Brückenkurs Physik
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.org

Serie 120, Musterlösung

Brückenkurs Physik Datum: 10. September 2018

1. Vektoraddition M3A4AT

Berechnen Sie die Summe der Kräfte als Vektoren. Geben Sie die Summe in Polar-Koordinaten an.

(a) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \end{pmatrix}$ N und $\vec{F}_2 = \left(250\text{ N}, \sphericalangle\, 60°\right)$

(b)
$$\vec{F}_1 = \left(100\text{ N}, \sphericalangle - 15°\right);\ \vec{F}_2 = \left(60\text{ N}, \sphericalangle\, 120°\right);\ \vec{F}_3 = \left(45\text{ N}, \sphericalangle\, 225°\right)$$

Lösung:

(a) Wir rechnen in Si-Einheiten und schreiben vorerst die Einheiten (N) nicht:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{tot}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \end{pmatrix} + 250 \begin{pmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 125 \\ 216.506 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 425 \\ 216.506 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun rechnen wir in Polar-Koordinaten um:

$$\begin{aligned}
F_{\text{tot}} &= = \sqrt{425^2 + (216.506)^2} = 477 \\
\alpha' &= \arccos\left(\frac{\vec{F}_{\text{tot}} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\vec{F}_{\text{tot}}| \cdot |\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}|} \right) \\
&= \arccos\left(\frac{425}{477 \cdot 1} \right) = 27°
\end{aligned}$$

In der kartheischen Darstellung sehen wir, dass $\vec{F}_{\text{tot}}$ im 1. Quadanten liegt, also $\alpha = \alpha' = 27°$.

(b)

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{tot}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\
&= \begin{pmatrix} 96.5926 \\ -25.8819 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ 51.9615 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -31.8198 \\ -31.8198 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 34.7728 \\ -5.74019 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun rechnen wir in Polar-Koordinaten um:

$$
\begin{aligned}
F_{\text{tot}} &= = \sqrt{(34.7728)^2 + (-5.74019)^2} = 35.24 \\
\alpha' &= \arccos\left(\frac{\vec{F}_{\text{tot}} \odot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\left|\vec{F}_{\text{tot}}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{34.7728}{35.24 \cdot 1}\right) = 9.373^\circ
\end{aligned}
$$

In der kartheischen Darstellung sehen wir, dass $\vec{F}_{\text{tot}}$ im 4. Quadanten liegt, also $\alpha = -\alpha' = -9.373^\circ$.

2. Statisches Gleichgewicht **NMHDJE**

Zwei Kräfte von 15 N und 20 N wirken im gleichen Punkte senkrecht zueinander

(a) Welche dritte Kraft stellt in diesem Punkt das Gleichgewicht her?

(b) Welchen Betrag hat die dritte Kraft ?

(c) Welchen Winkel bildet sie mit der kleineren der gegebenen Kräfte?

Lösung:

25 127°

(a) Es gilt $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ also

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_3 &= -\vec{F}_1 - \vec{F}_2 \\
&= -\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\-20\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

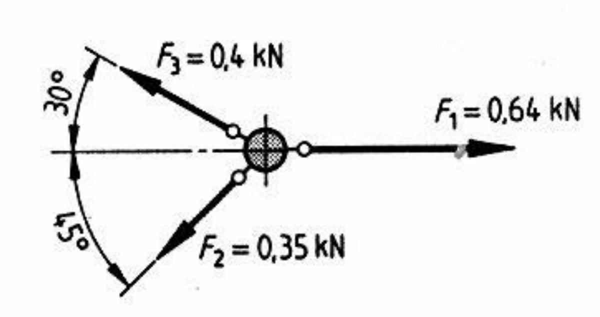
(b) $F_3 = \sqrt{(-15)^2 + (-20)^2} = 25$

(c)

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \arccos\left(\frac{\vec{F}_3 \odot \vec{F}_1}{\left|\vec{F}_3\right| \cdot \left|\vec{F}_1\right|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-15\\-20\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}}{25 \cdot 15}\right) \\
&= 126.87
\end{aligned}
$$

Bei Winkeln zwischen zwei Vektoren (also nicht zwischen Vektor und Koordinaten-Achsen), ergibt arccos sofort den richtigen Zwischenwinkel im Bereich $0 \leq \alpha \leq 180°$.

