Brückenkurs Physik
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.org

Serie 2, Vektoren

1. Vektoren strecken 7B7B52

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $2 \cdot \vec{a}$

(b) $5 \cdot \vec{b}$

(c) $(-1) \cdot \vec{a}$

(d) $(-1) \cdot \vec{c}$

(e) $(-2) \cdot \vec{c}$

(f) $(-5) \cdot \vec{a}$

2. Addition/Subtraktion von Vektoren XTG3GM

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $\vec{a} + \vec{b}$

(b) $\vec{a} + \vec{c}$

(c) $\vec{c} + \vec{d}$

(d) $\vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$

(e) $\vec{b} - 2 \cdot \vec{c} - \vec{a}$

(f) $3 \cdot \vec{d} - 2 \cdot \vec{e}$

3. Betrag eines Vektors/Vektoren normieren EM4PW4

Mit v schreiben die Länge des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$. In einem rechtwinkligen und normierten Koodinatensystem gilt:

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} \ .$$

Die Länge wir auch mit '**Betrag** von $\vec{v}$' bezeichnet und es wird geschrieben

$$v = |\vec{v}| \ .$$

Es gilt immer (für $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$|\lambda \cdot \vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}| \ ,$$

d.h. wird ein Vektor $\vec{v}$ um den Faktor λ gestreckt, wird sein Betrag um $|\lambda|$ länger. Wir können einen Vektor immer auf die Länge 1 "zurückstutzen" wie folgt

$$\vec{v} \ \rightarrow \ \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \ .$$

Der Vektor $\vec{v}'$ hat garantiert die Länge 1, denn

$$|\vec{v}'| = \left|\vec{v} \cdot \frac{1}{\vec{v}}\right| = |\vec{v}| \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} = 1 \ .$$

Wir sagen, $\vec{v}'$ sei **normiert**. Für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix} ; \ \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren .

(b) Normieren Sie die Vektoren.

(c) Berechnen Sie

$$\left|7 \cdot \vec{b}\right|, \left|\frac{\vec{c}}{25}\right|, \text{ und } \left|\frac{\vec{d}}{6.5}\right|$$

4. Vektor und Winkel **9038P0**

Der Vektor

$$\vec{w} = w \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat die Länge w und schliesst mit der x-Achse den Winkel φ ein. Achtung: In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeiger-Sinn gemessen, d.h. 10° ist im Gegenuhrzeigersinn und −10° ist im Uhrzeigersinn.

(a) $a = 1$, $\varphi = 45°$

(b) $b = 2$, $\varphi = 135°$

(c) $c = 5$, $\varphi = 25°$

(d) $d = 2$, $\varphi = 60°$

(e) $e = \sqrt{2}$, $\varphi = -45°$

(f) $f = 7$, $\varphi = 35°$

5. Kartesische Koordinaten/Polarkoordinaten **R3601V**

Wir nennen die Komponenten $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ auch **Kartesische Koordinaten**. Für jeden Vektor können wir daraus Betrag und φ (den Winkel, den $\vec{v}$ mit der x-Achse einschliesst) berechnen. Das Paar v und φ bestimmt einen Vektor eindeutig. Wir nennen dieses Zahlenpaar die **Polar-Koordinaten** des Vektors $\vec{v}$. Es gilt (im 1. und 4. Quadrant):

$$\varphi = \arctan(\frac{v_y}{v_x})$$

Liegt $\vec{v}$ im 2. oder 3. Quadranten (d.h. $v_x < 0$), dann gilt

$$\varphi = \arctan(\frac{v_y}{v_x}) + 180°$$

Notieren Sie in welchem Quadranten die Vektoren liegen und berechnen Sie Winkel und Länge:

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7.96956 \\ -0.697246 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(e) $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6. Skalarprodukt **DS35SG**

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ist

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Das Skalarprodukt hängt auch vom Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ab:

$$\vec{a} \odot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$$

Deshalb kann es benutzt werden um den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu berechnen

$$\alpha = \arccos(\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{a \cdot b}) \ .$$

Für den Fall, dass $\vec{b}'$ normiert ist, ergibt das Skalarprodukt den Schatten (die *Projektion*) von $\vec{a}$ auf $\vec{b}'$

$$\vec{a} \odot \vec{b}' = a \cdot \cos(\alpha) \ .$$

Beachte: Wir berechnen nur was links steht (das geht schnell). Was rechts steht, zeigt nur, dass es sich bei der berechneten Grösse tatsächlich um den Schatten handelt.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Berechne

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A} \odot \vec{B} =?$ Zeichnen Sie die Vektoren in ein Koordinatensystem auf einem karierten Blatt ein und erklären Sie das berechnete Resultat mit ihrer Zeichnung.

(b) $\vec{a} \odot \vec{e}_1 =?$ und $\vec{a} \odot \vec{e}_2 =?$

(c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1.14715 \\ 1.6383 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0.694593 \\ 3.93923 \end{pmatrix}$, Zwischenwinkel $\alpha =?$

(d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, Zwischenwinkel $\alpha =?$

(e) die Länge des Schattens von $\vec{a}$ auf $\vec{c}$.

(f) die Länge des Schattens von $\vec{a}$ auf $\vec{f}$.