.

(a)
$$13+4x+x^2=0$$
(b)
$$16=4x-4i$$
(c)
$$1+x+\frac{1}{4}\cdot x^2=0$$
(d)
$$16=x^2$$
(e)
$$16=i\cdot x-4$$
(f)
$$-25=6x+x^2$$
(g)
$$2-2x=-x^2$$
(h)
$$\frac{-9}{x+4i}=x-4i$$

Lösung:

(a) Komplex konjugierte Nullstellen

$$x_{1,2}=2\pm 3i$$

(b)

$$x=\frac{16+4i}{4}=4+i$$

(c) Doppelte Nullstelle

$$x_{1,2} = -2$$

(d) Zwei verschiedene reelle Nullstellen

$$x_{1,2} = \pm 4$$

(e) $x = \frac{20}{i} = -20i$

(f) Komplex konjugierte Nullstellen $x_{1,2} = -3 \pm 4i$

(g) Komplex konjugierte Nullstellen $x_{1,2} = -1 \pm i$

(h) Komplex konjugierte Nullstellen $x = \pm 5i$

7. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme:

(a)
$$y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(b)
$$y'' + 10y' + 34y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(c)
$$y'' + 16y' + 64y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(d)
$$y'' + 25y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Lösung:

(a) Die Nullstellen ergeben sich aus

$$k^2 + 5k + 6 = 0 \;\Rightarrow\; (k+2)(k+3) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = -2, k_2 = -3$$

Das ist also der Kriechfall.
Die allgemeine Lösung ist

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

Um die Anfangsbedingungen einzusetzen berechnen wir

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$$

und setzen ein:

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2$$
$$y'(0) = 0 = -2C_1 - 3C_2 \;\Rightarrow\; C_1 = 3, C_2 = -2$$

So ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

(b) Die Nullstellen ergeben sich aus

$$k^2 + 10k + 34 = 0 \;\Rightarrow\; (k+5)^2 = -9 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = -5 \pm i3$$

Das ist also der Fall der gedämpften harmonische Schwingung (Schwingfall).
Die allgemeine Lösung ist

$$y(t) = e^{-5t}\left(C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)\right)$$

Um die Anfangsbedingungen einzusetzen berechnen wir

$$y'(t) = -5e^{-5t}\left(C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)\right) + e^{-5t}\left(3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t)\right)$$

und setzen ein:

$$y(0) = 1 = C_2$$
$$y(0)' = 0 = 3C_1 - 5C_2 \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{5}{3}, C_2 = 1$$

So ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$y(t) = e^{-5t}\left(\frac{5}{3}\sin(3t) + \cos(3t)\right)$$

(c) Die Nullstellen ergeben sich aus

$$k^2 + 16k + 64 = 0 \;\Rightarrow\; (k+8)^2 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = k_2 = -8$$

Das ist also der aperiodische Grenzfall.
Die allgemeine Lösung ist

$$y(t) = e^{-8t}\left(C_1 t + C_2\right)$$

Um die Anfangsbedingungen einzusetzen berechnen wir

$$y'(t) = -8e^{-8t}\left(C_1 t + C_2\right) + e^{-8t} C_1$$

und setzen ein:

$$y(0) = 1 = C_2$$
$$y(0)' = 0 = C_1 - 8C_2 \;\Rightarrow\; C_1 = 8, C_2 = 1$$

So ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$y(t) = e^{-8t}\left(8t + 1\right)$$

(d) Die Nullstellen ergeben sich aus

$$k^2 + 25 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \pm i5$$

Das ist also der Fall der ungedämpften harmonischen Schwingung (Schwingfall).
Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = C_1 \sin(5t) + C_2 \cos(5t)\ .$$

Um die Anfangsbedingungen einzusetzen berechnen wir

$$y'(t) = 5C_1\cos(5t) - 5C_2\sin(5t)$$

und setzen ein

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 = C_2 \\ y(0)' &= 0 = 5C_1 \\ \Rightarrow C_1 &= 0, C_2 = 1 \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ist also

$$y(t) = \cos(5t)$$

8. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Bestimme die allgemeine und die partikuläre Lösungen der linearen Differentialgleichungen.

