An2 U
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Test 2 Musterlösung

Name, Nummer: Datum: 2. Mai 2017

1. Differentialgleichungen klassifizieren 186011

Gegeben sind 3 Differentialgleichungen für die Funktion y in der Variablen x. Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen. Bitte äussern Sie sich zu allen Eigenschaften. Nennen Sie jeweils ein geeignetes *Lösungsverfahren*. Die Lösung selbst ist nicht gefragt.

Lösung:

	Ordnung	trennbar	homogen	linear	Lös.-Verfahren
$\frac{y(x)}{1-x^2} + y'(x) = \sqrt{1-x}$	1	nein	nein	ja	Lös.form.
$3x + \frac{1}{x}y + \frac{1}{y\cdot x^2}y'' = 0$	2	nein	-	nein	Matlab
$ye^{2x+y} + 4xe^{2x+y} + 2xe^{2x+y}\frac{dy}{dx} = 0$	1	nein	nein	ja	Lös.form.

2. Trennbare Differentialgleichung 914239

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = x\sqrt{y}\ .$$

für die Funktion y in der Variablen x. Bestimmen Sie dann die Integrationskonstante zur Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{3}$.

Lösung:
Separation der Variablen:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = x \cdot dx$$

Integration:

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + C$$

Auflösen nach y:

$$\begin{aligned} y^{1/2} &= \frac{x^2}{4} + D \\ \Rightarrow\ y &= \left(\frac{x^2}{4} + D\right)^2 \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung gilt:

$$y(0) = \frac{1}{3} = \left(\frac{0^2}{4} + D\right)^2$$

also

$$D = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

3. Differentialgleichung 1. Grades **435165**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{y'(x)}{3} + \frac{y(x)}{3x} = 1 \ .$$

für die Funktion y in der Variablen x.

Lösung:
Die Gleichung kann in Normalform gebracht werden

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 3 \ .$$

Deshalb ist es eine lineare DGL ersten Grades und wir können die Lösungsformel anwenden. Sie lautet für die DGL

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y(x) = e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int e^{P(x)} \cdot q(x) \, dx$$

wobei $P(x)$ die Stammfunktion von $p(x)$ ist. Hier ist

$$p(x) = \frac{1}{x} \ \Rightarrow P(x) = \log(x)$$

Eingesetzt ergibt dies

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-\log(x)} + e^{-\log(x)} \int e^{\log(x)} \cdot 3 \, dx$$

Das Integral vereinfacht sich zu

$$3 \int x \, dx = 3 \frac{x^2}{2} \ .$$

Also können wir schreiben

$$y(x) = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \left(3 \frac{x^2}{2} \right) = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{3}{2} x$$

4. Lineare Differentialgleichung 2. Grades **120294**

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

der Funktion $y(x)$ in der Variablen x.

(b) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten (C_1, C_2), so dass $y(0) = 2$ und $y'(0) = -3$

Lösung:

(a) Die charakteristische Gleichheit lautet $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ und damit $\lambda_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 9}}{2} = -3$. Also ist das Fundamentalsystem $\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$, und die Lösung des homogenen Problems ist $y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2\, x\, e^{-3x}$.

(b) Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, berechnen wir die erste Ableitungen der allgemeinen Lösung

$$y'(x) = -3C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x} - 3C_2 e^{-3x} x$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} y(0) &= \; = C_1 e^{-3\cdot 0} + C_2 e^{-3\cdot 0} \cdot 0 = 2 \;\Rightarrow\; C_1 = 2 \\ y'(0) &= \; = -3 \cdot 2 \cdot e^{-3\cdot 0} + C_2 e^{-3\cdot 0} - 3C_2 e^{-3\cdot 0} \cdot 0 = -3 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kann vereinfacht werden zu

$$-6 + C_2(1 - 0) = -3 \;\Rightarrow\; C_2 = 3$$

Insgesamt erhält man

$$y(x) = 2 \cdot e^{-3x} + 3 \cdot \; x\, e^{-3x} \; .$$

5. Lineare Differentialgleichung 2. Grades 559838

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 6y' + 5y = 8e^{5x} \; .$$

Bestimmen Sie welche der folgenden Funktionen homogene oder partikuläre Lösungen der DGL sind.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{2}{15} e^{5x} \\ y_2(x) &= 5e^{-5x} \\ y_3(x) &= 2e^{-x} \end{aligned}$$

Führen Sie Integrationskonstanten ein (C_1, C_2) und schreiben Sie die allgemeine Lösung auf. Bestimmen Sie danach die Integrationskonstanten , so dass $y(0) = 1/3$ und $y'(0) = -3$

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} y_1(x): \; y'' - 6y' + 5y &= 8e^{5x} \\ y_2(x): \; y'' - 6y' + 5y &= 0 \\ y_3(x): \; y'' - 6y' + 5y &= 0 \end{aligned}$$

$y_1(x)$ ist die partikuläre Lösung, $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind homogene Lösungen. Also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = D_1\, 5 \cdot e^{-5x} + D_2\, 2 \cdot e^{-x} + \frac{2}{15} e^{5x}\ .$$

oder einfacher

$$y(x) = C_1\, e^{-5x} + C_2\, e^{-x} + \frac{2}{15} e^{5x}\ .$$

Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, berechnen wir die erste Ableitungen der allgemeinen Lösung

$$y'(x) \;=\; C_1\, e^{-5x} \cdot (-5) + C_2\, e^{-x} \cdot (-1) + \frac{2}{15} e^{5x} \cdot 5$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} y(0) &= \; = C_1 + C_2 + \frac{2}{15} = 1/3 \\ y'(0) &= \; = -C_1 \cdot 5 - C_2 + \frac{2}{15} \cdot 5 = -3 \end{aligned}$$

Wir addieren die beiden Gleichungen und erhalten

$$y(0) + y'(0) = -C_1 \cdot 4 + \frac{2}{15} \cdot 6 = 1/3 - 3$$

oder $C_1 = \frac{13}{15}$. Wir setzen das in die erste Gleichung ein

$$1 + C_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \; C_2 = \frac{7}{2}$$

und also $C_2 = -\frac{2}{3}$
Insgesamt erhält man

$$y(x) = \frac{13}{15}\, e^{-5x} - \frac{2}{3}\, e^{-x} + \frac{2}{15} e^{5x}\ .$$