Brückenkurs Physik
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.org

Serie 2, Musterlösung

1. Vektoren strecken 7B7B52

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\ \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $2 \cdot \vec{a}$

(b) $5 \cdot \vec{b}$

(c) $(-1) \cdot \vec{a}$

(d) $(-1) \cdot \vec{c}$

(e) $(-2) \cdot \vec{c}$

(f) $(-5) \cdot \vec{a}$

Lösung:

(a) $2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

(b) $5 \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$

(c) $(-1) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

(d) $(-1) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

(e) $(-2) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

(f) $(-5) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$

2. Addition/Subtraktion von Vektoren XTG3GM

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix};\ \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};\ \vec{d} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix};\ \vec{e} = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $\vec{a} + \vec{b}$

(b) $\vec{a} + \vec{c}$

(c) $\vec{c} + \vec{d}$

(d) $\vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$

(e) $\vec{b} - 2 \cdot \vec{c} - \vec{a}$

(f) $3 \cdot \vec{d} - 2 \cdot \vec{e}$

Lösung:

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{b} - 2 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{b} - 2 \cdot \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) $3 \cdot \vec{d} - 2 \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

3. Betrag eines Vektors/Vektoren normieren **EM4PW4**

Für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}; \ \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren .

(b) Normieren Sie die Vektoren.

(c) Berechnen Sie

$$\left|7 \cdot \vec{b}\right|, \left|\frac{\vec{c}}{25}\right|, \text{ und } \left|\frac{\vec{d}}{6.5}\right|$$

Lösung:

(a) Die Beträge der Vektoren sind

$$|\vec{a}| = 5; \ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{2}; \ |\vec{c}| = 25; \ \left|\vec{d}\right| = 13$$

(b) Es ist oft von Vorteil den Normierungsfaktor nicht mit allen Komponenten zu multiplizieren sondern ihn als Faktor vor dem Vektor zu schreiben:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{b}' = \frac{\vec{b}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}' = \frac{\vec{c}}{25} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}$$

(c) Die Beträge sind

$$\left|7 \cdot \vec{b}\right| = 7 \cdot \sqrt{2}, \left|\frac{\vec{c}}{25}\right| = 1, \text{ und } \left|\frac{\vec{d}}{6.5}\right| = \frac{13}{6.5} = 2$$

4. Vektor und Winkel **9038P0**

Der Vektor

$$\vec{w} = w \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat die Länge w und schliesst mit der x-Achse den Winkel φ ein. Achtung: In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeiger-Sinn gemessen, d.h. $10°$ ist im Gegenuhrzeigersinn und $-10°$ ist im Uhrzeigersinn.

(a) $a = 1$, $\varphi = 45°$
(b) $b = 2$, $\varphi = 135°$
(c) $c = 5$, $\varphi = 25°$
(d) $d = 2$, $\varphi = 60°$
(e) $e = \sqrt{2}$, $\varphi = -45°$
(f) $f = 7$, $\varphi = 35°$

Lösung:

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4.53154 \\ 2.11309 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 5.73406 \\ 4.01504 \end{pmatrix}$

5. Kartesische Koordinaten/Polarkoordinaten **R3601V**

Notieren Sie in welchem Quadranten die Vektoren liegen und berechnen Sie Winkel und Länge:

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7.96956 \\ -0.697246 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(e) $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Lösung:

Um den Winkel zu erhalten, berechnen wir

$$\begin{aligned} \varphi' &= \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 7.9696 \\ -0.6972 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 7.9696 \\ -0.6972 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} \right) \\ &= \arccos\left(\frac{7.9696}{8 \cdot 1} \right) = \arccos(0.9962) \\ &= 0.0873 \end{aligned}$$

Das Resultat ist im Bogenmass, und entspricht 5°. Damit ist der Winkel bis auf das Vorzeichen bestimmt. Wir zählen die Winkel der Vektoren im 1 und 2 Quadranten mit positivem Vorzeichen und im 3 und 4 mit einem negativen Vorzeichen. Vektor $\vec{a}$ liegt im Q4, also $\varphi = -5°$.

