



Serie 10, Musterlösung

Klasse: 2Ub

Semester: 2

Datum: 30. Mai 2017

1. Inhomogene lineare DGLs zweiten Grades

Bestimmen Sie die allgemeine und die partikuläre Lösung der Differentialgleichungen mit den drei verschiedenen Inhomogenitäten

$$\begin{aligned}s_1(t) &= 1 \\s_2(t) &= 3e^{-2t} \\s_3(t) &= 2\sin(5t)\end{aligned}$$

(a) DGL 1:

$$y'' + 5y' + 6y = s(t) \text{ und } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

(b) DGL 2:

$$y'' + 10y' + 34y = s(t) \text{ und } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

(c) DGL 3:

$$y'' + 16y' + 64y = s(t) \text{ und } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

(d) DGL 4:

$$y'' + 25y = s(t) \text{ und } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Lösung:

(a) DGL 1:

- $s_1(t) = 1$:

Ansatz:

$$y_A(t) = A$$

$$y'_A(t) = 0$$

Einsetzen:

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow y_A(t) = \frac{1}{6}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}$$

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_1 + C_2 + \frac{1}{6}$$

$$0 = -2C_1 - 3C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{5}{2}, C_2 = -\frac{5}{3}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}$$

- $s_2(t) = 3e^{-2t}$:

Ansatz (einfache Resonanz):

$$y_A(t) = Ate^{-2t}$$

$$y'_A(t) = Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}$$

$$y''_A(t) = -4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}$$

Einsetzen:

$$(-4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}) + 5(Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}) + 6(Ate^{-2t}) = 3e^{-2t}$$

$$Ae^{-2t} = 3e^{-2t}$$

$$A = 3 \Rightarrow y_A(t) = 3te^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + 3te^{-2t}$$

$$y'(t) = -2C_1e^{-2t} - 3C_2e^{-3t} + 3e^{-2t} - 6te^{-2t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_1 + C_2$$

$$0 = -2C_1 - 3C_2 + 3 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 1$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-3t} + 3te^{-2t}$$

- $s_3(t) = 2 \sin(5t)$:

Ansatz:

$$y_A(t) = A \sin(5t) + B \cos(5t)$$

$$y'_A(t) = 5A \cos(5t) - 5B \sin(5t)$$

$$y''_A(t) = -25A \sin(5t) - 25B \cos(5t)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} (-19A - 25B) \sin(5t) + (-19B + 25A) \cos(5t) &= 2 \sin(5t) \\ \Rightarrow 19A + 25B = -2, 25A - 19B = 0 &\Rightarrow A = -\frac{19}{493}, B = -\frac{25}{493} \\ \Rightarrow y_A(t) &= -\frac{19}{493} \sin(5t) - \frac{25}{493} \cos(5t) \end{aligned}$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{19}{493} \sin(5t) - \frac{25}{493} \cos(5t) \\ y'(t) &= -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} - \frac{95}{493} \cos(5t) + \frac{125}{493} \sin(5t) \end{aligned}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 - \frac{25}{493} \\ 0 &= -2C_1 - 3C_2 - \frac{95}{493} \\ \Rightarrow C_1 &= \frac{97}{29}, C_2 = -\frac{39}{17} \end{aligned}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{97}{29} e^{-2t} - \frac{39}{17} e^{-3t} + \frac{19}{493} \sin(5t) + \frac{25}{493} \cos(5t)$$

(b) DGL 2:

- $s_1(t) = 1$:
Ansatz:

$$\begin{aligned} y_A(t) &= A \\ y'_A(t) &= 0 \\ y''_A(t) &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$34A = 1 \Rightarrow y_A(t) = \frac{1}{34}$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-5t} (C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)) + \frac{1}{34} \\ y'(t) &= -5e^{-5t} (C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)) + e^{-5t} (3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t)) \end{aligned}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$\begin{aligned} 1 &= C_2 + \frac{1}{34} \\ 0 &= -5C_2 + 3C_1 \\ \Rightarrow C_1 &= \frac{55}{34}, C_2 = \frac{33}{34} \end{aligned}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-5t} \left(\frac{55}{34} \sin(3t) + \frac{33}{34} \cos(3t) \right) + \frac{1}{34}$$

