Brückenkurs Physik
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.org

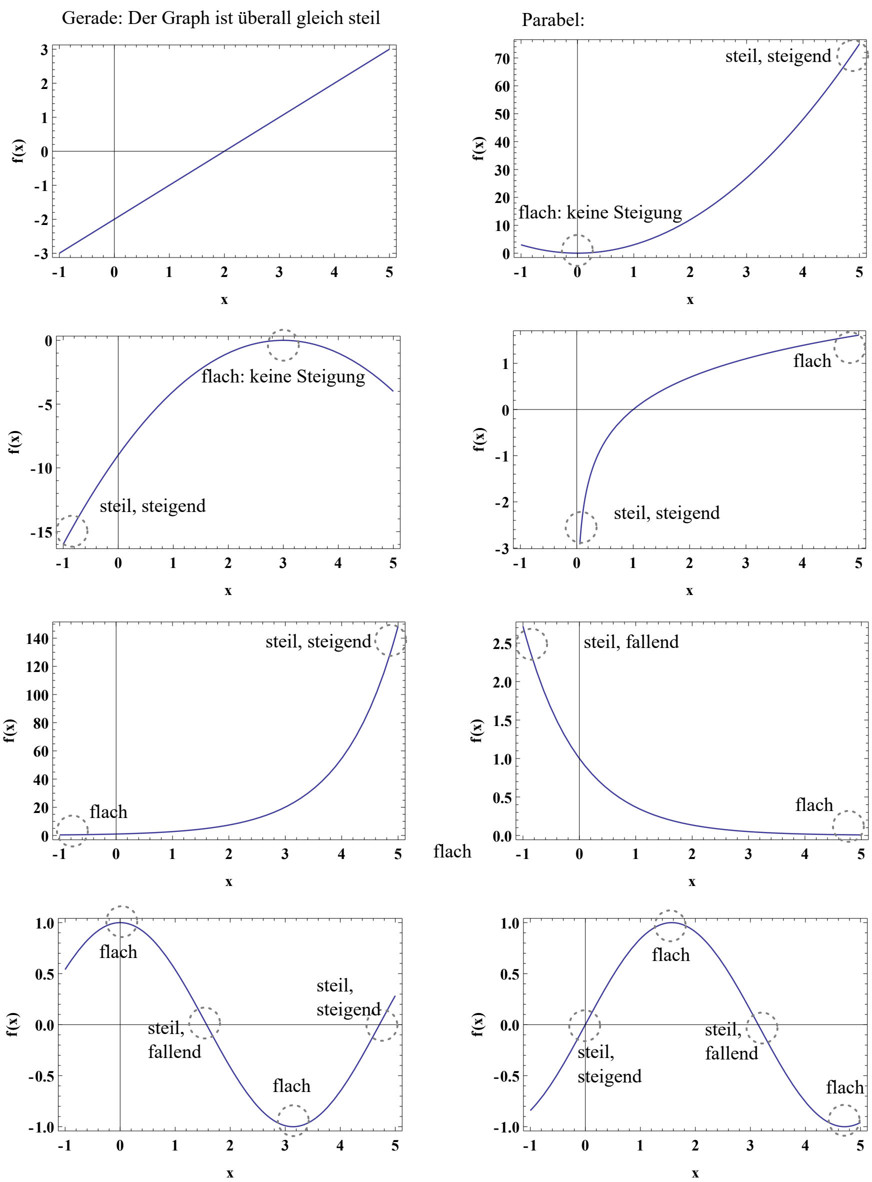
Serie 4,Musterlösung

Brückenkurs Physik Datum: 10. September 2018

1. Steile und flache Graphen 9IG3JU

Wo sind Graphen am steilsten, wo am flachsten? Markieren Sie die Stellen und notieren Sie, ob der Graph dort steigt (s) oder fällt (f).

