Analysis 2
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Test 1 Musterlösung

Name, Nummer: Datum: 27. März 2017

1. Ableitungen (10)

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von $f(x) = \frac{1}{4}e^x(2x-1) + e^{-x}$. [6 Punkte]

(b) Berechnen Sie den folgenden Term und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$$f''(x) - f(x) - e^x$$

[4 Punkte]

Lösung:

(a) Die erste und die zweite Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}\left[e^x(2x-1) + e^x \cdot 2\right] + (-1)\cdot e^{-x} = \frac{1}{4}\left[e^x(2x+1)\right] - e^{-x} \\ f''(x) &= \frac{1}{4}\left[e^x(2x+1+2)\right] + e^{-x} = \frac{1}{4}\left[e^x(2x+3)\right] + e^{-x} \end{aligned}$$

(b) Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} f''(x) - f(x) - e^x &= \frac{1}{4}\left[e^x(2x+3)\right] + e^{-x} - \left\{\frac{1}{4}\left[e^x(2x+1)\right] + e^{-x}\right\} - e^x \\ &= e^x\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + e^{-x} - e^{-x} - e^x \\ &= e^x - e^x = 0 \end{aligned}$$

2. Partielle Integration (10)

Berechnen Sie das bestimmte Integral von $f(x)$ zu den Grenzen 0 und π

$$f(x) = x^2 \cdot \cos(x)\ .$$

Lösung:

Das Integral wird durch partielle Integration gelöst:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^\pi \underset{\underset{\cos(x)}{\uparrow}}{\sin(x)} \cdot \underset{\underset{x^2}{\downarrow}}{2x} dx \\
&= \left[x^2 \cdot \sin(x)\right]_0^\pi - 2 \cdot \int_1^\pi \underset{\underset{\sin(x)}{\uparrow}}{\cos(x)} \cdot \underset{\underset{x}{\downarrow}}{1} dx \\
&= 0 - 2 \cdot \left\{ \left[-x \cdot \ cos(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) dx \right\} \\
&= -2 \cdot \left\{ -\pi \cdot (-1) - 0 + \left[\sin(x)\right]_0^\pi \right\} = -2\pi
\end{aligned}
$$

3. Integration durch Substitution (10)

Berechnen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{x-2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= -\int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} - 2\left[\arcsin(x)\right] = -\frac{1}{2} \underbrace{\int u^{-1/2} du}_{\frac{u^{1/2}}{1/2} + C} -2\left[\arcsin(x)\right] \\
&= -\sqrt{1-x^2} - 2\arcsin(x) + C
\end{aligned}
$$

Dabei wurde die Substitution $1 - x^2 = u$ durchgeführt. Sie führt auf

$$
\begin{aligned}
-2x &= \frac{du}{dx} \\
dx &= -\frac{du}{2x}
\end{aligned}
$$

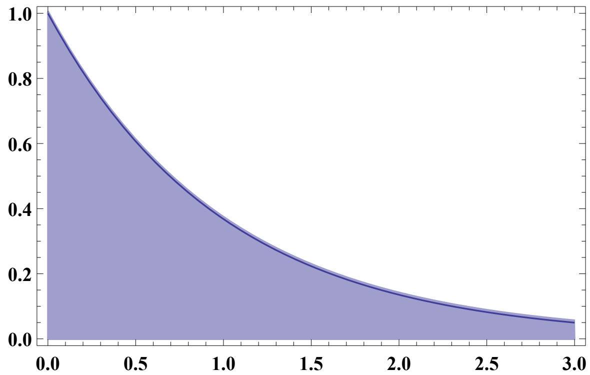
Es wird nach *einer* Stammfunktion gefragt, also ist die Integrationskonstante C fakultativ.

4. Flächenberechnung (10)

Welche (endliche) Fläche schliesst die Funktion $f(x)$ mit der x-Achse ein ($x > 0$)?

$$f(x) = e^{-x}$$

Lösung:



Die Funktion hat keine Nullstellen.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty \\ &= -\left[e^{-\infty} - e^{-0}\right] = -[0 - 1] = 1 \end{aligned}$$

Die Fläche ist also $A = 1$.

5. Mechanik (10)

Ein Flugzeug beschleunigt beim Start, so dass die Geschwindigkeit zwischen Stillstand und Abheben wie folgt zunimmt:

$$v(t) = 25.5 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{5}}) \, .$$

Angaben in m/s. Nach 19.51 Sekunden hebt das Flugzeug ab.

(a) Wie schnell ist es dann?

(b) Wie lange ist die Startpiste?

Lösung:

(a) $v(19.51) = 25.5 \cdot (1 - e^{-\frac{19.51}{5}}) = 25$ in m/s.

(b) Länge der Startpiste in m (Zeit in s):

$$s = 25.5 \cdot \int_0^{19.51} (1 - e^{-\frac{t}{5}}) dt = 25.5 \cdot \left[t - \frac{e^{-\frac{t}{5}}}{-1/5} \right]_0^{19.51} = 25.5 \cdot \left\{ 0 - \left[19.51 + 5e^{-\frac{19.51}{5}} \right] \right\} = 372.58$$