- $s_2(t) = 3e^{-2t}$:

Ansatz:

$$\begin{aligned}y_A(t) &= Ae^{-2t} \\y'_A(t) &= -2Ae^{-2t} \\y''_A(t) &= 4Ae^{-2t}\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$(4Ae^{-2t}) + 10(-2Ae^{-2t}) + 34(Ae^{-2t}) = 3e^{-2t}$$

$$18Ae^{-2t} = 3e^{-2t} \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow y_A(t) = \frac{1}{6}e^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-5t} (C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)) + \frac{1}{6}e^{-2t}$$

$$y'(t) = -5e^{-5t} (C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t))$$

$$+ e^{-5t} (3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t)) - \frac{1}{3}e^{-2t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{6}$$

$$0 = -5C_2 + 3C_1 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = \frac{5}{6}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-5t} \left(\frac{3}{2} \sin(3t) + \frac{5}{6} \cos(3t) \right) + \frac{1}{6}e^{-2t}$$

- $s_3(t) = 2 \sin(5t)$:

Ansatz:

$$\begin{aligned}y_A(t) &= A \sin(5t) + B \cos(5t) \\y'_A(t) &= 5A \cos(5t) - 5B \sin(5t) \\y''_A(t) &= -25A \sin(5t) - 25B \cos(5t)\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$(9A - 50B) \sin(5t) + (50A + 9B) \cos(5t) = 2 \sin(5t)$$

$$9A - 50B = 2, 50A + 9B = 0 \Rightarrow A = \frac{18}{2581}, B = -\frac{100}{2581}$$

$$\Rightarrow y_A(t) = \frac{18}{2581} \sin(5t) - \frac{100}{2581} \cos(5t)$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-5t} (C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)) + \frac{18}{2581} \sin(5t) - \frac{100}{2581} \cos(5t)$$

$$y'(t) = -5e^{-5t} (C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)) + e^{-5t} (3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t)) \\ + \frac{90}{2581} \cos(5t) + \frac{500}{2581} \cos(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 - \frac{100}{2581}$$

$$0 = -5C_2 + 3C_1 + \frac{90}{2581}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{13315}{7743}, C_2 = \frac{2681}{2581}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{13315}{7743} \sin(3t) + \frac{2681}{2581} \cos(3t) + \frac{18}{2581} \sin(5t) - \frac{100}{2581} \cos(5t)$$

(c) DGL 3:

- $s_1(t) = 1$:

Ansatz:

$$y_A(t) = A$$

$$y'_A(t) = 0$$

$$y''_A(t) = 0$$

Einsetzen:

$$64A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{64} \Rightarrow y_A(t) = \frac{1}{64}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-8t} (C_1 t + C_2) + \frac{1}{64}$$

$$y'(t) = -8e^{-8t} (C_1 t + C_2) + e^{-8t} C_1$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{64}$$

$$0 = -8C_2 + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{63}{8}, C_2 = \frac{63}{64}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-8t} \left(\frac{63}{8} t + \frac{63}{64} \right) + \frac{1}{64}$$

- $s_2(t) = 3e^{-2t}$:

Ansatz:

$$\begin{aligned}y_A(t) &= Ae^{-2t} \\y'_A(t) &= -2Ae^{-2t} \\y''_A(t) &= 4Ae^{-2t}\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$(4Ae^{-2t}) + 16(-2Ae^{-2t}) + 64(Ae^{-2t}) = 3e^{-2t}$$

$$36Ae^{-2t} = 3e^{-2t}$$

$$A = \frac{1}{12} \Rightarrow y_A(t) = \frac{1}{12}e^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-8t}(C_1t + C_2) + \frac{1}{12}e^{-2t}$$

$$y'(t) = -8e^{-8t}(C_1t + C_2) + e^{-8t}C_1 - \frac{1}{6}e^{-2t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{12}$$

$$0 = -8C_2 + C_1 - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{15}{2}, C_2 = \frac{11}{12}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-8t} \left(\frac{15}{2}t + \frac{11}{12} \right) + \frac{1}{12}e^{-2t}$$