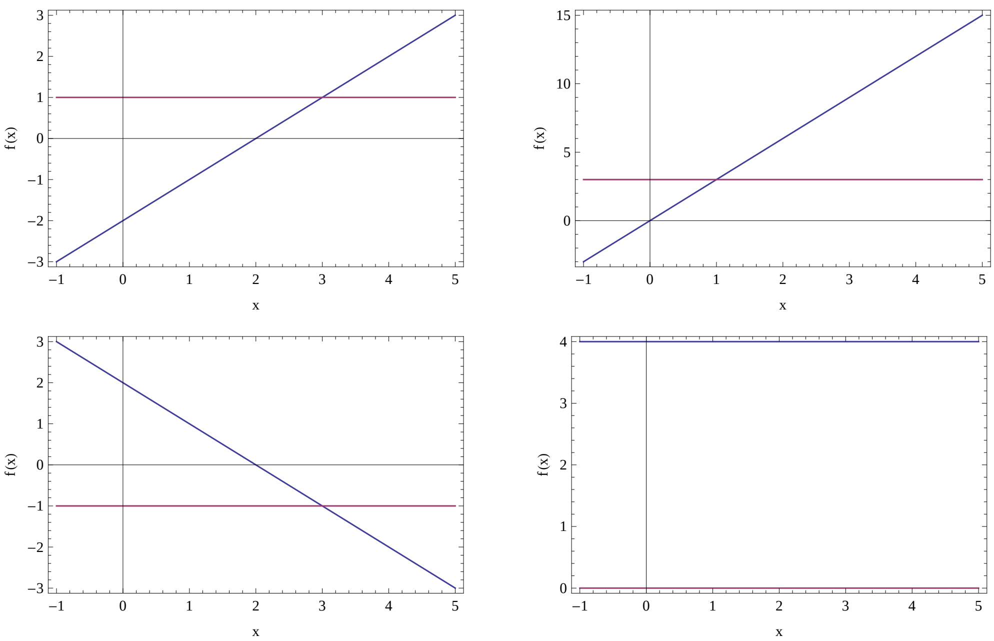
Lösung:



2. Steigung Skizzieren: Gerade 9NAHXQ

Skizzieren Sie die Steigung an jedem Ort.

Lösung:
Die Steigung der der Geraden ist überall gleich gross. Wenn wir das rot einzeichnen, entsteht eine konstatne Funktion, d.h. eine Linie auf einer konstanten Höhe.



3. Ableitung **ETCXKY**

Die Steigung des Graphen $f(x) = m \cdot x + c$ ist $f'(x) = m$, z.B.

$$f(x) = 5 \cdot x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5$$

Berechnen Sie die Steigungen der Graphen

(a) $f(x) = 1 \cdot x + 6$
(b) $f(x) = -5 \cdot x - 4$
(c) $f(x) = 2$
(d) $f(x) = 3 \cdot x + 7$

Lösung:

(a) $f'(x) = 1$
(b) $f'(x) = -5$
(c) $f'(x) = 0$

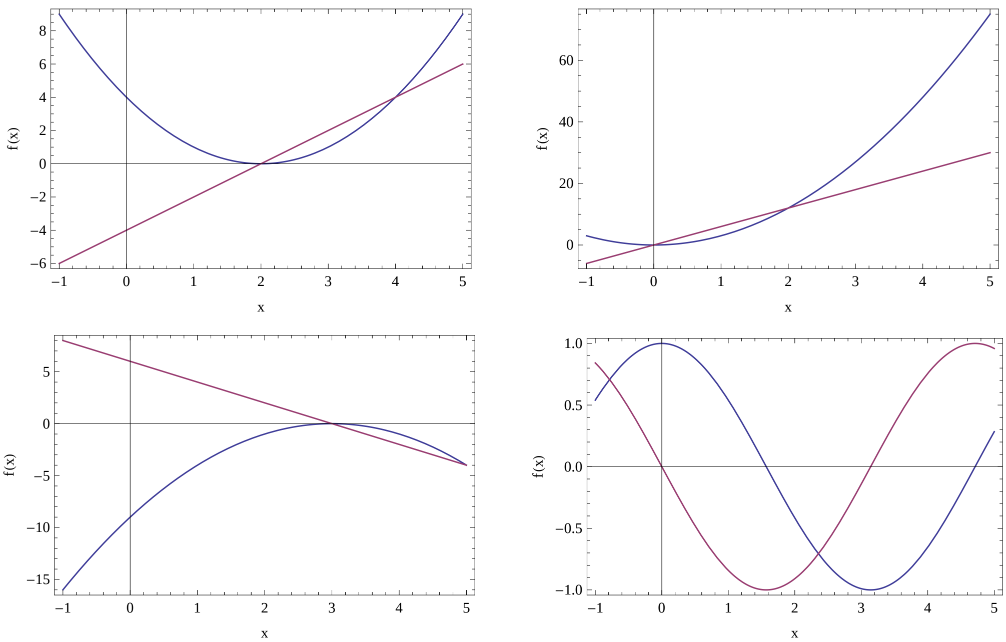
(d) $f'(x) = 3$

4. Steigung Parabel/Trigonometrische Funktionen **9NAHXQ**

Skizzieren Sie die Steigung an jedem Ort.

Lösung:

Die Steigung eines Graphen ist im Hochpunkt oder Tiefpunkt null. Wichtig ist, dass Graph der Steigung (rot) dies deutlich zeigt. Der Massstab der Steigung ist hier nicht wichtig.