(a)

$$\frac{d^2y}{d^2x} - 3\frac{dy}{dx} - 18 \cdot y(x) = 7\,e^{-x}$$

mit

$$y(0) = -1 \text{ und } y'(0) = 2$$

(b)

$$\frac{d^2y}{d^2x} + 4\frac{dy}{dx} + 13 \cdot y(x) = 9\,e^{-5x}$$

mit

$$y(0) = 1 \text{ und } y'(0) = -\frac{7}{2}$$

Sigg, S. 267 - 278 und Skript Kapitel 5 bis und mit Beispiel 5.3.

Lösung

(a) Homogene DGL:

$$\frac{d^2y}{d^2x} - 3\frac{dy}{dx} - 18 \cdot y(x) = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 6$. Homogene Lösung:

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{6x}$$

Ansatz für partiuläre Lösung: $y_p(x) = A \cdot e^{-x}$ mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p(x)' &= \; = -A \cdot e^{-x} \\ y_p(x)'' &= \; = A \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$e^{-x} \cdot [A + 3A - 18A] = 7\, e^{-x}$$

Also ist $A = -\frac{1}{2}$. Die partikuläre Lösung ist $y_p(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x}$ und die allgemeine Lösung :

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{6x} - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$$

Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, leiten wir $y(x)$ ab und stellen das folgende Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = -1 \\ y(0)' &= = -3C_1 + 6C_2 + \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

mit der Lösung $C_1 = -\frac{1}{2}$ und $C_2 = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-3x} - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$$

(b) Homogene DGL:

$$\frac{d^2y}{d^2x} + 4\frac{dy}{dx} + 13 \cdot y(x) = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = -2 - 3i$ und $\lambda_2 = -2 + 3i$. Homogene Lösung:

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos(3x) + C_2 e^{-2x} \cdot \sin(3x)$$

Ansatz für partiuläre Lösung: $y_p(x) = A \cdot e^{-5x}$ mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p(x)' &= = -5A \cdot e^{-5x} \\ y_p(x)'' &= = 25 \cdot A \cdot e^{-5x} \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\frac{d^2y}{d^2x} + 4\frac{dy}{dx} + 13 \cdot y(x) = e^{-5x}$$

$$e^{-5x} \cdot [25 \cdot A + 4 \cdot (-5A) + 13 \cdot A] = 9\, e^{-5x}$$

Also ist $A = \frac{1}{2}$. Die partikuläre Lösung ist $y_p(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-5x}$ und die allgemeine Lösung :

$$y(x) = C_1\, e^{-2x} \cdot \cos(3x) + C_2\, e^{-2x} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{2} \cdot e^{-5x}$$

Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, leiten wir $y(x)$ ab und stellen das folgende Gleichungssystem auf:

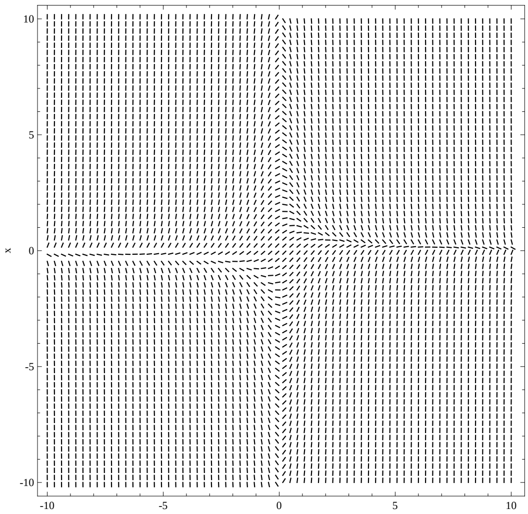
$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + \frac{1}{2} = 1 \\ y(0)' &= = -2C_1 + 3C_2 - \frac{5}{2} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

mit der Lösung $C_1 = \frac{1}{2}$ und $C_2 = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

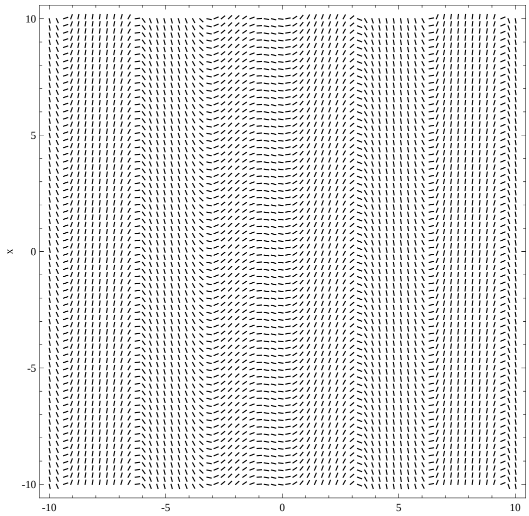
$$y(x) = \frac{1}{2}\, e^{-2x} \cdot \cos(3x) + \frac{1}{2} \cdot e^{-5x}$$