3. Leitungsmast 079431



Von einem Leitungsmast gehen drei Leitungen mit den angegebenen Zugkräften aus. Wie gross ist die Summe der drei Kräft

(a) in Karthesischen Koordinaten?

(b) in Polar-Koordinaten?

Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{tot}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\
&= 640 \begin{pmatrix} \cos(0°) \\ \sin(0°) \end{pmatrix} + 400 \begin{pmatrix} \cos\left((180-30)°\right) \\ \sin\left((180-30)°\right) \end{pmatrix} + 350 \begin{pmatrix} \cos\left((180+45)°\right) \\ \sin\left((180+45)°\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 640 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -346.41 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -247.487 \\ -247.487 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 46.1025 \\ -47.4874 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

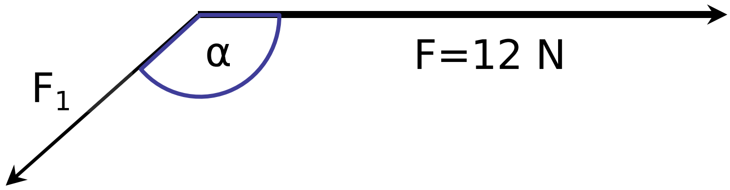
Nun rechnen wir in Polar-Koordinaten um:

$$\begin{aligned}
F_{\text{tot}} &= = \sqrt{(46.1025)^2 + (-47.4874)^2} = 66.2 \\
\alpha' &= \arccos\left(\frac{\vec{F}_{\text{tot}} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\vec{F}_{\text{tot}}\right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} \right) \\
&= \arccos\left(\frac{46.1025}{66.2 \cdot 1} \right) = 45.8°
\end{aligned}$$

In der kartheischen Darstellung sehen wir, dass $\vec{F}_{\text{tot}}$ im 4. Quadanten liegt, also $\alpha = -\alpha' = -45.8°$.

4. Zerlegung Kräfte 1 **9XDT4G**

Die Kraft $F = 12\,\mathrm{N}$ soll in zwei Komponenten zerlegt werden. Gegeben ist $F_1 = 5\,\mathrm{N}$ und der Winkel $\alpha = 140°$.



(a) Wie gross ist die Komponente $\vec{F}_2$?

(b) Geben Sie den Betrag von $\vec{F}_2$ an sowie den Winkel β zwischen $\vec{F}_2$ und $\vec{F}$.

Lösung:

Es gilt $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ oder umgeformt

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \vec{F} - \vec{F}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} \cos(-140°) \\ \sin(-140°) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3.83022 \\ -3.21394 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

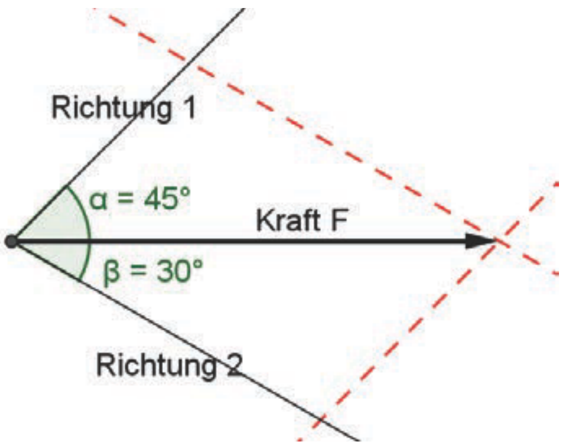
Alle Angaben in SI-Einheiten, also N. Die Länge ist $|\vec{F}_2| = \sqrt{(-3.83022)^2 + (-3.21394)^2} = 16.1532$ und der Winkel

$$\begin{aligned} \beta &= \arccos\left(\frac{\vec{F} \odot \vec{F}_2}{|\vec{F}| \cdot |\vec{F}_2|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{189.963}{12 \cdot 16.1532}\right) \\ &= 11.5° \end{aligned}$$

Bei Winkeln zwischen zwei Vektoren (also nicht zwischen Vektor und Koordinaten-Achsen), ergibt arccos sofort den richtigen Zwischenwinkel im Bereich $0 \leq \alpha \leq 180°$.

5. Zerlegung Kräfte 2 **NEFLZG**

Eine Kraft $F = 80\,\mathrm{N}$ soll in zwei Teilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zerlegt werden.



