Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

AN2
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Musterlösung Serie 9

Klasse: 2Ub   Semester: 2   Datum: 23. Mai 2017

1. Inhomogene lineare DGLs zweiten Grades

Bestimmen Sie die allgemeine und die partikuläre Lösung der Differentialgleichungen mit den drei verschiedenen Inhomogenitäten

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 1 \\ s_2(t) &= 3e^{-2t} \\ s_3(t) &= 2\sin(5t) \end{aligned}$$

(a) DGL 1:
$$y'' + 5y' + 6y = s(t) \text{ und } y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(b) DGL 2:
$$y'' + 10y' + 34y = s(t) \text{ und } y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(c) DGL 3:
$$y'' + 16y' + 64y = s(t) \text{ und } y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(d) DGL 4:
$$y'' + 25y = s(t) \text{ und } y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Lösung:

(a) DGL 1:

- $s_1(t) = 1$:
  Ansatz:
  $$y_A(t) = A$$
  $$y'_A(t) = 0$$
  Einsetzen:
  $$6A = 1 \ \Rightarrow\ A = \frac{1}{6}$$
  $$\Rightarrow y_A(t) = 1$$
  allgemeine Lösung:
  $$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}$$
  $$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$$
  Anfangswerte einsetzen:
  $$1 = C_1 + C_2 + \frac{1}{6}$$

$$0 = -2C_1 - 3C_2$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{5}{2}, C_2 = -\frac{5}{3}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{5}{2}e_2^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}$$

- $s_2(t) = 3e^{-2t}$:
  Ansatz (einfache Resonanz):

$$y_A(t) = Ate^{-2t}$$

$$y_A'(t) = Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}$$
$$y_A''(t) = -4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}$$

Einsetzen:

$$\left(-4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}\right) + 5\left(Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}\right) + 6\left(Ate^{-2t}\right) = 3e^{-2t}$$
$$Ae^{-2t} = 3e^{-2t}$$
$$A = 3 \;\Rightarrow\; y_A(t) = 3te^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + 3te^{-2t}$$

$$y'(t) = -2C_1e^{-2t} - 3C_2e^{-3t} + 3e^{-2t} - 6te^{-2t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_1 + C_2$$
$$0 = -2C_1 - 3C_2 + 3 \;\Rightarrow\; C_1 = 0, C_2 = 1$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-3t} + 3te^{-2t}$$

- $s_3(t) = 2\sin(5t)$:
  Ansatz:

$$y_A(t) = A\sin(5t) + B\cos(5t)$$
$$y_A'(t) = 5A\cos(5t) - 5B\sin(5t)$$
$$y_A''(t) = -25A\sin(5t) - 25B\cos(5t)$$

Einsetzen:

$$(-19A - 25B)\sin(5t) + (-19B + 25A)\cos(5t) = 2\sin(5t)$$

$$\Rightarrow 19A + 25B = -2, 25A - 19B = 0 \;\Rightarrow\; A = -\frac{19}{493}, B = -\frac{25}{493}$$

$$\Rightarrow y_A(t) = -\frac{19}{493}\sin(5t) - \frac{25}{493}\cos(5t)$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{19}{493}\sin(5t) - \frac{25}{493}\cos(5t)$$

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} - \frac{95}{493}\cos(5t) + \frac{125}{493}\sin(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_1 + C_2 - \frac{25}{493}$$

$$0 = -2C_1 - 3C_2 - \frac{95}{493}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{97}{29}, C_2 = -\frac{39}{17}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{97}{29}e^{-2t} - \frac{39}{17}e^{-3t} + \frac{19}{493}\sin(5t) + \frac{25}{493}\cos(5t)$$

(b) DGL 2:

- $s_1(t) = 1$:

  Ansatz:

$$y_A(t) = A$$

$$y_A'(t) = 0$$

$$y_A''(t) = 0$$

  Einsetzen:

$$34A = 1 \;\Rightarrow\; y_A(t) = \frac{1}{34}$$

  allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-5t}\left(C_1\sin(3t) + C_2\cos(3t)\right) + \frac{1}{34}$$

$$y'(t) = -5e^{-5t}\left(C_1\sin(3t) + C_2\cos(3t)\right) + e^{-5t}\left(3C_1\cos(3t) - 3C_2\sin(3t)\right)$$

  Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{34}$$

$$0 = -5C_2 + 3C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{55}{34}, C_2 = \frac{33}{34}$$

  gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-5t}\left(\frac{55}{34}\sin(3t) + \frac{33}{34}\cos(3t)\right) + \frac{1}{34}$$

