



## Musterlösung Serie 12

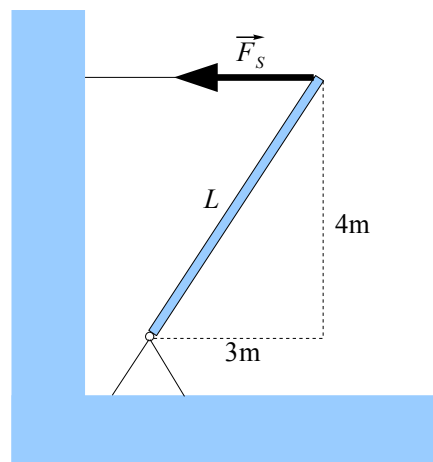
Klasse: 2Ub

Semester: 2

Datum: 27. Juni 2017

### 1. Schlagbaum

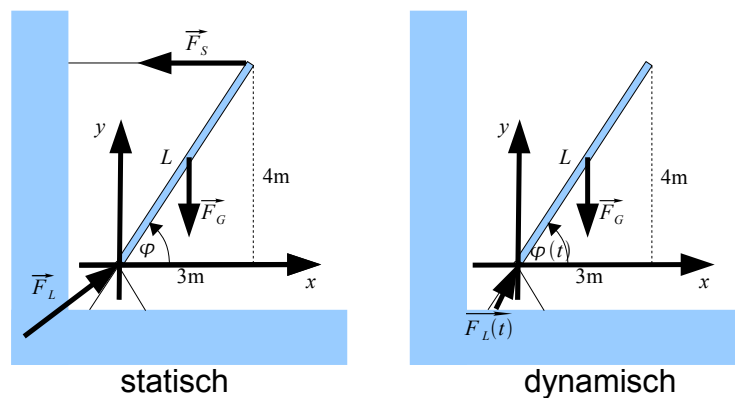
Ein Schlagbaum hat die Masse  $m = 150\text{kg}$  (homogene Massenverteilung) und die Länge  $L = 5\text{m}$ . Der Schlagbaum ist mit dem Boden durch ein Scharnier verbunden und wird oben durch ein horizontales Seil gehalten:



- (a) Wie gross ist die Seilkraft in der skizzierten Situation?

**Lösung:**

Skizze der wirkenden Kräfte:



Da das Seil den Schlagbaum in Ruhe hält, müssen Summe der Kräfte (vektoriell) und Momente Null sein. Auf den Schlagbaum wirken drei Kräfte (Gewichtskraft  $\vec{F}_G$ , Seilkraft  $\vec{F}_S$  und Lagerkraft  $\vec{F}_L$ ), wobei die Gewichts- und die Seilkraft ein nicht verschwindendes Drehmoment bewirken. Die Momentengleichung lautet:

$$\left| \vec{F}_S \right| L \sin(\varphi) - \left| \vec{F}_G \right| \frac{L}{2} \cos(\varphi) = 0$$

Nach der Seilkraft auflösen:

$$\begin{aligned} \left| \vec{F}_S \right| &= \frac{\left| \vec{F}_G \right| \frac{L}{2} \cos(\varphi)}{L \sin(\varphi)} \\ \left| \vec{F}_S \right| &= \frac{mg \cos(\varphi)}{2 \sin(\varphi)} = \frac{mg}{2 \tan(\varphi)} \\ \left| \vec{F}_S \right| &= \frac{mg}{2 \frac{4}{3}} = \frac{3mg}{8} = 551.81N \end{aligned}$$

- (b) Zum Zeitpunkt  $t = 0s$  wird das Seil durchtrennt. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt des Schlagbaums.

**Lösung:**

Nun entfällt die Seilkraft und nur noch Gewichtskraft und Lagerkraft sind wirksam. Dabei bewirkt nur die Gewichtskraft ein Drehmoment (bezüglich dem Lagerpunkt als Drehzentrum). Die Bewegungsgleichung für den Winkel  $\varphi$  lautet somit:

$$\begin{aligned} M_{res} &= \frac{L}{2} \cos(\varphi) mg = -J\varphi'' \\ \varphi'' &= -\frac{mgL}{2J} \cos(\varphi) \\ \varphi'' &= -\frac{mgL}{2 \frac{1}{3} mL^2} \cos(\varphi) \\ \varphi'' &= -\frac{3g}{2L} \cos(\varphi) \end{aligned}$$