5. Ableitung von x^2 **ETCXKY**

Die Steigung des Graphen $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2 \cdot x$.
Summenregel: Die Steigung des Graphen $f(x) = g(x) + h(x)$ ist $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.
Faktorregel: Die Steigung des Graphen $f(x) = b \cdot g(x)$ ist $f'(x) = b \cdot g'(x)$.

$$f(x) = x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left[x^2\right]' + \left[2\right]' = 2x$$

Berechnen Sie die Steigungen der Graphen

(a) $f(x) = x^2 + 6$

(b) $f(x) = x^2 + 2x$

(c) $f(x) = 9x^2 + 10x + 10$

(d) $f(x) = -10x^2 - 3x + 4$

(e) $f(x) = (x - 6)^2$

(f) $f(x) = (3-x)^2 + x$

(g) $f(x) = (x-7) \cdot (5-x)$

(h) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Lösung:

(a) $f'(x) = 2x$

(b) $f'(x) = 2x + 2$

(c) $f'(x) = 18x + 10$

(d) $f'(x) = -20x - 3$

(e) $f'(x) = 2x - 12$

(f) $f'(x) = 2x - 6 + 1 = 2x - 5$

(g) $f'(x) = -2x + 12$

(h) $f'(x) = 2a \cdot x + b$

6. Summenregel graphisch **23P9QT**

Der schwarze Graph $f(x)$ ist jeweils die Summe des blauen $g(x)$ und des roten $h(x)$. Erklären Sie die Summenregel anhand dem rechten oder linken Bild.

Lösung:

Es gilt für die $f(x) = g(x) + f(x)$. Aber auch für die Steigungen gilt:
Die Steigungen von $g(x)$ (blau) $h(x)$ (rot) addieren sich und ergeben die Steigung von $f(x)$ (schwarz).

7. Ableitung $\sin(x)$ und $\cos(x)$ und innere Ableitung **HCVNQ5**

Die Steigung des Graphen $f(x) = \sin(x)$ ist $f'(x) = \cos(x)$.
Die Steigung des Graphen $f(x) = \cos(x)$ ist $f'(x) = -\sin(x)$.
Ableitung von $f(a \cdot x + b)$ ist $f'(a \cdot x + b) = f'(u)\big|_{u=a\cdot x+b} \cdot a$. Beispiel

$$f(x) = \cos(2x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \big[\cos(u)\big]'_{u=2\cdot x} \cdot 2 = -\sin(2 \cdot x) \cdot 2$$

Berechnen Sie die Steigungen der Graphen

(a) $f(x) = \cos(x+4)$

(b) $f(x) = \sin(6x)$

(c) $f(x) = \sin(-4x+4)$

(d) $f(x) = \cos(10-x)$

(e) $f(x) = \cos(5x) + \sin(5x)$

(f) $f(x) = \cos(3) + \sin(3x)$

(g) $f(x) = \cos(8x-3) + \sin(8x-3)$

(h) $f(x) = \cos(1-5x) - \sin(1-5x)$

Lösung:

(a)

$$f'(x) = \left[\cos(u)\right]'_{u=x+4} \cdot 1 = [-sin(u)]_{u=x+4} = -\sin(x+4)$$

(b)

$$f'(x) = \left[\sin(u)\right]'_{u=6x} \cdot 6 = 6 \cdot \cos(u)|_{u=6x} = 6 \cdot \cos(6x)$$

(c)

$$f'(x) = \left[\sin(u)\right]'_{u=-4x+4} \cdot (-4) = -4 \cdot \cos(u)|_{u=-4x+4} = -4 \cdot \cos(-4x+4)$$

(d)

$$f'(x) = \left[\cos(u)\right]'_{u=10-x} \cdot (-1) = (-1) \cdot [-\sin(u)]_{u=10-x} = \sin(10-x)$$

(e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\cos(5x)\right]' + \left[\sin(5x)\right]' \\ &= \left[\cos(u)\right]'_{u=5x} \cdot 5 + \left[\sin(u)\right]'_{u=5x} \cdot 5 \\ &= 5 \cdot [-\sin(u)]_{u=5x} + 5 \cdot \cos(u)|_{u=5x} \\ &= -5 \cdot \sin(5x) + 5 \cdot \cos(5x) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\cos(3)\right]' + \left[\sin(3x)\right]' \\ &= 0 + \left[\sin(u)\right]'_{u=3x} \cdot 3 \\ &= \cdot \cos(u)|_{u=3x} = 3 \cdot \cos(3x) \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(8x-3) \cdot 8 + \cos(8x-3) \cdot 8 \\ &= -8\sin(8x-3) + 8\sin(8x-3) \end{aligned}$$

(h) $f'(x) = -5\sin(1-5x) + 5\cos(1-5x)$

8. Gemischte Aufgaben 8JY28W

Berechnen Sie die Steigungen der Graphen. Benutzen Sie dabei - wann immer möglich - die Regel für die innere Ableitung.