- $s_2(t) = 3e^{-2t}$:
  Ansatz:

$$y_A(t) = Ae^{-2t}$$
$$y_A'(t) = -2Ae^{-2t}$$
$$y_A''(t) = 4Ae^{-2t}$$

Einsetzen:

$$\left(4Ae^{-2t}\right) + 10\left(-2Ae^{-2t}\right) + 34\left(Ae^{-2t}\right) = 3e^{-2t}$$
$$18Ae^{-2t} = 3e^{-2t} \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow y_A(t) = \frac{1}{6}e^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-5t}\left(C_1\sin(3t) + C_2\cos(3t)\right) + \frac{1}{6}e^{-2t}$$
$$y'(t) = -5e^{-5t}\left(C_1\sin(3t) + C_2\cos(3t)\right)$$
$$+e^{-5t}\left(3C_1\cos(3t) - 3C_2\sin(3t)\right) - \frac{1}{3}e^{-2t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{6}$$
$$0 = -5C_2 + 3C_1 - \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = \frac{5}{6}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-5t}\left(\frac{3}{2}\sin(3t) + \frac{5}{6}\cos(3t)\right) + \frac{1}{6}e^{-2t}$$

- $s_3(t) = 2\sin(5t)$:
  Ansatz:

$$y_A(t) = A\sin(5t) + B\cos(5t)$$
$$y_A'(t) = 5A\cos(5t) - 5B\sin(5t)$$
$$y_A''(t) = -25A\sin(5t) - 25B\cos(5t)$$

Einsetzen:

$$(9A - 50B)\sin(5t) + (50A + 9B)\cos(5t) = 2\sin(5t)$$
$$9A - 50B = 2, 50A + 9B = 0 \Rightarrow A = \frac{18}{2581}, B = -\frac{100}{2581}$$
$$\Rightarrow y_A(t) = \frac{18}{2581}\sin(5t) - \frac{100}{2581}\cos(5t)$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-5t}\left(C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)\right) + \frac{18}{2581}\sin(5t) - \frac{100}{2581}\cos(5t)$$

$$y'(t) = -5e^{-5t}\left(C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)\right) + e^{-5t}\left(3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t)\right)$$
$$+\frac{90}{2581}\cos(5t) + \frac{500}{2581}\cos(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 - \frac{100}{2581}$$
$$0 = -5C_2 + 3C_1 + \frac{90}{2581}$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{13315}{7743}, C_2 = \frac{2681}{2581}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{13315}{7743}\sin(3t) + \frac{2681}{2581}\cos(3t) + \frac{18}{2581}\sin(5t) - \frac{100}{2581}\cos(5t)$$

(c) DGL 3:

- $s_1(t) = 1$:
  Ansatz:

$$y_A(t) = A$$
$$y_A'(t) = 0$$
$$y_A''(t) = 0$$

Einsetzen:

$$64A = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{64} \;\Rightarrow\; y_A(t) = \frac{1}{64}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-8t}\left(C_1 t + C_2\right) + \frac{1}{64}$$

$$y'(t) = -8e^{-8t}\left(C_1 t + C_2\right) + e^{-8t}C_1$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{64}$$
$$0 = -8C_2 + C_1$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{63}{8}, C_2 = \frac{63}{64}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-8t}\left(\frac{63}{8}t + \frac{63}{64}\right) + \frac{1}{64}$$

- $s_2(t) = 3e^{-2t}$:
  Ansatz:

$$y_A(t) = Ae^{-2t}$$
$$y'_A(t) = -2Ae^{-2t}$$
$$y''_A(t) = 4Ae^{-2t}$$

Einsetzen:

$$\left(4Ae^{-2t}\right) + 16\left(-2Ae^{-2t}\right) + 64\left(Ae^{-2t}\right) = 3e^{-2t}$$
$$36Ae^{-2t} = 3e^{-2t}$$
$$A = \frac{1}{12} \;\Rightarrow\; y_A(t) = \frac{1}{12}e^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-8t}\left(C_1 t + C_2\right) + \frac{1}{12}e^{-2t}$$
$$y'(t) = -8e^{-8t}\left(C_1 t + C_2\right) + e^{-8t}C_1 - \frac{1}{6}e^{-2t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{12}$$
$$0 = -8C_2 + C_1 - \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{15}{2}, C_2 = \frac{11}{12}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-8t}\left(\frac{15}{2}t + \frac{11}{12}\right) + \frac{1}{12}e^{-2t}$$