- $s_3(t) = 2 \sin(5t)$: Ansatz:

$$y_A(t) = A \sin(5t) + B \cos(5t)$$

$$y'_A(t) = 5A \cos(5t) - 5B \sin(5t)$$

$$y''_A(t) = -25A \sin(5t) - 25B \cos(5t)$$

Einsetzen:

$$(39A - 80B) \sin(5t) + (80A + 39B) \cos(5t) = 2 \sin(5t)$$

$$39A - 80B = 2, 80A + 39B = 0 \Rightarrow A = \frac{78}{7921}, B = -\frac{160}{7921}$$

$$\Rightarrow y_A(t) = \frac{78}{7921} \sin(5t) - \frac{160}{7921} \cos(5t)$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-8t}(C_1t + C_2) + \frac{78}{7921} \sin(5t) - \frac{160}{7921} \cos(5t)$$

$$y'(t) = -8e^{-8t}(C_1t + C_2) + e^{-8t}C_1 + \frac{390}{7921}\cos(5t) + \frac{800}{7921}\cos(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 - \frac{160}{7921}$$

$$0 = -8C_2 + C_1 + \frac{390}{7921}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{722}{89}, C_2 = \frac{8081}{7921}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-8t} \left(\frac{722}{89}t + \frac{8081}{7921} \right) + \frac{78}{7921}\sin(5t) - \frac{160}{7921}\cos(5t)$$

(d) DGL 4:

- $s_1(t) = 1$:

Ansatz:

$$y_A(t) = A$$

$$y'_A(t) = 0$$

$$y''_A(t) = 0$$

Einsetzen:

$$25A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{25} \Rightarrow y_A(t) = \frac{1}{25}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 \sin(5t) + C_2 \cos(5t) + \frac{1}{25}$$

$$y'(t) = 5C_1 \cos(5t) - 5C_2 \sin(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{25}$$

$$0 = 5C_1 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = \frac{24}{25}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{24}{25}\cos(5t) + \frac{1}{25}$$

- $s_2(t) = 3e^{-2t}$:

Ansatz:

$$y_A(t) = Ae^{-2t}$$

$$y'_A(t) = -2Ae^{-2t}$$

$$y''_A(t) = 4Ae^{-2t}$$

Einsetzen:

$$(4Ae^{-2t}) + 25(Ae^{-2t}) = 3e^{-2t}$$

$$29Ae^{-2t} = 3e^{-2t}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{29} \Rightarrow y_A(t) = \frac{3}{29}e^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 \sin(5t) + C_2 \cos(5t) + \frac{3}{29}e^{-2t}$$

$$y'(t) = 5C_1 \cos(5t) - 5C_2 \sin(5t) - \frac{6}{29}e^{-2t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{3}{29}$$

$$0 = 5C_1 - \frac{6}{29}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{6}{145}, C_2 = \frac{26}{29}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{6}{145} \sin(5t) + \frac{26}{29} \cos(5t) + \frac{3}{29}e^{-2t}$$

- $s_3(t) = 2 \sin(5t)$: Ansatz (einfache Resonanz):

$$y_A(t) = t(A \sin(5t) + B \cos(5t))$$

$$y'_A(t) = (A \sin(5t) + B \cos(5t)) + t(5A \cos(5t) - 5B \sin(5t))$$

$$y''_A(t) = (10A \cos(5t) - 10B \sin(5t)) + t(-25A \sin(5t) - 25B \cos(5t))$$

Einsetzen:

$$-10B \sin(5t) + 10A \cos(5t) = 2 \sin(5t)$$

$$-10B = 2, 10A = 0 \Rightarrow A = 0, B = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow y_A(t) = -\frac{1}{5}t \cos(5t)$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 \sin(5t) + C_2 \cos(5t) - \frac{1}{5}t \cos(5t)$$

$$y'(t) = 5C_1 \cos(5t) - 5C_2 \sin(5t) - \frac{1}{5} \cos(5t) + t \sin(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2$$

$$0 = 5C_1 - \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{25}, C_2 = 1$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{1}{25} \sin(5t) + \cos(5t) - \frac{1}{5}t \cos(5t)$$