(a) Was sind die Längen der Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$?

(b) Wie lauten die karthesischen Komponenten der Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$? (im rechtwinkligen Koordinatensystem mit $\vec{F}||\vec{e}_x$)

Lösung:
Wir wählen das Koordinatensystem, so dass $\vec{F}||\vec{e}_x$, dann ist

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Längen der Vektoren erhalten wir durch Projektion

$$\vec{F}_1' = \begin{pmatrix} \cos(45°) \\ \sin(45°) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{F}_2' = \begin{pmatrix} \cos(-30°) \\ \sin(-30°) \end{pmatrix}$$

Wir suchen noch die richtigen Vorfaktoren F_1 und F_2, damit gilt

$$F_1 \cdot \vec{F}_1 + F_2 \cdot \vec{F}_2 = \vec{F}$$

oder ausmultipliziert

$$\left| \begin{array}{llcr} F_1 \cdot \cos(45°) & +F_2 \cdot \cos(-30°) & = & 80 \\ F_1 \cdot \sin(45°) & +F_2 \cdot \sin(-30°) & = & 0 \end{array} \right|$$

Wir nennen die erste Gleichung L_1 und die zweite L_2 und eliminieren wie folgt $(-L_2 \cdot \frac{\cos(45°)}{\sin(45°)} + L_1)$:

$$F_1 \cdot \underbrace{\left(\cos(45°) - \cos(45°) \frac{\sin(45°)}{\sin(45°)} \right)}_{=0} + F_2 \cdot \left[\cos(-30°) - \cos(45°) \frac{\sin(-30°)}{\sin(45°)} \right] = 80$$

oder aufgelöst nach F_2:

$$F_2 = \frac{80}{\cos(-30°) - \cos(45°) \frac{\sin(-30°)}{\sin(45°)}} = 58.5641$$

Aus L_2 erhalten wir

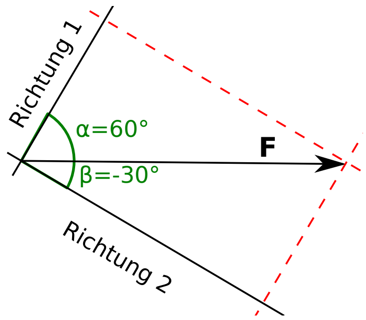
$$F_1 = -F_2 \frac{\sin(-30°)}{\sin(45°)} = 41.411$$

Das sind die Längen der Vektoren. Die karthesischen Komponenten im angegebenen Koordinatensystem sind

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_1' \cdot F_1 \\ &= \begin{pmatrix} 29.282 \\ 29.282 \end{pmatrix} \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_2' \cdot F_2 \\ &= \begin{pmatrix} 50.718 \\ -29.282 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Zerlegung Kräfte 3 **MEGLZF**

Eine Kraft $F = 80\,\mathrm{N}$ soll in zwei Teilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zerlegt werden.



(a) Was sind die Längen der Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$?

(b) Wie lauten die karthesischen Komponenten der Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$? (im rechtwinkligen Koordinatensystem mit $\vec{F}||\vec{e}_x$)

Lösung:

Wir wählen das Koordinatensystem, so dass $\vec{F}||\vec{e}_x$, dann ist

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Längen der Vektoren erhalten wir durch Projektion

$$\vec{F}_1' = \begin{pmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{F}_2' = \begin{pmatrix} \cos(-30°) \\ \sin(-30°) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \vec{F}_1' \odot \vec{F} \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix} = 40 \\ F_2 &= \vec{F}_2' \odot \vec{F} \\ &= \begin{pmatrix} 0.866025 \\ -0.5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix} = 69.282 \end{aligned}$$

Damit sind die Längen von $|\vec{F}_1| = 40$ und $|\vec{F}_2| = 69.282$ bestimmt.

Im angegebenen Koordinatensystem sind die Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_1' \cdot F_1 \\ &= 40 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 34.641 \end{pmatrix} \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_2' \cdot F_2 \\ &= 69.282 \cdot \begin{pmatrix} 0.866025 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ -34.641 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Achtung: Wären die Vektoren $\vec{F}_1'$ und $\vec{F}_2'$ nicht normiert, dann müssten man sie normieren, bevor man die Skalarprodukte mit $\vec{F}$ berechnet.