- $s_3(t) = 2\sin(5t)$: Ansatz:

$$y_A(t) = A\sin(5t) + B\cos(5t)$$
$$y'_A(t) = 5A\cos(5t) - 5B\sin(5t)$$
$$y''_A(t) = -25A\sin(5t) - 25B\cos(5t)$$

Einsetzen:

$$(39A - 80B)\sin(5t) + (80A + 39B)\cos(5t) = 2\sin(5t)$$
$$39A - 80B = 2, 80A + 39B = 0 \;\Rightarrow\; A = \frac{78}{7921}, B = -\frac{160}{7921}$$
$$\Rightarrow y_A(t) = \frac{78}{7921}\sin(5t) - \frac{160}{7921}\cos(5t)$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-8t}\left(C_1 t + C_2\right) + \frac{78}{7921}\sin(5t) - \frac{160}{7921}\cos(5t)$$

$$y'(t) = -8e^{-8t}\left(C_1 t + C_2\right) + e^{-8t}C_1 + \frac{390}{7921}\cos(5t) + \frac{800}{7921}\cos(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 - \frac{160}{7921}$$

$$0 = -8C_2 + C_1 + \frac{390}{7921}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{722}{89}, C_2 = \frac{8081}{7921}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = e^{-8t}\left(\frac{722}{89}t + \frac{8081}{7921}\right) + \frac{78}{7921}\sin(5t) - \frac{160}{7921}\cos(5t)$$

(d) DGL 4:

- $s_1(t) = 1$:
  Ansatz:

$$y_A(t) = A$$

$$y_A'(t) = 0$$

$$y_A''(t) = 0$$

Einsetzen:

$$25A = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{25} \;\Rightarrow\; y_A(t) = \frac{1}{25}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1\sin(5t) + C_2\cos(5t) + \frac{1}{25}$$

$$y'(t) = 5C_1\cos(5t) - 5C_2\sin(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{1}{25}$$

$$0 = 5C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 0, C_2 = \frac{24}{25}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{24}{25}\cos(5t) + \frac{1}{25}$$

- $s_2(t) = 3e^{-2t}$:
  Ansatz:

$$y_A(t) = Ae^{-2t}$$

$$y_A'(t) = -2Ae^{-2t}$$

$$y_A''(t) = 4Ae^{-2t}$$

Einsetzen:

$$\left(4Ae^{-2t}\right) + 25\left(Ae^{-2t}\right) = 3e^{-2t}$$

$$29Ae^{-2t} = 3e^{-2t}$$
$$\Rightarrow A = \frac{3}{29} \;\Rightarrow\; y_A(t) = \frac{3}{29}e^{-2t}$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 \sin(5t) + C_2 \cos(5t) + \frac{3}{29}e^{-2t}$$
$$y'(t) = 5C_1 \cos(5t) - 5C_2 \sin(5t) - \frac{6}{29}e^{-2t}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2 + \frac{3}{29}$$
$$0 = 5C_1 - \frac{6}{29}$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{6}{145}, C_2 = \frac{26}{29}$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{6}{145}\sin(5t) + \frac{26}{29}\cos(5t) + \frac{3}{29}e^{-2t}$$

- $s_3(t) = 2\sin(5t)$: Ansatz (einfache Resonanz):

$$y_A(t) = t\,(A\sin(5t) + B\cos(5t))$$
$$y_A'(t) = (A\sin(5t) + B\cos(5t)) + t\,(5A\cos(5t) - 5B\sin(5t))$$
$$y_A''(t) = (10A\cos(5t) - 10B\sin(5t)) + t\,(-25A\sin(5t) - 25B\cos(5t))$$

Einsetzen:

$$-10B\sin(5t) + 10A\cos(5t) = 2\sin(5t)$$
$$-10B = 2, 10A = 0 \;\Rightarrow\; A = 0, B = -\frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow y_A(t) = -\frac{1}{5}t\cos(5t)$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1\sin(5t) + C_2\cos(5t) - \frac{1}{5}t\cos(5t)$$
$$y'(t) = 5C_1\cos(5t) - 5C_2\sin(5t) - \frac{1}{5}\cos(5t) + t\sin(5t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$1 = C_2$$
$$0 = 5C_1 - \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{25},\; C_2 = 1$$

gesuchte partikuläre Lösung:

$$y(t) = \frac{1}{25}\sin(5t) + \cos(5t) - \frac{1}{5}t\cos(5t)$$