9. Richtungsfeld Zeichnen Sie die Lösung der DGL in das Richtungsfeld ein.

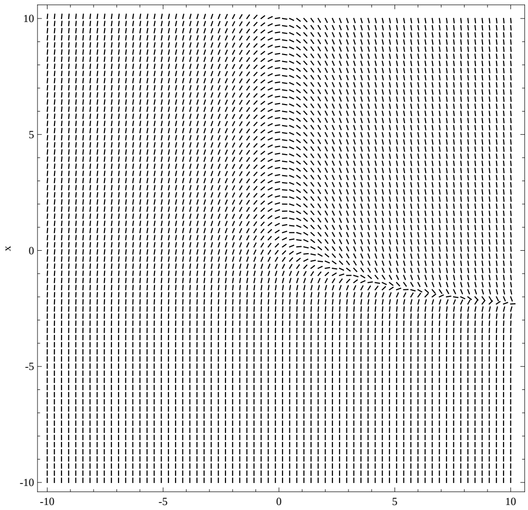
Lösung:



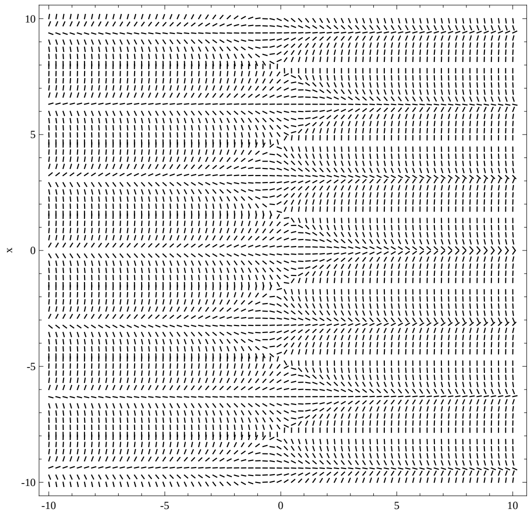
t, x'+t*x(t)= exp(-t^2/2), x(-1)= 1



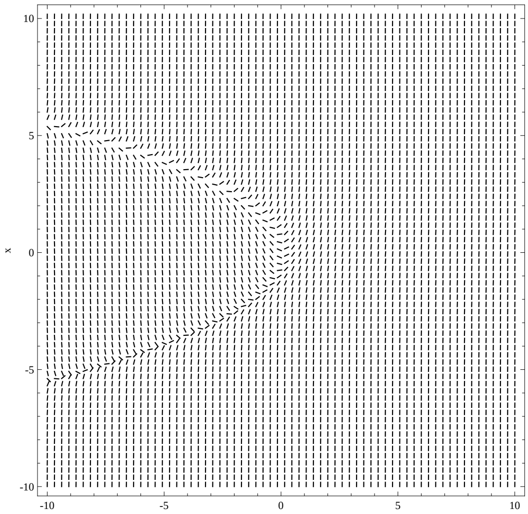
t, 1/sin(x)*x'-x(t)= 1, x(-7)= 1



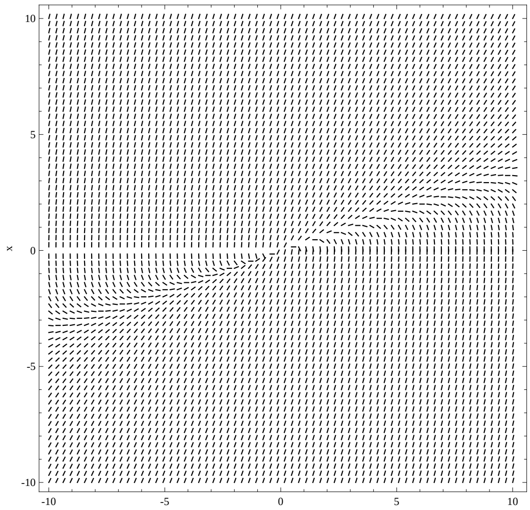
t, x'=exp(-t)-x, x(0)= 0



t, x'=-tan(t)*x +sin(t), x(0)= 1



t, x'=t^2+3*x, x(-10)= -5



t, x'= 3 -x/t, x(1)= 1