An2 U
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.com

Test 3, Musterlösung

Name, Nummer: Datum: 6. Juni 2017

1. Analytische Lösung der DGL R56771

Gegeben seien die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 196y(t) = e^{14t}$$

und ihre homogene Lösung

$$y_h(t) = C_1 \cos(14\,t) + C_2 \sin(14\,t)$$

Bestimmen Sie die partikuläre Lösung.

Lösung

Es liegt keine Resonanz vor. Wir machen den Ansatz in der Form der Störung mit freien Koeffizienten $y_p(t) = A \cdot e^{14 \cdot t}$. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y_p(t)' &= 14Ae^{14t} \\ y_p(t)'' &= 196Ae^{14t} \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$392Ae^{14 \cdot t} = e^{14t} \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{392}$$

Also ist die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = \frac{1}{392} \cdot e^{14t}$$

2. Euler-Cauchy-Verfahren NHMLTC

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$e^y \frac{dy}{dx} - 2x = 0\ ,$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = \log(2)$.

(a) Berechnen Sie die ersten 4 Schritte der Simulation mit dem Euler-Cauchy-Verfahren. Wählen Sie die Schrittweite $dx = 0.1$. Geben Sie die Excel-Tabelle als "*nachname_vorname*_ecv.xls" ab.

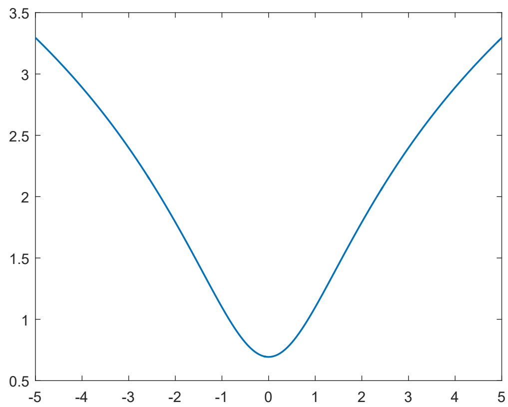
(b) Lösen Sie die Differentialgleichung analytisch mit Matlab und berechnen Sie $y(0.0)$, $y(0.1)$, $y(0.2)$ und $y(0.3)$.

Lösung:

(a) Wir lösen die DGL nach dy/dx auf:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{-y}$$

(b)
```
dsolve('Df*exp(f)-2*x=0','f(0)=log(2)','x')
%ans = log(x^2 + 2)  % Lösung der DGL}
f=@(x) log(x.^2 + 2 );
f((0:4)/10) % Fktion auswerten
% ans = 0.6931 0.6981 0.7129 0.7372 0.7701
xlist=-5:0.05:5;
ylist=f(xlist);
plot(xlist,ylist)
ylist=f(xlist);
plot(xlist,ylist) % Fktion plotten
%alternativ auch
syms y(x)
Dy = diff(y);
dsolve(exp(y)*Dy-2*x == 0  , y(0) == log(2))
%ans = log(x^2 + exp(6243314768165359/9007199254740992))
% wobei exp(6243314768165359/9007199254740992.)=2
```



3. Analytische Lösung der DGL STAG5A

Gegeben seien die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 196 \cdot y(t) = \sin(14 \cdot t)$$

und ihre homogene Lösung

$$y_h(t) = C_1 \cos(14\,t) + C_2 \sin(14\,t)$$

Bestimmen Sie die partikuläre Lösung.

Lösung

Wir machen den Ansatz in der Form der Störung mit freien Koeffizienten $y_p(t) = A\cos(14\,t) + B\sin(14\,t)$. Deshalb multiplizieren wir den Ansatz mit t:

$$y_p(t) \;\to\; y_p(t) = t \cdot [A\cos(14\,t) + B\sin(14\,t)]$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y_p(t)' &= -14At\sin(14\,t) + A\cos(14\,t) + B\sin(14\,t) + 14Bt\cos(14\,t) \\ y_p(t)'' &= -28A\sin(14\,t) - 196At\cos(14\,t) - 196Bt\sin(14\,t) + 28B\cos(14\,t) \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & -28A\sin(14\,t) - 196At\cos(14\,t) - 196Bt\sin(14\,t) + 28B\cos(14\,t) \\ + \;& 196 \cdot t \cdot [A\cos(14\,t) + B\sin(14\,t)] = \sin(14 \cdot t) \\ \Rightarrow \;& 28B\cos(14t) - 28A\sin(14t) = \sin(14 \cdot t) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich entsteht das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l|lcl|} \sin(14 \cdot t): & -28A & = & 1 \\ \cos(14t): & 28B & = & 0 \end{array}$$

Mit der Lösung $B = 0$ und $A = -\frac{1}{28}$. Also ist die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = -t \cdot \frac{1}{28}\cos(14\,t)$$

4. Simulation mit Simulink **QBQRTG**

(a) Erstellen Sie für die folgende Differenzialgleichung ein lauffähiges Simulink-Modell, geben Sie es unter "*nachname_vorname*_dgl.mdl" ab.[1]

$$\ddot{y}(t) + 196 \cdot y(t) = \sin(14 \cdot t)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 5$ und $\dot{x}(0) = 1$.

(b) Berechnen Sie y(10).