(a) Q4, $a = 8$, $\varphi = -5°$

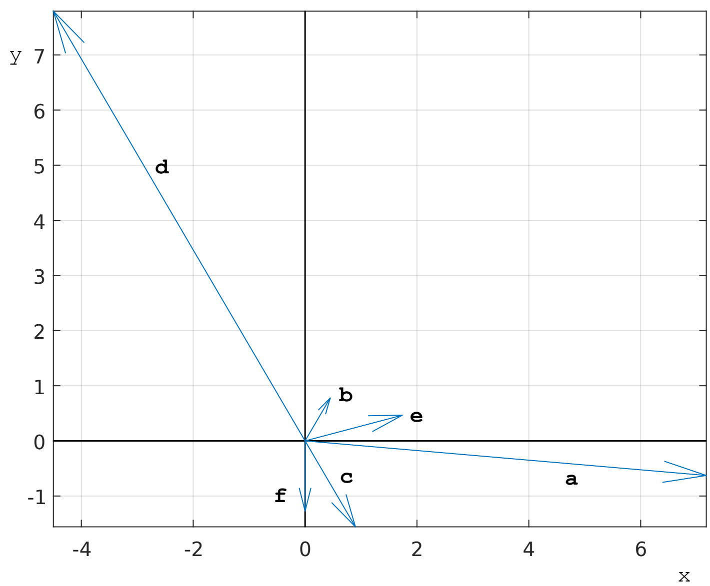
(b) Q1, $b = 1$, $\varphi = 60°$

(c) Q4, $c = 2$, $\varphi = -60°$

(d) Q2, $d = 10$, $\varphi = 120°$

(e) Q1, $e = 2$, $\varphi = 15°$

(f) Q3, $f = \sqrt{2}$, $\varphi = 270°$



6. Skalarprodukt DS35SG

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} ; \; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} ; \; \vec{a} = \begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$$

Berechne

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{A} \odot \vec{B} =?$ Zeichnen Sie die Vektoren in ein Koordinatensystem auf einem karierten Blatt ein und erklären Sie das berechnete Resultat mit ihrer Zeichnung.

(b) $\vec{a} \odot \vec{e}_1 =?$ und $\vec{a} \odot \vec{e}_2 =?$

(c) $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1.14715\\1.6383\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}0.694593\\3.93923\end{pmatrix}$, Zwischenwinkel $\alpha =?$

(d) $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$, Zwischenwinkel $\alpha =?$

(e) die Länge des Schattens von $\vec{a}$ auf $\vec{c}$.

(f) die Länge des Schattens von $\vec{a}$ auf $\vec{f}$.

Lösung:

(a) $\vec{A} \odot \vec{B} = 0$. Die Vektoren stehen rechtwinklig zueinander, d.h. $\cos(\alpha) = 0$ und deshalb ist auch $\vec{A} \odot \vec{B} = 0$

(b) $\vec{a} \odot \vec{e}_1 = 6$ und $\vec{a} \odot \vec{e}_2 = -5$

(c)

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos(\frac{\vec{b} \odot \vec{c}}{\left|\vec{b}\right| \odot |\vec{c}|}) = \arccos(\frac{5.65685}{2 \odot 4}) \\ &= = \arccos(0.707107) = 45^\circ \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos(\frac{\vec{d} \odot \vec{f}}{\left|\vec{d}\right| \odot \left|\vec{f}\right|}) = \arccos(\frac{-2}{2 \odot 2}) \\ &= \arccos(-\frac{1}{2}) = 120^\circ \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} s &= \vec{a} \odot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \odot (\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0.694593 \\ 3.93923 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-15.5286) = -3.88215 \end{aligned}$$

Der Schatten hat die Länge 3.88215 und das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Vektoren in einen Winkel $\alpha > 90^\circ$ einschliessen.

(f)

$$\begin{aligned} s &= \vec{a} \odot \frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \odot (\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 1 - 5 \cdot \sqrt{3}) = -1.330 \end{aligned}$$