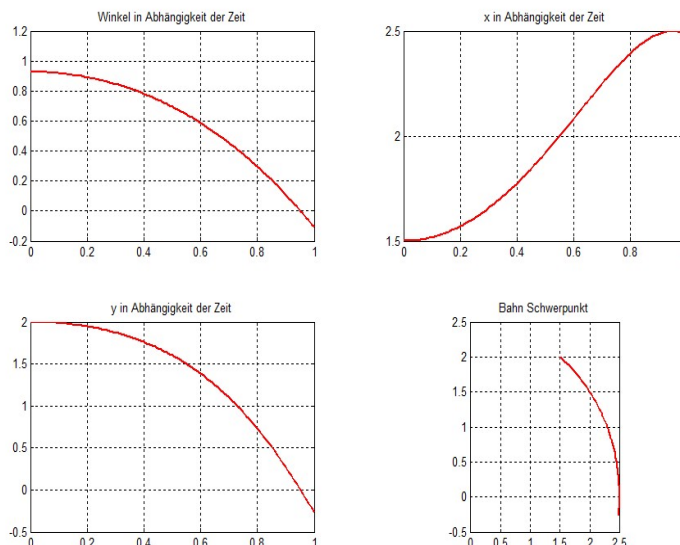
Aus der Beziehung:

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \frac{L}{2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

lässt sich aus der Lösung der Bewegungsgleichung für  $\varphi$  die Bewegung des Schwerpunktes berechnen.

- (c) Erstellen Sie ein SIMULINK-Modell zur gefundenen Differentialgleichung.

**Lösung:**



## 2. Kreisel

- (a) Berechnen Sie für einen Kreisel (Achse 5 cm lang und masselos, Ring mit Radius 5 cm, Masse 100 g) das Trägheitsmoment.

$$\Theta = m \cdot r^2$$

- (b) Wie gross ist der Drehimpuls bei einer Umlaufzeit von  $T = 0.1$  sec
- (c) Geben Sie den Schwerpunkt des Systems an, wenn der Kreisel um  $45^\circ$  gegenüber der z-Achse in x-Richtung geneigt wird.
- (d) Geben Sie den Drehimpuls dieses Kreisels als Vektor an.
- (e) Geben Sie das Drehmoment der Gravitationskraft auf den Kreisel an, falls er auf seine Drehachse gestellt wird.
- (f) Erstellen Sie ein Simulink für diesen Kreisel, der im Schwerfeld der Erde auf einer Achse steht. Benutzen Sie dafür u.a. **Simulink 3D Animation/Utilities/Cross Product**.
- (g) Visualisieren Sie die z-Komponente des Drehimpulses.
- (h) Visualisieren Sie die x- und y-Komponente des Drehimpulses. Lesen die Präzessionsfrequenz aus.
- (i) Berechnen Sie die Präzessionsfrequenz mit der Formel

$$\Omega = \frac{r \cdot F_g}{L}$$

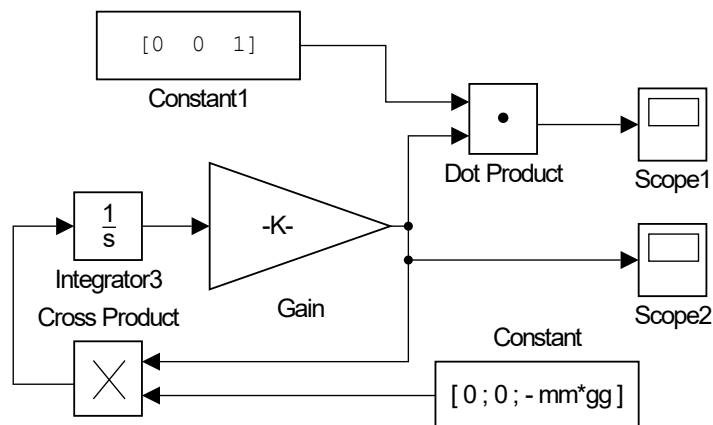
## Lösung

```
mm=0.1 ;% Masse in kg
gg=9.81 ;% Erdbeschleunigung
```

```

Jj=0.05^2*mm % a) Trägheitsmoment
%Jj = 2.5000e-04
w0=2*pi*1/(0.1) % Winkelgeschwindigkeit, 0.1 sec = Umlaufzeit
%w0 = 62.8319
L0s=Jj*w0 % b) Drehimpuls
%L0s = 0.0157
r0=[ 5 ; 0 ; 5]
r0=r0/norm(r0)*0.025 % Ort des Schwerpunktes bei t=0 bei 45% Neigung
%r0=0.017677669529664
% 0
% 0.017677669529664
L0=r0/norm(r0)*w0 *Jj % d) Drehimpuls parallel zu Kreisel-Achse
%L0 =0.0111
% 0
% 0.0111
M0=cross([1;1;0].*r0, [0; 0; -mm*gg]) % e) Drehmoment durch Gravitation
%M0 = 0
% 0.0245
% 0
Om=(0.025*mm*gg)/(L0)
%Om = 1.5613
% Om=(0.025*mm*gg)/(L0s) h) Präzessionsfrequenz berechnet
Ts=4.02429;
Oms=2*pi*1/Ts % Präzessionsfrequenz aus Umlaufzeit Ts
%Oms = 1.5613

```



Die z-Komponente bleibt konstant während der Simulation, während die x- und die y-Komponente oszillieren. Der Kreisel präzediert also.