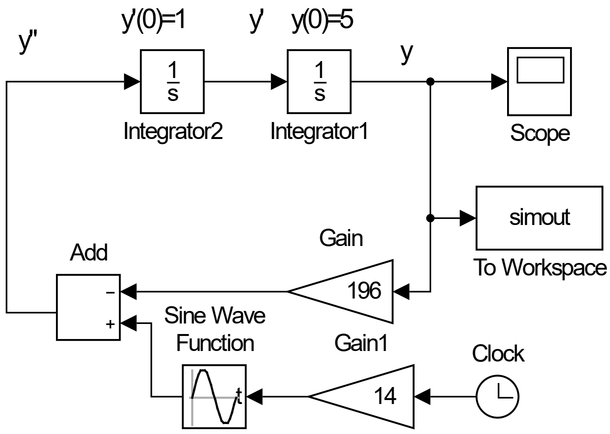
(c) Aus der analytischen Lösung ergibt sich y(10)=-0.8459024351122426. Berechnen Sie den Fehler der durch die numerische Simulation entsteht.

[1] Wenn Sie ein Matlab-Skript benutzen, geben Sie auch das als "*nachname_vorname*_dgl_run.m" ab.

Lösung:

(a) Die Integrator-Blocks enthalten die Anfangsbedingungen

$$\dot{x}(0) = 1 \text{ und } y(0) = 5$$

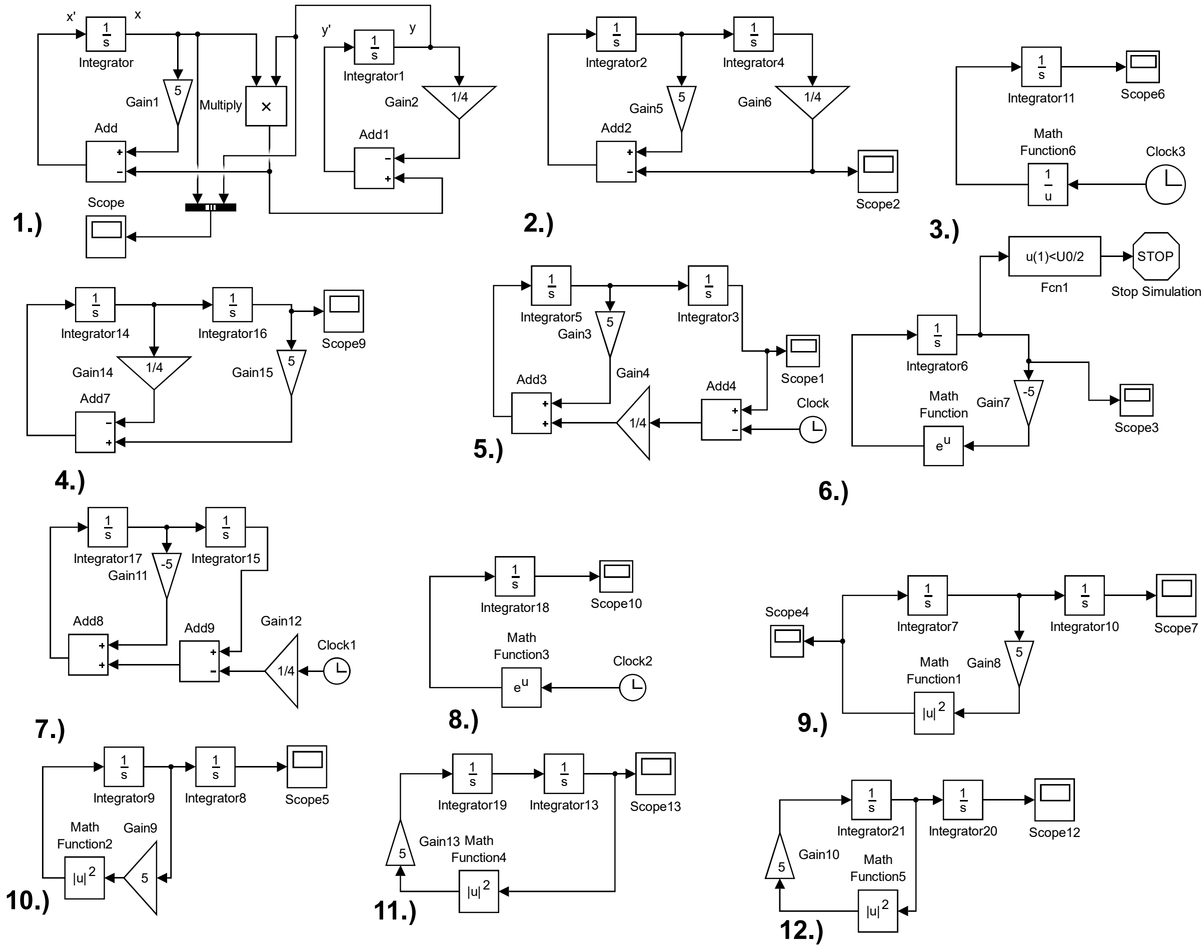


(b) Wir lesen im Scope aus: $y(10) = -0.9425$

(c) Der Fehler ist also $y(10) - (-0.8459024351122426) = -0.0965976$

5. Elemente im SIMULINK-Modell **NNMMYL**

Ordnen Sie die Terme den Simulink-Modellen zu



Lösung

(a) $y'(t) = |5y|^2$ gehört zu (10) oder auch (9)

(b) $y''(t) - 5y' - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}t = 0$ gehört zu (5)

(c) $y(x) = \log(x)$ gehört zu (3)

(d) $y''(t) = 5|y|^2$ gehört zu (11)