(a) $f(x) = 15 \cdot \cos(x)$

(b) $f(x) = \sin(3x) + 2$

(c) $f(x) = (x-2)^2$

(d) $f(x) = (3-x)^2$

(e) $f(x) = -2 \cdot (10 \cdot x + 2)^2$
(f) $f(x) = (3 \cdot 2 - 1)^2$
(g) $f(x) = 5 \cdot (2 - 3 \cdot x)^2$
(h) $f(x) = 10 \cdot (4x + 2)^2 - \sin(1 - 5x)$

Lösung:

(a) $f'(x) = -15 \cdot \cos(x)$
(b) $f'(x) = \cos(3x) \cdot 3 + 0 = 3\cos(3x)$
(c) $f'(x) = \left[u^2\right]'_{u=x-2} = 2 \cdot u\big|_{u=x-2} = 2(x-2)$
(d) $f'(x) = \left[u^2\right]'_{u=3-x} \cdot (-1) = (-1) \cdot [2 \cdot u]_{u=3-x} = -2 \cdot (3 - x)$
(e) $f'(x) = -2\left[u^2\right]'_{u=10 \cdot x+2} \cdot 10 = (-20) \cdot [2 \cdot u]_{u=10 \cdot x+2} = -20 \cdot (10 \cdot x + 2)$
(f) $f'(x) = 0$, denn x kommt in dem Term nicht vor!
(g) $f'(x) = 5 \cdot 2 \cdot (2 - 3 \cdot x) \cdot (-3) = -30 \cdot (2 - 3 \cdot x)$
(h) $f'(x) = 10 \cdot 2 \cdot (4x + 2) \cdot 4 - \cos(1 - 5x) \cdot (-5) = 80 \cdot (4x + 2) + 5\cos(1 - 5x)$

9. Ableitungen nach verschiedenen Variablen **FZXYZU**

Berechnen Sie die Steigungen der Graphen. Beachten Sie nach welcher Variable abgeleitet wird.

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

Notation:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx}$$

Beispiel:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + t\right) = 2x + 0$$

aber

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + t\right) = 0 + 1$$

d.h. beim Ableiten z.B. nach x betrachten wir alle Terme, die kein x enthalten als konstant.

(a) $f(t) = (4 - t)^2$ berechne $\frac{d}{dt} f(t)$
$\frac{d}{dt} f(t) = 2 \cdot (4 - t) \cdot (-1) = -2 \cdot (4 - t)$
(b) $f(t) = t + \sin(3x) + 2$ berechne $\frac{d}{dt} f(t)$
$\frac{d}{dt} f(t) = 1 + 0 + 0 = 1$
(c) $f(x) = t^2 + x - 2$ berechne $\frac{d}{dx} f(x)$
$\frac{d}{dx} f(x) = 0 + 1 - 0 = 1$

(d) $f(t) = \cos(3t)$ berechne $\frac{d}{dt}f(t)$
$\frac{d}{dt}f(t) = -\sin(3t)\cdot 3 = -3\sin(3t)$

(e) $f(t) = A - 2\cdot(10\cdot t+2)^2$ berechne $\frac{d}{dt}f(t)$
$\frac{d}{dt}f(t) = 0 - 4\cdot(10\cdot t+2)\cdot 10 = -40\cdot(10\cdot t+2)$

(f) $f(t) = A\cdot\cos(\omega\, t)$ berechne $\frac{d}{dt}f(t)$
$\frac{d}{dt}f(t) = A\cdot\cos(\omega\, t) = A\cdot\cos(\omega\, t)\cdot\omega$

(g) $f(t) = A\cdot\cos(k\cdot x - \omega\, t)$ berechne $\frac{d}{dt}f(t)$
$\frac{d}{dt}f(t) = -A\cdot\sin(k\cdot x-\omega\, t)\cdot(-\omega) = A\cdot\omega\cdot\sin(k\cdot x-\omega\, t)$

(h) $f(x) = A\cdot(k\cdot x-\omega\, t)^2$ berechne $\frac{d}{dx}f(x)$
$\frac{d}{dx}f(x) = A\cdot 2\cdot(k\cdot x-\omega\, t)\cdot k = A\cdot k\cdot 2\cdot(k\cdot x-\omega\, t)$

Lernziele:

- Steigung eines Graphen ist $f'(x)$. Wir nennen das die Ableitung; Notation $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$
- Summenregel $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
- Faktorregel $[a\cdot f(x)]' = a\cdot f'(x)$
- Innere Ableitung: Ableitung von $f(a\cdot x+b)$ ist $f'(a\cdot x+b) = f'(u)\big|_{u=a\cdot x+b}\cdot a$

Funktion	Ableitung
$f(x) = 1$	$f(x) = 0$
$f(x) = x$	$f(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f(x) = 2x$
$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = -\sin(x)$